УДК 517.912

Р. М. Тацій[1,2], О. О. Власій[3]

ЕКВІВАЛЕНТНА РЕКУРЕНТНА ФОРМУЛА ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 4-ГО ПОРЯДКУ

Для узагальненого квазідиференціального рівняння четвертого порядку побудовано фундаментальну матрицю та виведено еквівалентну рекурентну формулу. Наведено ілюстративний приклад одержання еквівалентної рекурентної формули для звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами. Показано, як отримані результати можна використовувати для наближеного розв'язування (квазі)диференціальних рівнянь і відповідних задач Коші.

Розглядається узагальнене квазідиференціальне [4] рівняння (КДР)

$$(p_0 y'')'' - (p_1 y')' + p_2 y = 0\,, \tag{1}$$

де $p_0^{-1}(x)$ – обмежена й вимірна на деякому інтервалі $\mathcal{I} = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ функція; $p_i(x) = q_i'(x)$; функції $q_i(x)$, $i = 1, 2$, належать простору $BV_{\mathrm{loc}}^{+}(\mathcal{I})$ неперервних справа функцій локально обмеженої на $\mathcal{I}$ варіації.

Для рівняння (1) введемо квазіпохідні таким чином:

$$y^{[1]}(x) = y'(x), \qquad y^{[2]}(x) = p_0(x) y''(x)\,,$$

$$y^{[3]}(x) = (p_0(x) y''(x))' - p_1(x) y'(x)\,. \tag{2}$$

Тоді за допомогою вектора $\overline{Y}(x) = \mathrm{col}\left(y(x), y^{[1]}(x), y^{[2]}(x), y^{[3]}(x)\right)$ рівняння (1) зводиться до диференціальної системи першого порядку

$$\overline{Y}'(x) = C'(x)\overline{Y}(x)\,, \tag{3}$$

де

$$C'(x) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & p_1(x) & 0 & 1 \\ -p_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Нехай $\Delta C(x_s) = C(x_s) - C(x_s - 0)$ – стрибок матриці $C(x)$ у точці x_s, тоді

$$\Delta C(x_s) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta q_1(x_s) & 0 & 0 \\ -\Delta q_2(x_s) & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, що для системи (3) виконується необхідна та достатня умова коректності [4], тобто $\forall\ x \in \mathcal{I}\quad (\Delta C(x))^2 \equiv 0$.

Спряженою до системи (3) є система

$$\overline{Z}'(x) = -(C^*(x))' \cdot \overline{Z}(x)\,,$$

де $\overline{Z}(x) = \mathrm{col}\left(z^{\{3\}}(x), z^{\{2\}}(x), z^{\{1\}}(x), z(x)\right)$, а символ «$*$» означає ермітове спряження (у випадку дійснозначних елементів ця операція перетворюється у звичайне транспонування).

Зі спряженої системи однозначно визначаються квазіпохідні $z^{\{i\}}(x)$:

$$z^{\{1\}}(x) = -\,z'(x), \qquad z^{\{2\}}(x) = p_0(x) y''(x)\,,$$

$$z^{\{3\}}(x) = -(p_0(x) z''(x))' + p_1(x) z'(x)\,. \tag{4}$$

Надалі вирази $y^{[i]}(x)$ та $z^{\{j\}}(x)$, $i,j=1,2,3$, будемо називати квазіпохідними в сенсі вихідного та спряженого квазідиференціальних рівнянь відповідно.

Для системи (3) єдиним чином визначається фундаментальна матриця $B(x,\alpha)$, за допомогою якої розв'язок системи (3) записується як

$$\overline{Y}(x) = B(x,\alpha)\overline{Y}(\alpha). \tag{5}$$

Оскільки фундаментальна матриця є розв'язком системи (3) за змінною x, то для неї справджується умова стрибка $\Delta B(x,\alpha) = \Delta C(x) B(x-0,\alpha)$, тобто

$$B(x,\alpha) = (E + \Delta C(x))B(x-0,\alpha). \tag{6}$$

Фундаментальна матриця системи (3) має таку структуру [5]:

