УДК 517.95

Н. М. Гринців

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИРОДЖЕННЯМ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі визначення залежного від часу коефіцієнта температуропровідності, який у початковий момент часу перетворюється в нуль, як степенева функція t^β, $0 < \beta < 1$, *коли частина межі області невідома.*

В області з невідомою частиною межі розглядається крайова задача для рівняння теплопровідності з невідомим коефіцієнтом, який у початковий момент часу перетворюється в нуль, як степенева функція t^β, $0 < \beta < 1$. Ця задача є поєднанням двох типів задач: оберненої задачі з виродженням та задачі з вільною межею, прикладом якої є задача Стефана [6]. Такі задачі були предметом вивчення багатьох авторів. Так, обернені задачі з виродженням для рівнянь еліптичного та гіперболічного типів розглядались в [1, 2]. Випадок слабкого виродження для параболічного рівняння, коли старший коефіцієнт прямує до нуля, як степінь t^β, $0 < \beta < 1$, в області зі сталими межами вивчено в [4]. Умови існування та єдиності розв'язку для одновимірного параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом при старшій похідній в області з вільною межею встановлено в [3].

Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t),\ 0 < t < T\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ розглядаємо обернену задачу визначення невідомого коефіцієнта $a(t)$ у рівнянні теплопровідності

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

коли задано початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le h(0), \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

та умови перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)\,dx = \mu_4(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Заміною змінних $y = \dfrac{x}{h(t)}$, $t = t$ зведемо задачу (1)–(5) до оберненої стосовно невідомих $a(t), h(t), v(y,t)$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області зі сталими межами $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1,\ 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{h'(t)}{h(t)} y v_y + f(yh(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \qquad 0 \le y \le 1, \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\frac{a(t)}{h(t)} v_y(0,t) = \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

$$h(t)\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_4(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{10}$$

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. – 49, № 4. – С. 28-39.

Означення. Під розв'язком задачі (6)–(10) будемо розуміти трійку функцій $(a(t), h(t), v(y,t))$ з класу $C[0,T]\times C^1[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $a(t)>0$, $t\in(0,T]$, $\exists\lim\limits_{t\to+0} a(t)t^{-\beta}>0$, $0<\beta<1$, $h(t)>0$, $t\in[0,T]$, що задовольняє рівняння (6) та умови (7)–(10).

Припустимо, що виконується умова

(**A1**) $\mu_i\in C^1[0,T]$, $i=1,2,4$, $\mu_i(t)>0$, $i=1,2,4$, $t\in[0,T]$,
$\mu_3(t)\in C[0,T]$, $f\in C([0,\infty)\times[0,T])$, $f(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in[0,\infty)\times[0,T]$,
$\varphi\in C[0,\infty)$, $\varphi(x)\ge\varphi_0>0$, $x\in[0,\infty)$.

Тоді згідно з припущеннями (**A1**) та умовами (2), (5) одержуємо існування єдиного значення $h(0)=h_0>0$, що задовольняє рівняння

$$\int\limits_0^{h_0}\varphi(x)\,dx=\mu_4(0).$$

Згідно з принципом максимуму [5] для розв'язку задачі (6)–(8) матимемо

$$v(y,t)\ge\min\{\min_{[0,h_0]}\varphi(x),\ \min_{[0,T]}\mu_1(t),\ \min_{[0,T]}\mu_2(t)\}\equiv M_0>0,\quad (y,t)\in\bar{Q}_T,$$

звідки з урахуванням (10) отримуємо

$$h(t)\le\frac{\max\limits_{[0,T]}\mu_4(t)}{M_0}\equiv H_1<\infty,\qquad t\in[0,T].$$

Знайдемо оцінку $v(y,t)$ зверху. Використовуючи принцип максимуму, одержуємо

$$v(y,t)\le\max\{\max_{[0,h_0]}\varphi(x),\ \max_{[0,T]}\mu_1(t),\ \max_{[0,T]}\mu_2(t),\ \max_{[0,H_1]\times[0,T]}f(x,t)\}\equiv$$

$$\equiv M_1<\infty,\qquad (y,t)\in\bar{Q}_T,$$

і згідно з (10) маємо

$$h(t)\ge\frac{\max\limits_{[0,T]}\mu_4(t)}{M_1}\equiv H_0>0,\qquad t\in[0,T].$$

Отже,

$$0<M_0\le v(y,t)\le M_1<\infty,\qquad (y,t)\in\bar{Q}_T,\tag{11}$$

$$0<H_0\le h(t)\le H_1<\infty,\qquad t\in[0,T].\tag{12}$$

Існування розв'язку задачі (6)–(10).

