УДК 517.537.6

О. М. Головата[1✉], О. М. Мулява[2], М. М. Шеремета[1]

ПСЕВДОЗІРКОВІ, ПСЕВДООПУКЛІ ТА БЛИЗЬКІ ДО ПСЕВДООПУКЛИХ РЯДИ ДІРІХЛЕ, ЯКІ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності введено поняття псевдозірковості, псевдоопуклості та близькості до псевдоопуклості. Отримані результати застосовано до вивчення властивостей розв'язків диференціальних рівнянь з експоненціальними коефіцієнтами.

Ключові слова: *ряди Діріхле, псевдозірковість, псевдоопуклість, близькість до псевдоопуклості, диференціальне рівняння.*

Вступ. Аналітичну однолисту в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцію

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \qquad z = re^{i\varphi},$$

називають опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ є опуклою областю. Відомо [1, с. 203], що умова $\operatorname{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0$, $z \in \mathbb{D}$, є необхідною і достатньою для опуклості f.

Згідно з W. Kaplan-ом [18] аналітичну в $\mathbb{D}$ функцію f називають близькою до опуклої (див. також [1, с. 583]), якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція F така, що $\operatorname{Re}\{f''(z)/F'(z)\} > 0$, $z \in \mathbb{D}$. Близька до опуклої функція f характеризується тим, що доповнення G до області $f(\mathbb{D})$ можна покрити променями L, які виходять з ∂G і лежать в G. Кожна близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція f є однолистою в $\mathbb{D}$, і тому $f'(0) \neq 0$. Звідси випливає, що функція f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді й тільки тоді, коли такою є функція $(f(z) - f(0))/f'(0)$. Зрозуміло, що $(f(z) - f(0))/f'(0) = g(z)$, де

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} g_k z^k \tag{1}$$

і $g_k = f_k / f_1$. Нарешті, функцію (1) називають зірковою в $\mathbb{D}$, якщо $g(\mathbb{D})$ є зірковою областю, а необхідною і достатньою умовою для зірковості g є [1, с. 202] нерівність $\operatorname{Re}\{zg'(z)/g(z)\} > 0$, $z \in \mathbb{D}$. Зрозуміло, що зіркова функція є близькою до опуклої.

З результатів, які раніше отримав J. W. Alexander [13] (див. також [15, с. 9]), випливає, що *при додатних дійсних коефіцієнтах* g_k *таких, що* $1 \geq 2g_2 \geq 3g_3 \geq \ldots \geq (k-1)g_{k-1} \geq kg_k \geq \ldots \geq 0$, *функція* (1) *є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$. Для функції g з комплексними коефіцієнтами g_k Alexander [13] довів, що *достатньою умовою близькості до опуклості є умова* $\sum_{k=2}^{\infty} k|g_k| \leq 1$. У [15] A. W. Goodman довів, що, *якщо* $\sum_{k=2}^{\infty} k|g_k| \leq 1$, *то функція* g *є зірковою, а якщо* $\sum_{k=2}^{\infty} k^2|g_k| \leq 1$, *то вона є опуклою.*

✉ o_sumyk@yahoo.com

Вводячи поняття опуклості і зірковості порядку $\alpha \in [0,1)$, мероморфної опуклості і зірковості порядку $\alpha \in [0,1)$, опуклості і зірковості p-листих функцій та інші, багато авторів (див., наприклад, [14, 17, 19, 21–24, 27–30]) продовжили дослідження J. W. Alexander-а.

S. M. Shah у [25] встановив умови на дійсні параметри γ_0, γ_1, γ_2 диференціального рівняння

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0\,, \tag{2}$$

за яких воно має цілий трансцендентний розв'язок (1) такий, що функція g і всі її похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями. Зокрема, він довів, що, *якщо* $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $-2 \le \gamma_0 < 0$, *то рівняння* (2) *має цілий розв'язок* $g(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} g_k z^k$ *такий, що всі похідні* $g^{(2n+1)}$, $n \ge 0$, *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями, а якщо* $\gamma_1 = 0$, $0 < |\gamma_0| \le 2$, $\gamma_2 = -1$, *то рівняння* (2) *має цілий розв'язок* (1) *такий, що всі похідні* $g^{(2n)}$, $n \ge 0$, *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями.* Для таких розв'язків $\ln M_g(r) = (1 + o(1))\sqrt{|\gamma_0|}\,r$ при $r \to +\infty$, де $M_g(r) = \max\{|g(z)| : |z| = r\}$.

Різним узагальненням результатів S. M. Shah-а присвячено статті [3–9, 20, 26].

Підставляючи $z = e^s$ у (2), отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2w}{ds^2} + (\gamma_0 e^{2hs} + \gamma_1 e^{hs} + \gamma_2)w = 0 \tag{3}$$

з $h = 1$. Вважатимемо h довільним додатним числом і дослідимо геометричні властивості ряду Діріхле з додатними зростаючими до $+\infty$ показниками, який задовольняє це рівняння. Для цього побудуємо геометричну теорію для класу рядів Діріхле, абсолютно збіжних у півплощині $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$.

1. Конформність і неоднолистість рядів Діріхле. Нехай $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow \infty$, а D_0 – клас аналітичних у півплощині $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ функцій F, зображених рядами Діріхле

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\} = f_0 + f_1 \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it\,, \tag{4}$$

з нульовою абсцисою абсолютної збіжності. Через SD_0 позначимо його підклас, який складається з аналітичних в Π_0 функцій G вигляду

$$G(s) = \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}\,, \tag{5}$$

тобто SD_0 є класом функцій (4), нормалізованих умовами $f_0 = 0$ і $f_1 = 1$.