$$B(x,\alpha) = \begin{Vmatrix} K^{\{3\}}(x,\alpha) & K^{\{2\}}(x,\alpha) & K^{\{1\}}(x,\alpha) & K(x,\alpha) \\ K^{[1]\{3\}}(x,\alpha) & K^{[1]\{2\}}(x,\alpha) & K^{[1]\{1\}}(x,\alpha) & K^{[1]}(x,\alpha) \\ K^{[2]\{3\}}(x,\alpha) & K^{[2]\{2\}}(x,\alpha) & K^{[2]\{1\}}(x,\alpha) & K^{[2]}(x,\alpha) \\ K^{[3]\{3\}}(x,\alpha) & K^{[3]\{2\}}(x,\alpha) & K^{[3]\{1\}}(x,\alpha) & K^{[3]}(x,\alpha) \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

де $K(x,\alpha)$ – функція Коші КДР (1) [4]; $K^{[i]}(x,\alpha)$ – i-та квазіпохідна функції Коші у сенсі вихідного рівняння, яка береться за x; $K^{\{j\}}(x,\alpha)$ – j-та квазіпохідна функції Коші у сенсі спряженого рівняння, яка береться за α; $K^{[i]\{j\}}(x,\alpha)$ – змішана квазіпохідна функції Коші, яка спершу береться за x у сенсі вихідного рівняння, а потім – за α у сенсі спряженого рівняння.

Функція Коші $K(x-0,\alpha)$ будується в класичному розумінні для диференціального рівняння $(p_0 y'')'' = 0$. Можна переконатися, що

$$K(x-0,\alpha) = \int_\alpha^x p_0^{-1}(t)(x-t)(t-\alpha)\,dt.$$

Фундаментальна матриця, що відповідає рівнянню $(p_0 y'')'' = 0$, має структуру, аналогічну до (7). Знайшовши квазіпохідні функції Коші $K^{[i]\{j\}}(x-0,\alpha)$, $i,j=0,\ldots,3$, за формулами (2), (4) (враховуючи, що $p_1(x)=0$), будуємо матрицю $B(x-0,\alpha)$. Використавши формулу (6), одержуємо формулу для визначення фундаментальної матриці, що відповідає квазідиференціальному рівнянню (1):

$$B(x,\alpha) = \begin{Vmatrix} 1 & x-\alpha & I_2(x,\alpha) & I_1(x,\alpha) \\ 0 & 1 & I_4(x,\alpha) & I_3(x,\alpha) \\ 0 & \Delta_1 & 1 + I_4(x,\alpha)\Delta_1 & x-\alpha+I_3(x,\alpha)\Delta_1 \\ -\Delta_2 & -(x-\alpha)\Delta_2 & -I_2(x,\alpha)\Delta_2 & 1 - I_1(x,\alpha)\Delta_2 \end{Vmatrix},$$

де

$$\Delta_1 = \Delta q_1(x), \qquad \Delta_2 = \Delta q_2(x), \qquad I_1(x,\alpha) = \int_\alpha^x p_0^{-1}(t)(x-t)(t-\alpha)\,dt,$$

$$I_2(x,\alpha) = \int_\alpha^x p_0^{-1}(t)(x-t)\,dt, \quad I_3(x,\alpha) = \int_\alpha^x p_0^{-1}(t)(t-\alpha)\,dt, \quad I_4(x,\alpha) = \int_\alpha^x p_0^{-1}(t)\,dt.$$

Виберемо точки $x_s < x_{s+1} < x_{s+2} < x_{s+3} < x_{s+4} \subset I$ і покладемо $x = x_{s+1}$, $\alpha = x_s$. Тоді з (5) і (6) одержимо відповідно

$$\bar{Y}(x_{s+1}) = B(x_{s+1}, x_s)\bar{Y}(x_s), \tag{8}$$

$$B(x_{s+1}, x_s) = (E + \Delta C(x_{s+1}))B(x_{s+1} - 0, x_s). \tag{9}$$

Коли $x = x_{s+2}$, $\alpha = x_{s+1}$, одержимо

$$\bar{Y}(x_{s+2}) = B(x_{s+2}, x_{s+1})\bar{Y}(x_{s+1}).$$

Матриця $B(x, \alpha)$, як і в класичному випадку, має властивість гармонічності [2]:

$$\forall\ x_{i-1} < x_i < x_{i+1} \subset \mathcal{I} \qquad B(x_{i+1}, x_i) \cdot B(x_i, x_{i-1}) = B(x_{i+1}, x_{i-1}),$$