Теорема 1. *При виконанні умови* (**A1**) *та умов*

(**A2**) $\varphi\in C^1[0,h_0]$, $\varphi'(x)>0$, $x\in[0,h_0]$, $f\in H^{\alpha,0}([0,H_1]\times[0,T])$,
$\alpha\in(0,1)$, $\mu_3(t)>0$, $t\in(0,T]$, $\exists\lim\limits_{t\to+0}\mu_3(t)t^{-\beta}>0$;

(**A3**) $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(h_0)=\mu_2(0)$,

можна вказати таке число $T_0: 0<T_0\le T$, *яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі* (6)–(10) *існує при* $0\le y\le 1$, $0\le t\le T_0$.

Д о в е д е н н я. Позначимо

$$G_k(y,t,\eta,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi[\theta(t)-\theta(\tau)]}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4[\theta(t)-\theta(\tau)]}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4[\theta(t)-\theta(\tau)]}\right)\right],\qquad \theta(t)=\int\limits_0^t\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}d\tau,\quad k=1,2,$$

де $G_k(y,t,\eta,\tau)$, $k=1,2$, – функція Гріна для рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy}$$

з крайовими умовами (8) при $k = 1$ та умовами $v_y(0,t) = \mu_1(t)$, $v_y(1,t) = \mu_2(t)$ при $k = 2$.

Пряма задача (6)–(8) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $a(t), h(t), h'(t)$ еквівалентна рівнянню

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)} v_\eta(\eta,\tau)\, d\eta\, d\tau, \tag{13}$$

де $v_0(y,t)$ визначається формулою

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\varphi(\eta h_0)\, d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau) \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} \mu_1(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau) \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} \mu_2(\tau)\, d\tau + \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) f(\eta h(\tau),\tau)\, d\eta\, d\tau. \tag{14}$$

Введемо позначення $\omega(y,t) = v_y(y,t)$, $p(t) = h'(t)$. Тоді з умови (9) матимемо

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)h(t)}{\omega(0,t)}, \qquad t \in [0,T], \tag{15}$$

а з умови (10)

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)\, dy}, \qquad t \in [0,T]. \tag{16}$$

Продиференціювавши умову (10) за часом, із одержаної рівності знаходимо

$$p(t) = \Bigg[\mu_4'(t) - h(t)\int_0^1 f(yh(t),t)dy -$$

$$- \frac{a(t)}{h(t)}\big(\omega(1,t) - \omega(0,t)\big)\Bigg]\mu_2^{-1}(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Замінимо інтегро-диференціальне рівняння (13) системою інтегральних рівнянь:

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)} \omega(\eta,\tau) d\eta\, d\tau, \quad (y,t) \in \bar{Q}_T, \tag{18}$$

$$\omega(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) \frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)} \omega(\eta,\tau) d\eta\, d\tau, \quad (y,t) \in \bar{Q}_T, \tag{19}$$

де $v_0(y,t)$ визначається рівністю (14), а

$$v_{0y}(y,t) = h_0 \int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\, \varphi'(\eta h_0)\, d\eta - \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\, \mu_1'(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)\, d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) f(\eta h(\tau),\tau)\, d\eta\, d\tau. \tag{20}$$

Таким чином, задачу (6)–(10) зведено до системи рівнянь (15)–(19) з невідомими $a(t), h(t), p(t), v(y,t), \omega(y,t)$. Задача (6)–(10) і система (15)–(19) еквівалентні в тому сенсі, що, якщо $(a(t), h(t), v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)–(10), то $(a(t), h(t), p(t), v(y,t), \omega(y,t))$ є неперервним розв'язком системи (15)–(19). Правильним є і обернене твердження: якщо $(a(t), h(t), p(t), v(y,t)$,

$\omega(y,t))$ є неперервним розв'язком системи (15)–(19), то функції $(a(t), h(t),$ $v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)–(10) у сенсі наведеного вище означення. Для цього достатньо довести, що ці функції належать до класу $C[0,T]\times C^1[0,T]\times$ $\times C^{2,1}(Q_T)\bigcap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$ і задовольняють умови (6)–(10).

Отже, нехай $(a(t), h(t), p(t), v(y,t), \omega(y,t))\in (C[0,T])^3\times (C(\bar{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (15)–(19). Припущення теореми дозволяють продиференціювати рівність (18) за y. Праві частини отриманої рівності та рівності (19) співпадають, тому $\omega(y,t)=v_y(y,t)$. На підставі (18) робимо висновок, що $v(y,t)$ має потрібну гладкість, задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{yp(t)}{h(t)}v_y + f(yh(t),t) \tag{21}$$

і умови (7), (8) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $a(t), h(t), p(t)$.