тому справджується формула

$$\bar{Y}(x_{s+2}) = B(x_{s+2}, x_s)\bar{Y}(x_s). \tag{10}$$

Зауважимо, що в розглядуваному випадку матрицю $B(x_{s+2}, x_s)$ потрібно обчислювати як добуток матриць $B(x_{s+2}, x_{s+1}) \cdot B(x_{s+1}, x_s)$.

Аналогічними міркуваннями одержимо

$$\bar{Y}(x_{s+3}) = B(x_{s+3}, x_s)\bar{Y}(x_s), \tag{11}$$

$$\bar{Y}(x_{s+4}) = B(x_{s+4}, x_s)\bar{Y}(x_s). \tag{12}$$

Розписавши поелементно формули (8), (10)–(12) і виписавши перші рядки одержаних систем, дістанемо таку систему:

$$y_{s+1} = b_{s+1,s}^{11} y_s + b_{s+1,s}^{12} y_s^{[1]} + b_{s+1,s}^{13} y_s^{[2]} + b_{s+1,s}^{14} y_s^{[3]},$$

$$y_{s+2} = b_{s+2,s}^{11} y_s + b_{s+2,s}^{12} y_s^{[1]} + b_{s+2,s}^{13} y_s^{[2]} + b_{s+2,s}^{14} y_s^{[3]},$$

$$y_{s+3} = b_{s+3,s}^{11} y_s + b_{s+3,s}^{12} y_s^{[1]} + b_{s+3,s}^{13} y_s^{[2]} + b_{s+3,s}^{14} y_s^{[3]},$$

$$y_{s+4} = b_{s+4,s}^{11} y_s + b_{s+4,s}^{12} y_s^{[1]} + b_{s+4,s}^{13} y_s^{[2]} + b_{s+4,s}^{14} y_s^{[3]}, \tag{13}$$

де $b_{s+k,s}^{1j}$ – елементи першого рядка матриці $B(x_{s+k}, x_s)$, $k, j = 1, \ldots, 4$; $y_s^{[i]} = y^{[i]}(x_s)$, $i = 0, \ldots, 3$.

Утворимо визначник

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} y_s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_{s+1} & b_{s+1,s}^{11} & b_{s+1,s}^{12} & b_{s+1,s}^{13} & b_{s+1,s}^{14} \\ y_{s+2} & b_{s+2,s}^{11} & b_{s+2,s}^{12} & b_{s+2,s}^{13} & b_{s+2,s}^{14} \\ y_{s+3} & b_{s+3,s}^{11} & b_{s+3,s}^{12} & b_{s+3,s}^{13} & b_{s+3,s}^{14} \\ y_{s+4} & b_{s+4,s}^{11} & b_{s+4,s}^{12} & b_{s+4,s}^{13} & b_{s+4,s}^{14} \end{vmatrix}.$$

Враховуючи лінійну залежність між стовпцями цього визначника, одержуємо, що $\Delta_s = 0$. Розкладаючи визначник за елементами першого стовпця, отримаємо п’ятиточкову рекурентну формулу

$$\Delta_{s,0} \cdot y_s + \Delta_{s,1} \cdot y_{s+1} + \Delta_{s,2} \cdot y_{s+2} + \Delta_{s,3} \cdot y_{s+3} + \Delta_{s,4} \cdot y_{s+4} = 0, \tag{14}$$

де $\Delta_{s,i}$, $i = 0, \ldots, 4$, – алгебраїчне доповнення до елемента першого стовпця визначника Δ_s, який розміщений в i-му рядку.

Зауважимо, що одержана формула є не наближеною, а точною, еквівалентною КДР (1). Довільний частковий розв’язок КДР (1), обчислений у деякій конкретній точці, співпадає зі значенням, отриманим за допомогою еквівалентної рекурентної формули (14). Отже, одержали дискретне зображення розв’язку узагальненого квазідиференціального рівняння.