Оскільки $v(y,t)\in C^{2,1}(Q_T)\bigcap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$ і $\mu_4(t)\in C^1[0,T]$, то $h(t)\in C^1[0,T]$. Продиференціюємо рівність (16) за t, використовуючи при цьому рівняння (21). Одержимо

$$p(t)=\left[\mu_4(t)-h(t)\int_0^1 f(yh(t),t)\,dy-\frac{a(t)\big(v_y(1,t)-v_y(0,t)\big)}{h(t)}+\right.$$
$$\left.+\frac{p(t)\mu_4(t)}{h(t)}-\frac{h'(t)\mu_4(t)}{h(t)}\right]\mu_2^{-1}(t).$$

Віднімаючи від останньої рівності рівність (17), отримаємо

$$\frac{\mu_4(t)}{h(t)}\big(p(t)-h'(t)\big)=0,$$

звідки, враховуючи умови теореми, маємо, що $h'(t)=p(t)$. Використовуючи це в рівнянні (21), матимемо рівняння (6). Після цього умова (16) є еквівалентною умові (10), а умова (15) – умові (9).

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (15)–(19) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку. Для цього спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків системи.

Розглянемо рівняння (19). Оскільки $\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,d\eta=1$, то згідно з умовою (**A2**) теореми отримуємо додатність першого доданка з (20), всі інші доданки при $t\to 0$ прямують до нуля. Таким чином, можна вказати таке число $t_1 : 0<t_1\le T$, що

$$\frac{h_0}{2}\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)\,d\eta \ge \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\,\mu_1'(\tau)\,d\tau -$$
$$-\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\,\mu_2'(\tau)\,d\tau-\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\,\frac{\eta p(\tau)}{h(\tau)}\,\omega(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau,$$

звідки

$$\omega(y,t)\ge \frac{1}{2}\min_{[0,1]}\varphi'(yh_0)\equiv M_2>0, \qquad t\in[0,t_1]. \tag{22}$$

Тоді з (15), враховуючи (12) та умову (**A2**) теореми, знаходимо

$$a(t) \le \frac{\mu_3(t)}{M_2} \le A_1 t^\beta, \qquad A_1 > 0, \qquad t \in [0, t_1]. \tag{23}$$

Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |\omega(y,t)|$. Використовуючи (23), з (17) отримуємо

$$|p(t)| \le C_1 + C_2 t^\beta W(t), \qquad t \in [0, t_1]. \tag{24}$$

Враховуючи (24) та оцінки функцій Гріна

$$G_2(y,t,\eta,\tau) \le C_3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}\right),$$

$$\int_0^1 |G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|\, d\eta \le \frac{C_4}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}},$$

із (19) отримуємо

$$W(t) \le$$

$$\le C_5 + C_6 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_7 \int_0^t \frac{W(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}\, d\tau + C_8 \int_0^t \frac{W^2(\tau)\tau^\beta}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}\, d\tau. \tag{25}$$

Введемо позначення

$$a_0(t) = \frac{a(t)}{t^\beta}, \qquad a_{\min}(t) = \min_{0 \le \tau \le t} a_0(\tau).$$

Тоді

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \le \frac{C_9}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} \le$$

$$\le \frac{C_9}{\sqrt{a_{\min}(t)}\, t^{\beta/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} = \frac{C_{10} t^{(1-\beta)/2}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}.$$

Використовуючи останню нерівність у (25), одержуємо

$$W(t) \le C_5 + \frac{C_{11} t^{(1-\beta)/2}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{12}}{t^{\beta/2}\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{W(\tau)}{\sqrt{t - \tau}}\, d\tau +$$

$$+ \frac{C_{13}}{t^{\beta/2}\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{\tau^\beta W^2(\tau)}{\sqrt{t - \tau}}\, d\tau. \tag{26}$$

У нерівності (26) замінимо t на σ і, домноживши її на $\dfrac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$, проінтегруємо за σ від 0 до t. Отримаємо

$$\int_0^t \frac{W(\sigma)}{\sqrt{t - \sigma}}\, d\sigma \le 2C_5\sqrt{t} + \frac{2C_{11} t^{1-\beta/2}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{12}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^{\beta/2}\sqrt{t - \sigma}} \int_0^\sigma \frac{W(\tau)}{\sqrt{\sigma - \tau}}\, d\tau +$$

$$+ \frac{C_{13}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^{\beta/2}\sqrt{t - \sigma}} \int_0^\sigma \frac{\tau^\beta W^2(\tau)}{\sqrt{\sigma - \tau}}\, d\tau.$$