Для КДР (1) поставимо задачу Коші з умовами

$$y^{(i)}(x_0) = y_0, \qquad i = 0,\ldots,3. \tag{15}$$

Тоді для системи (3) розглянемо відповідну задачу Коші з умовою

$$\bar{Y}(x_0) = \bar{Y}_0.$$

Задачі (1), (15) відповідає початкова задача для еквівалентної рекурентної формули із деякими початковими значеннями y_0, y_1, y_2, y_3, які обчислюються за формулами (13).

Проілюструємо застосування одержаних результатів на ***прикладі***. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0. \tag{16}$$

Спочатку отримаємо еквівалентну рекурентну формулу для цього рівняння, застосувавши квазіпохідні

$$y^{[1]}(x) = y'(x), \qquad y^{[2]}(x) = y''(x), \qquad y^{[3]}(x) = y'''(x) - 5y'(x).$$

За допомогою вектора $\bar{Y}(x) = \operatorname{col}\left(y(x), y^{[1]}(x), y^{[2]}(x), y^{[3]}(x)\right)$ квазідиференціальне рівняння (16) зведемо до такої системи:

$$\begin{Vmatrix} y(x) \\ y^{[1]}(x) \\ y^{[2]}(x) \\ y^{[3]}(x) \end{Vmatrix}' = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y(x) \\ y^{[1]}(x) \\ y^{[2]}(x) \\ y^{[3]}(x) \end{Vmatrix}. \tag{17}$$

Квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння будемо обчислювати за формулами

$$z^{\{1\}}(x) = -z'(x), \qquad z^{\{2\}}(x) = z''(x), \qquad z^{\{3\}}(x) = -z'''(x) + 5z'(x).$$

Фундаментальну систему розв'язків рівняння (16) утворюють функції $y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = e^{-x}$, $y_3(x) = e^{2x}$, $y_4(x) = e^{-2x}$. Функцію Коші для рівняння (16) знаходимо за формулою [3]

$$K(x,\alpha) = \frac{1}{W(\alpha)} \begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) & y_3(\alpha) & y_4(\alpha) \\ y_1^{[1]}(\alpha) & y_2^{[1]}(\alpha) & y_3^{[1]}(\alpha) & y_4^{[1]}(\alpha) \\ y_1^{[2]}(\alpha) & y_2^{[2]}(\alpha) & y_3^{[2]}(\alpha) & y_4^{[2]}(\alpha) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) \end{vmatrix},$$

де $W(\alpha)$ – квазівронскіан [4] рівняння (16):

$$W(\alpha) = \begin{vmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) & y_3(\alpha) & y_4(\alpha) \\ y_1^{[1]}(\alpha) & y_2^{[1]}(\alpha) & y_3^{[1]}(\alpha) & y_4^{[1]}(\alpha) \\ y_1^{[2]}(\alpha) & y_2^{[2]}(\alpha) & y_3^{[2]}(\alpha) & y_4^{[2]}(\alpha) \\ y_1^{[3]}(\alpha) & y_2^{[3]}(\alpha) & y_3^{[3]}(\alpha) & y_4^{[3]}(\alpha) \end{vmatrix}.$$

Остаточно функція Коші рівняння (16) має вигляд

$$K(x,\alpha) = -\frac{1}{6}e^{x-\alpha} + \frac{1}{6}e^{-(x-\alpha)} + \frac{1}{12}e^{2(x-\alpha)} - \frac{1}{12}e^{-2(x-\alpha)}.$$

Зауважимо, що одержана функція Коші співпадає з функцією Коші, знайденою класичним способом.

Виберемо точки $x_s < x_{s+1} < x_{s+2} < x_{s+3} < x_{s+4} \subset \mathbb{R}$. Для зручності вважатимемо, що ці точки рівновіддалені одна від одної на відстань h, тобто