Змінюючи порядок інтегрування у двох останніх доданках і враховуючи рівність

$$\int_\tau^t \frac{d\sigma}{\sqrt{(t - \sigma)(\sigma - \tau)}} = \pi,$$

знаходимо

$$\int_0^t \frac{W(\sigma)}{\sqrt{t - \sigma}}\, d\sigma \le$$

$$\le C_{14}\sqrt{t} + \frac{C_{15} t^{1-\beta/2}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{16}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{W(\tau)}{\tau^{\beta/2}}\, d\tau + \frac{C_{17} t^{\beta/2}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t W^2(\tau)\, d\tau. \tag{27}$$

Піднесемо обидві частини нерівності (26) до квадрату. Використовуючи нерівності Коші та Коші − Буняковського, знаходимо

$$W^2(t) \le 2C_5^2 + \frac{2C_{11}^2 t^{1-\beta}}{a_{\min}(t)} + \frac{2C_{12}^2}{t^\beta a_{\min}(t)} \int_0^t \frac{W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} +$$

$$+ \frac{2C_{13}^2}{t^\beta a_{\min}(t)} \int_0^t \frac{\tau^{2\beta} W^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

звідки маємо

$$W^2(t) \le 2C_5^2 + \frac{2C_{11}^2 t^{1-\beta}}{a_{\min}(t)} + \frac{4C_{12}^2}{t^{\beta-1/2} a_{\min}(t)} \int_0^t \frac{W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau +$$

$$+ \frac{4C_{13}^2}{t^{\beta-1/2} a_{\min}(t)} \int_0^t \frac{\tau^{2\beta} W^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau .$$

В останній нерівності замінимо t на σ і, домноживши на $\dfrac{\sigma^\beta}{\sqrt{t-\sigma}}$, проінтегруємо її за σ від 0 до t. Отримаємо

$$\int_0^t \frac{W^2(\sigma)\sigma^\beta}{\sqrt{t-\sigma}}\, d\sigma \le C_{18} t^{\beta+1/2} + \frac{C_{19} t^{1/2}}{a_{\min}(t)} + \frac{C_{20} t^{1/2}}{a_{\min}(t)} \int_0^t W^2(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{C_{21} t^{2\beta+1/2}}{a_{\min}(t)} \int_0^t W^4(\tau)\, d\tau . \tag{28}$$

Підставляючи (27) і (28) у (26), знаходимо

$$W(t) \le C_5 + \frac{C_{22} t^{(1-\beta)/2}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{23} t^{1-\beta}}{a_{\min}(t)} + \frac{C_{24} t^{(1+\beta)/2}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{25} t^{(3-\beta)/2}}{a_{\min}^{3/2}(t)} +$$

$$+ \frac{C_{26}}{t^{\beta/2} a_{\min}(t)} \int_0^t \frac{W(\tau)}{\tau^{\beta/2}}\, d\tau + \frac{C_{27}}{a_{\min}(t)} \int_0^t W^2(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{C_{28} t^{(1-\beta)/2}}{a_{\min}^{3/2}(t)} \int_0^t W^2(\tau)\, d\tau + \frac{C_{29} t^{(3\beta+1)/2}}{a_{\min}^{3/2}(t)} \int_0^t W^4(\tau)\, d\tau . \tag{29}$$

Використаємо також наступні нерівності:

$$\int_0^t W^2(\tau)\, d\tau \le \sqrt{t}\left(\int_0^t W^4(\tau)\, d\tau\right)^{1/2} \le \sqrt{t}\left(1 + \int_0^t W^4(\tau)\, d\tau\right),$$

$$\int_0^t \frac{W(\tau)}{\tau^{\beta/2}}\, d\tau \le \sqrt{t}\left(\int_0^t \frac{W^2(\tau)}{\tau^\beta}\, d\tau\right)^{1/2} \le \sqrt{t} + \sqrt{t}\int_0^t \frac{W^2(\tau)}{\tau^\beta}\, d\tau \le$$

$$\le \sqrt{t} + \frac{t^{(3-\beta)/2}}{\sqrt{1-\beta}}\left(1 + \int_0^t \frac{W^4(\tau)}{\tau^\beta}\, d\tau\right).$$