$h = x_{s+i+1} - x_{s+i}$, $i = 0, \dots, 3$. Оскільки функція Коші та її квазіпохідні в точках (x_{s+i+1}, x_{s+i}), $i = 0, \dots, 3$, не залежать від i (залежать тільки від h), то й фундаментальна матриця $B(x, \alpha)$ рівняння (16) у цих точках не залежить від i, тому справджується формула

$$B(x_{s+k}, x_s) = B^k(x_{s+1}, x_s), \qquad k = 2, 3, 4. \tag{18}$$

Знайшовши елементи матриць $B(x_{s+k}, x_s)$, $k = 1, \dots, 4$, та обчисливши коефіцієнти $\Delta_{s,i}$, $i = 0, \dots, 4$, у формулі (14), одержимо еквівалентну (точну) формулу для рівняння (16):

$$y_{s+4} - (e^h + e^{-h} + e^{2h} + e^{-2h})y_{s+3} + (2 + e^h + e^{-h} + e^{3h} + e^{-3h})y_{s+2} -$$
$$- (e^h + e^{-h} + e^{2h} + e^{-2h})y_{s+1} + y_s = 0. \tag{19}$$

Отже, квазідиференціальне рівняння (16) еквівалентне деякій дискретній рекурентній формулі (19).

Покажемо, як еквівалентну рекурентну формулу можна використовувати для наближеного розв’язування квазідиференціальних рівнянь.

Для рівняння (16) поставимо задачу Коші з умовами

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y''(0) = 1, \qquad y'''(0) = 1. \tag{20}$$

Розв’язком задачі (16), (20) буде функція

$$y(x) = -\frac{1}{3}e^x + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{12}e^{-2x}. \tag{21}$$

Знайдемо наближений розв’язок задачі (16), (20).

Для системи (17) маємо

$$C(x) = \begin{Vmatrix} c_{11} & x & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & x & c_{24} \\ c_{31} & 5x & c_{33} & x \\ -4x & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{Vmatrix}, \qquad c_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Щоб одержати рівняння, наближене до рівняння (16), застосуємо так звану D-апроксимацію, запропоновану в роботі [1]. Нехай потрібно знайти значення розв’язку рівняння (16) у деякій точці x_N. Тоді відрізок $[0, x_N]$ розбиваємо на n рівних частин:

$$0 \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_s < x_{s+1} < \dots < x_n \equiv x_N.$$

Позначимо довжину відрізка $[x_s, x_{s+1}]$ через h, $h = \dfrac{x_N}{n}$. Елементи $c_{32}(x) = 5x$, $c_{41}(x) = -4x$ матриці $C(x)$ апроксимуємо такими функціями:

$$c_{32}^n(x) = c_{32}(x_s) = 5x_s, \qquad c_{41}^n(x) = c_{41}(x_s) = -4x_s, \qquad x \in [x_s, x_{s+1}).$$

Врахувавши, що $\Delta c_{32}^n(x_s) = 5h$, $\Delta c_{41}^n(x_s) = -4h$, для системи (17) одержимо наближену систему

$$\begin{Vmatrix} y_n \\ y_n^{[1]} \\ y_n^{[2]} \\ y_n^{[3]} \end{Vmatrix}' = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{s=1}^{n} 5h\delta(x - x_s) & 0 & 1 \\ -\sum\limits_{s=1}^{n} 4h\delta(x - x_s) & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_n \\ y_n^{[1]} \\ y_n^{[2]} \\ y_n^{[3]} \end{Vmatrix}, \tag{22}$$

де $\delta(x - x_s)$ − функція Дірака з носієм у точці x_s.

Тоді для (16) наближене рівняння буде мати вигляд (1):

$$y_n^{(4)}(x) - 5\left(\sum_{s=1}^{n} h\delta(x - x_s) y_n'(x)\right)' + 4\sum_{s=1}^{n} h\delta(x - x_s) y_n(x) = 0. \qquad (23)$$

Оскільки для диференціального рівняння $y^{(4)} = 0$ функція Коші $K(x, \alpha) = \dfrac{(x - \alpha)^3}{3!}$, то для системи (22) згідно з формулою (9), враховуючи, що $x_{s+1} - x_s = h$, фундаментальна матриця буде

$$B(x_{s+1}, x_s) = \left\| \begin{matrix} 1 & h & \dfrac{h^2}{2} & \dfrac{h^3}{6} \\ 0 & 1 & h & \dfrac{h^2}{2} \\ 0 & 5h & 1 + 5h^2 & h + \dfrac{5}{2}h^3 \\ -4h & -4h^3 & -2h^2 & 1 - \dfrac{2}{3}h^4 \end{matrix} \right\|.$$