Тоді з (29), враховуючи оцінку $a(t)$ зверху, одержуємо

$$W(t) \le C_5 + \frac{C_{30}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{31} t^{(1-\beta)/2}}{a_{\min}^{3/2}(t)} + \frac{C_{32}}{a_{\min}^{3/2}(t)} \int_0^t \frac{W^4(\tau)}{\tau^\beta}\, d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \tag{30}$$

Позначимо

$$\Phi(t) = C_5 + \frac{C_{30}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{31} t^{(1-\beta)/2}}{a_{\min}^{3/2}(t)}, \qquad \Psi(t) = \frac{C_{32}}{a_{\min}^{3/2}(t)}, \tag{31}$$

$$H(t) = \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} + \int_0^t \frac{W^4(\tau)}{\tau^\beta}\, d\tau . \tag{32}$$

Тоді з (30) маємо

$$\frac{W(t)}{\Psi(t)} \le H(t)\,. \tag{33}$$

Продиференціювавши (32) за часом, отримаємо

$$H'(t) \le \left(\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\right)' + \frac{\Psi^4(t)}{t^\beta} H^4(t)\,. \tag{34}$$

Останню нерівність поділимо на $H^4(t)$ і продиференціюємо її від 0 до t. Матимемо

$$\frac{1}{3H^3(0)} - \frac{1}{3H^3(t)} \le \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\frac{1}{H^4(t)} - \frac{\Phi(0)}{\Psi(0)}\frac{1}{H^4(0)} + 4\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau + \int_0^t \frac{\Psi^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau\,,$$

звідки

$$\frac{H^4(t)}{3H^3(0)}\left(4 - 3H^3(0)\left(4\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau + \int_0^t \frac{\Psi^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau\right)\right) \le \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} + \frac{H(t)}{3}\,, \tag{35}$$

де $H(0) = \dfrac{\Phi(0)}{\Psi(0)}$. Виконавши в $\displaystyle\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau$ заміну $\sigma = H(\tau)$, отримаємо

$$\int_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau = \int_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\Psi(H^{-1}(\sigma))}\frac{d\sigma}{\sigma^5}\,,$$

де $H^{-1}(\sigma)$ − функція, обернена до $H(t)$.

Оскільки $\displaystyle 4\int_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\Psi(H^{-1}(\sigma))}\frac{d\sigma}{\sigma^5} + \int_0^t \frac{\Psi^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau \to 0$, коли $t \to 0$, то можна вказати таке $t_2 : 0 < t_2 \le T$, що

$$4 - 3H^3(0)\left(4\int_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\Psi(H^{-1}(\sigma))}\frac{d\sigma}{\sigma^5} + \int_0^t \frac{\Psi^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau\right) \ge 1, \qquad t \in [0, t_2]\,.$$

Тоді з (35) випливає нерівність

$$\frac{H^4(t)}{3H^3(0)} \le \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} + \frac{H(t)}{3}\,, \qquad t \in [0, t_2]\,,$$

або

$$H^4(t) \le \frac{3\Phi(t)}{\Psi(t)}H^3(0) + H^3(0)H(t), \qquad t \in [0, t_2]\,.$$

Використовуючи це в (34), знаходимо

$$H'(t) \le \left(\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\right)' + \frac{\Psi^4(t)}{t^\beta}H^3(0)H(t) + \frac{3\Psi^3(t)}{t^\beta}\Phi(t)H^3(0)\,.$$

Помноживши останню нерівність на $\exp\left(-H^3(0)\displaystyle\int_0^t \frac{\Psi^4(\sigma)}{\sigma^\beta}d\sigma\right)$ і проінтегрувавши її, отримаємо

$$H(t) \le \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} + 4H^3(0)\int_0^t \frac{\Phi(\tau)\Psi^3(\tau)}{\tau^\beta}\exp\left(H^3(0)\int_\tau^t \frac{\Psi^4(\sigma)}{\sigma^\beta}d\sigma\right)d\tau\,.$$

Тоді з (33) маємо

$$W(t) \le \Phi(t) + 4H^3(0)\Psi(t)\exp\left(H^3(0)\int_0^t \frac{\Psi^4(\sigma)}{\sigma^\beta}\,d\sigma\right)\int_0^t \frac{\Phi(\tau)\Psi^3(\tau)}{\tau^\beta}\,d\tau$$

або з урахуванням (31)

$$W(t) \le$$
$$\le C_5 + \frac{C_{30}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{31}t^{(1-\beta)/2}}{a_{\min}^{3/2}(t)} + \frac{C_{33}}{a_{\min}^{3/2}(t)}\exp\left(C_{34}\int_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^\beta a_{\min}^6(\sigma)}\right)\int_0^t \left[C_5 + \right.$$
$$\left. + \frac{C_{30}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}} + \frac{C_{31}\tau^{(1-\beta)/2}}{a_{\min}^{3/2}(\tau)}\right]\frac{1}{\tau^\beta a_{\min}^{9/2}(\tau)}\,d\tau, \qquad t \in [0, t_2]. \tag{36}$$

Із умови перевизначення (15) знаходимо

$$a_{\min}(t) \ge \frac{C_{35}}{W(t)}$$

або, враховуючи (36),

$$a_{\min}(t) \ge C_{35}\left\{C_5 + \right.$$
$$+ \frac{C_{30}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{31}t^{(1-\beta)/2}}{a_{\min}^{3/2}(t)} + \frac{C_{33}}{a_{\min}^{3/2}(t)}\exp\left(C_{34}\int_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^\beta a_{\min}^6(\sigma)}\right)\int_0^t \left[C_5 + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{C_{30}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}} + \frac{C_{31}\tau^{(1-\beta)/2}}{a_{\min}^{3/2}(\tau)}\right]\frac{1}{\tau^\beta a_{\min}^{9/2}(\tau)}\,d\tau\right\}^{-1},$$

звідки

$$C_5 a_{\min}(t) + C_{30}\sqrt{a_{\min}(t)} +$$
$$+ \frac{C_{31}t^{(1-\beta)/2}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{33}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\exp\left(C_{34}\int_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^\beta a_{\min}^6(\sigma)}\right)\int_0^t \left[C_5 + \right.$$
$$\left. + \frac{C_{30}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}} + \frac{C_{31}\tau^{(1-\beta)/2}}{a_{\min}^{3/2}(\tau)}\right]\frac{1}{\tau^\beta a_{\min}^{9/2}(\tau)}\,d\tau - C_{35} \ge 0, \quad t \in [0, t_2]. \tag{37}$$

Оскільки

$$K(t) = \frac{C_{31}t^{(1-\beta)/2}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{33}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\exp\left(C_{34}\int_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^\beta a_{\min}^6(\sigma)}\right)\int_0^t \left[C_5 + \right.$$
$$\left. + \frac{C_{30}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}} + \frac{C_{31}\tau^{(1-\beta)/2}}{a_{\min}^{3/2}(\tau)}\right]\frac{1}{\tau^\beta a_{\min}^{9/2}(\tau)}\,d\tau \to 0$$

при $t \to 0$, то можна вказати таке число $t_3 : 0 < t_3 \le T$, що

$$K(t) \le \frac{C_{35}}{2}, \qquad t \in [0, t_3].$$

Тоді з нерівності (37) знаходимо

$$C_5 a_{\min}(t) + C_{30}\sqrt{a_{\min}(t)} - \frac{C_{35}}{2} \ge 0, \qquad t \in [0, t_3],$$

звідки

$$a_{\min}(t) \ge \left(\frac{-C_{30} + \sqrt{C_{30}^2 + 2C_{35}C_5}}{2C_5}\right)^2 \equiv A_0 > 0$$

або, враховуючи введені позначення,

$$a(t) \ge A_0 t^\beta, \qquad t \in [0, t_3]. \tag{38}$$

Використовуючи останню оцінку в (36), отримуємо

$$|\omega(y,t)| \le M_3, \qquad t \in [0,t_3], \qquad y \in [0,1], \tag{39}$$

і згідно з (24)

$$|p(t)| \le M_4, \qquad t \in [0,t_3]. \tag{40}$$

Таким чином, апріорні оцінки розв'язків системи (15)–(19) встановлено.

Доведемо існування границі $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{a(t)}{t^\beta} > 0$. Позначимо $\mu_{30}(t) = \dfrac{\mu_3(t)}{t^\beta}$. Тоді з умови перевизначення (15) отримуємо

$$a_0(t) = \frac{\mu_{30}(t)h(t)}{v_y(0,t)}.$$

Із (19) та умов теореми випливає, що

$$\lim_{t\to+0} v_y(0,t) = \lim_{t\to+0} h_0 \int_0^1 G_2(0,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)\,d\eta = h_0\varphi'(0).$$

Отже,

$$\lim_{t\to+0} \frac{a(t)}{t^\beta} = \lim_{t\to+0} a_0(t) = \frac{\mu_{30}(0)}{\varphi'(0)} > 0.$$