Значення $B(x_{s+1}, x_s)$ не залежить від s, тому справджується формула (18). Обчислимо коефіцієнти еквівалентної рекурентної формули для рівняння (23):

$$\Delta_{s,0} = h^6 + \frac{5}{3}h^8 + \frac{25}{48}h^{10},$$

$$\Delta_{s,1} = -\left(4h^6 + \frac{35}{3}h^8 + \frac{39}{4}h^{10} + \frac{215}{144}h^{12} - \frac{25}{72}h^{14}\right),$$

$$\Delta_{s,2} = 6h^6 + 20h^8 + \frac{539}{24}h^{10} + \frac{815}{72}h^{12} + \frac{25}{6}h^{14} + \frac{125}{144}h^{16},$$

$$\Delta_{s,3} = -\left(4h^6 + \frac{35}{3}h^8 + \frac{39}{4}h^{10} + \frac{215}{144}h^{12} - \frac{25}{72}h^{14}\right),$$

$$\Delta_{s,4} = h^6 + \frac{5}{3}h^8 + \frac{25}{48}h^{10}.$$

Отже, еквівалентна рекурентна формула для рівняння (23) має вигляд

$$y_{s+4} - \left(4 + 5h^2 - \frac{2}{3}h^4\right)y_{s+3} + \left(6 + 10h^2 + \frac{8}{3}h^4 + \frac{5}{3}h^6\right)y_{s+2} -$$

$$-\left(4 + 5h^2 - \frac{2}{3}h^4\right)y_{s+1} + y_s = 0 \qquad (24)$$

Для системи (22) виконуються всі умови теореми, доведеної в [2], отже, розв'язок цієї системи буде наближеним розв'язком системи (17), а значить, розв'язок рекурентної формули (24) буде наближеним розв'язком квазідиференціального рівняння (16).

Початкові значення y_0, y_1, y_2, y_3 для рекурентної формули (24) обчислюємо за формулами (13) для кожного конкретного значення h. Оскільки внаслідок апроксимації одержано, по суті, різницеву схему, то доцільно порівняти запропонований вище метод із методом різницевих схем. У табл. 1 наведено наближені значення розв'язку рівняння (16) у точці $x = 1$, одержані за допомогою еквівалентної формули (24) для рівняння (23) (ЕФ) та методом різницевих схем (МРС).

Таблиця 1

h	ЕФ	МРС
100	0.9524051	0.9470478
200	0.9524368	0.9497682
500	0.9524461	0.9513810
1000	0.9524468	0.9519147

Точне значення розв'язку − $y(1) = 0.952448022182669$.

1. *Аткинсон Ф. О.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. − Москва: Мир, 1968. − 749 с.
2. *Власій О.* Про збіжність наближених розв'язків диференціальних рівнянь з мірами // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. − 2005. − № 540. − С. 62−64.
3. *Кісілевич В., Стасюк М., Тацій Р.* Конструкція елементів фундаментальної матриці квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. − 2004. − № 518. − С. 30−35.
4. *Тацій Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. держ. ун-т ім. І. Франка. − Львів, 1994. − 37 с.
5. *Тацій Р. М., Пахолок Б. Б.* Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. Сер. А. − 1989. − № 4. − С. 27−30.

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА

Для обобщенного квазидифференциального уравнения четвертого порядка построена фундаментальная матрица и выведена эквивалентная рекуррентная формула. Приведен иллюстративный пример получения эквивалентной рекуррентной формулы для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Показано, как полученные результаты можно применять для приближенного решения (квази)дифференциальных уравнений и соответствующих задач Коши.

EQUIVALENT RECURRENT FORMULA FOR 4-ORDER QUASI-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The fundamental matrix for 4-order generalized quazi-differential equations is constructed. The equivalent recurrent formula for such equations is obtained. The equivalent recurrent formula is verified by an illustrative example. The approximate method for solving the quazi-differential equations with the help of equivalent recurrent formula is considered.

[1]Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2]Акад. Бидґоська ім. Казімєжа Великого, Бидґощ, Польща,
[3]Прикарпат. ун-т ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

Одержано
06.10.05