Означимо множину

$$N = \Big\{ \big(a(t),\, h(t),\, p(t),\, v(y,t),\, \omega(y,t)\big) \in \big(C[0,T_0]\big)^3 \times \big(C(\bar{Q}_{T_0})\big)^2 :$$

$$0 < A_0 \le \frac{a(t)}{t^\beta} \le A_1 < \infty,\ \ 0 < H_0 \le h(t) \le H_1 < \infty,\ \ |p(t)| \le M_4 < \infty,$$

$$0 < M_0 \le v(y,t) \le M_1 < \infty,\ \ |\omega(y,t)| \le M_3 < \infty \Big\},$$

де $T_0 = \min\{t_1, t_2, t_3\}$. Систему (15)–(19) подамо у вигляді операторного рівняння

$$w = Pw,$$

де $w = \big(a(t), h(t), p(t), v(y,t), \omega(y,t)\big)$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (15)–(19). Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера. Оскільки

$$|a(t_1) - a(t_2)| = \frac{|\mu_3(t_1) - \mu_3(t_2)|}{v_y(0,t_2)} h(t_1) + \frac{|h(t_1) - h(t_2)|}{v_y(0,t_2)} \mu_3(t_2) +$$

$$+ \frac{|v_y(0,t_2) - v_y(0,t_1)|}{v_y(0,t_1) v_y(0,t_2)} \mu_3(t_1) h(t_1),$$

то компактність оператора P доводиться аналогічно, як у [4] і [7]. Таким чином, згідно з теоремою Шаудера існує розв'язок системи рівнянь (15)–(19), а, отже, і розв'язок задачі (6)–(10) при $t \in [0,T_0]$, $y \in [0,1]$. ◊

Єдиність розв'язку задачі (6)–(10).

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються умови:*

(Б1) $f \in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,T])$;

(Б2) $\varphi(x) \ge \varphi_0 > 0, \quad x \in [0,\infty), \quad \mu_i(t) > 0, \quad i = 1,2,4, \quad t \in [0,T]$,

$f(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in ([0,\infty)\times[0,T])$;

(Б3) $\mu_3(t) > 0, \quad t \in (0,T], \quad \exists \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\mu_3(t)}{t^\beta} > 0$.

Тоді розв'язок задачі (6)–(10) *єдиний.*

Д о в е д е н н я. Нехай $(a_i(t), h_i(t), v_i(y,t))$, $i = 1,2$, − два розв'язки задачі (6)−(10). Позначимо $\dfrac{a_i(t)}{h_i^2(t)} = r_i(t)$, $\dfrac{h_i'(t)}{h_i(t)} = q_i(t)$, $i = 1,2$. Тоді різниці $r(t) = r_1(t) - r_2(t)$, $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$, $v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t)$ задовольняють умови

$$v_t = r_2(t) v_{yy} + q_2(t) y v_y + r(t) v_{1yy} + q(t) y v_{1y} +$$

$$+ f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{41}$$

$$v(y,0) = 0, \qquad y \in [0,1], \tag{42}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{43}$$

$$r(t) v_{1y}(0,t) = -r_2(t) v_y(0,t) + \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \qquad t \in [0,T], \tag{44}$$

$$\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \qquad t \in [0,T]. \tag{45}$$

Використовуючи введені позначення, виразимо $h_i(t)$ через $q_i(t)$:

$$h_i(t) = h_i(0)\exp\left(\int_0^t q_i(\tau) d\tau\right), \qquad i = 1,2.$$

Згідно з умовою (**Б2**) теореми $h_1(0) = h_2(0) = h_0$. Тоді

$$\frac{1}{h_1^k(t)} - \frac{1}{h_2^k(t)} = \frac{1}{h_0^k}\left[\exp\left(-k\int_0^t q_1(\tau)\,d\tau\right) - \exp\left(-k\int_0^t q_2(\tau)\,d\tau\right)\right], \quad k = 1,2.$$

Звідси, враховуючи рівність

$$e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}\,d\tau,$$

отримуємо

$$\frac{1}{h_1^k(t)} - \frac{1}{h_2^k(t)} =$$

$$= -\frac{k}{h_0^k}\int_0^1 q(\tau)\,d\tau \int_0^1 \exp\left(-k\int_0^t (\sigma q(\tau) ++ q_2(\tau)) d\tau\right) d\sigma, \qquad k = 1,2. \tag{46}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_t = \frac{a_2(t)}{h_2^2(t)} v_{yy} + y q_2(t) v_y$$

розв'язок задачі (41)−(43) подамо у вигляді

$$v(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\big[r(\tau)\, v_{1\eta\eta} + q(\tau)\,\eta\, v_{1\eta} + f(\eta h_1(\tau),\tau) -$$

$$- f(\eta h_2(\tau),\tau)\big]\,d\eta\,d\tau, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_T. \tag{47}$$

Із умови (44) з урахуванням (46) знаходимо

$$r(t)v_{1y}(0,t) = -\frac{\mu_3(t)}{h_0}\int_0^1 q(\tau)\,d\tau\int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (\sigma q(\tau)+q_2(\tau))\,d\tau\right)d\sigma -$$

$$- r_2(t)\omega(0,t), \qquad t\in[0,T], \tag{48}$$

де $\omega(y,t)$ згідно з (47) визначається за формулою

$$\omega(y,t) = \int_0^t\int_0^1 G^*_{1y}(y,t,\eta,\tau)\big[r(\tau)v_{1\eta\eta} + q(\tau)\eta v_{1\eta} + f(\eta h_1(\tau),\tau) -$$

$$- f(\eta h_2(\tau),\tau)\big]\,d\eta\,d\tau, \qquad (y,t)\in\bar{Q}_T. \tag{49}$$

Оскільки $(a_i(t), h_i(t), v_i(y,t))$, $i=1,2$, – розв'язки задачі (6)–(10), то для $q_i(t)$, $i=1,2$, справджуються рівності, аналогічні до (17):

$$q_i(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\left(\frac{\mu_4(t)}{h_i(t)} - \int_0^1 f(yh_i(t),t)\,dy - r_i(t)\big(\omega_i(1,t)-\omega_i(0,t)\big)\right),$$

де $\omega_i = v_{iy}$. Віднімемо ці рівності, використовуючи (46). Отримаємо

$$q(t) = -\frac{\mu_4'(t)}{\mu_2(t)h_0}\int_0^1 q(\tau)\,d\tau\int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (\sigma q(\tau)+q_2(\tau))\,d\tau\right)d\sigma -$$

$$-\frac{1}{\mu_2(t)}\int_0^1 \big(f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t)\big)\,dy - \frac{r_1(t)}{\mu_2(t)}\big(\omega(1,t)-\omega(0,t)\big) -$$

$$-\frac{r(t)}{\mu_2(t)}\big(\omega_2(1,t)-\omega_2(0,t)\big). \tag{50}$$

Припущення теореми забезпечують правильність рівностей

$$f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) =$$

$$= y\big(h_1(t)-h_2(t)\big)\int_0^1 f_x\big(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t\big)\,d\sigma, \tag{51}$$

$$h_1(t)-h_2(t) = h_0\int_0^1 q(\tau)\,d\tau\int_0^1 \exp\left(\int_0^t (\sigma q(\tau)+q_2(\tau))\,d\tau\right)d\sigma. \tag{52}$$

Використовуючи (51), (52), (49) у (48), (50), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно $r(t)$, $q(t)$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. З єдиності розв'язку таких систем знаходимо, що $r(t)\equiv 0$, $q(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$. Повертаючись до функцій $a_i(t)$, $h_i(t)$, $i=1,2$, отримуємо $a_1(t)\equiv a_2(t)$, $h_1(t)\equiv h_2(t)$, $t\in[0,T]$. Враховуючи це в задачі (41)–(43), одержуємо $v_1(y,t)\equiv v_2(y,t)$, $(y,t)\in\bar{Q}_T$, що й завершує доведення теореми. ◊

1. *Гаджиев М. М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Применение методов функц. анализа в уравнениях мат. физики. – Новосибирск, 1987. – С. 66–71.
2. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка // Изв. АН КазССР. Сер. Физ.-мат. – 1987. – № 3. – С. 27–29.
3 *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.

4. *Іванчов М. І., Салдіна Н. В.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 11. – С. 1563–1570.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
7. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – Vol. 10. – 238 p.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи определения зависимого от времени коэффициента температуропроводности, превращающегося в начальный момент времени в нуль, как степенная функция t^{β}, $0 < \beta < 1$, *в области с неизвестной частью границы.*

INVERSE PROBLEM FOR DEGENERATED HEAT CONDUCTION EQUATION IN FREE BOUNDARY DOMAIN

We have established conditions of existence and uniqueness of solution to the inverse problem for a degenerated heat conduction equation with unknown time-dependent thermal diffusivity which vanishes at the initial moment as a power of time t^{β}, $0 < \beta < 1$, *when a part of boundary of the domain is unknown.*

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
06.03.06