Теорема 1. *Кожна функція* $F \in D_0$ *є неоднолистою в* Π_0. *Існують* $F \in D_0$, *конформні в* Π_0, *і якщо для коефіцієнтів функції* G *виконується нерівність*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k |g_k| \le \lambda_1\,, \tag{6}$$

то функція G *є конформною в* Π_0.

Д о в е д е н н я. Зрозуміло, що за умови $f_1 \neq 0$ функція $F \in D_0$ є однолистою в Π_0 тоді й тільки тоді, коли $G = \dfrac{F - f_0}{f_1} \in SD_0$ є однолистою в Π_0, де $g_k = f_k / f_1$. Якщо ж $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$ рівні нулеві, а $f_m \neq 0$, то покладаємо $G = \dfrac{F - f_0}{f_m}$. Тому всюди надалі за замовчуванням вважаємо, що $f_1 \neq 0$.

Отже, достатньо довести, що кожна функція $G \in SD_0$ є неоднолистою в Π_0.

Приймемо, що $g(s) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}$. Оскільки з огляду на аналітичність функції $g(s)$ в Π_0 маємо

$$\left|\frac{g(s)}{\exp\{s\lambda_1\}}\right| = \left|\frac{\exp\{s\lambda_2\}\sum\limits_{k=2}^{\infty} g_k \exp\{s(\lambda_k - \lambda_2)\}}{\exp\{s\lambda_1\}}\right| \leq$$

$$\leq \exp\{\sigma(\lambda_2 - \lambda_1)\}\sum_{k=2}^{\infty} |g_k| \exp\{\sigma(\lambda_k - \lambda_2)\} \to 0, \quad \sigma \to -\infty,$$

то $\left|\dfrac{g(s)}{\exp\{s\lambda_1\}}\right| < \dfrac{1}{4}$ для всіх s таких, що $\operatorname{Re} s \leq \sigma_0 \in (-\infty, 0)$.

Нехай

$$\sigma_1 = \sigma_0 - \frac{\ln 2}{\lambda_1}, \qquad \sigma_2 = \sigma_1 - \frac{\ln 2}{\lambda_1}, \qquad w = \exp\{\sigma_1\lambda_1\}.$$

Якщо $\operatorname{Re} s = \sigma_0$, то

$$|\exp\{s\lambda_1\} - w| \geq \exp\{\sigma_0\lambda_1\} - \exp\{\sigma_1\lambda_1\} = \frac{1}{2}\exp\{\sigma_0\lambda_1\} > 2|g(s)|,$$

а якщо $\operatorname{Re} s = \sigma_2$, то

$$|\exp\{s\lambda_1\} - w| \geq \exp\{\sigma_1\lambda_1\} - \exp\{\sigma_2\lambda_1\} = \frac{1}{2}\exp\{\sigma_1\lambda_1\} > 2|g(s)|.$$

Якщо $s = \sigma + \dfrac{i\pi}{\lambda_1}$ або $s = \sigma + \dfrac{3i\pi}{\lambda_1}$ і $\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_0$, то

$$|\exp\{s\lambda_1\} - w| = \exp\{\sigma\lambda_1\} + \exp\{\sigma_1\lambda_1\} \geq \exp\{\sigma\lambda_1\} > 4|g(s)|.$$

Звідси випливає, що на сторонах прямокутника R з вершинами

$$\sigma_2 + \frac{i\pi}{\lambda_1}, \qquad \sigma_0 + \frac{i\pi}{\lambda_1}, \qquad \sigma_0 + \frac{3i\pi}{\lambda_1}, \qquad \sigma_2 + \frac{3i\pi}{\lambda_1}$$

виконується нерівність $|g(s)| < |\exp\{s\lambda_1\} - w|/2$. Оскільки $G(s) - w = \exp\{s\lambda_1\} - w + g(s)$, то за теоремою Руше функції $G(s)$ і $\exp\{s\lambda_1\}$ мають однакову кількість w-точок всередині прямокутника R. Але в $\operatorname{int} R$ функція $\exp\{s\lambda_1\}$ має одну w-точку $s = \sigma_1 + \dfrac{2i\pi}{\lambda_1}$. Тому G має в $\operatorname{int} R$ одну w-точку. Подібно можна довести, що в області, обмеженій прямокутником з вершинами

$$\sigma_2 + \frac{3i\pi}{\lambda_1}, \qquad \sigma_0 + \frac{3i\pi}{\lambda_1}, \qquad \sigma_0 + \frac{5i\pi}{\lambda_1}, \qquad \sigma_2 + \frac{5i\pi}{\lambda_1},$$

функція G має також одну w-точку. Отже, G є неоднолистою в Π_0. Першу частину теореми 1 доведено.

Зауважимо, що F не є p-листою функцією для жодного $p \in \mathbb{N}$.

Далі, для будь-якої функції G (5) маємо

$$G'(s) = \lambda_1 \exp\{s\lambda_1\}\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k}{\lambda_1} \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}\right).$$

Тому $G'(s) \neq 0$ для всіх $s \in \Pi_0$ тоді й тільки тоді, коли

$$1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k}{\lambda_1} \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\} \neq 0, \qquad s \in \Pi_0.$$

Якщо виконується умова (6), то для $\sigma < 0$

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k}{\lambda_1} \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}\right| < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k |g_k|}{\lambda_1} \le 1,$$

тобто G є конформною в Π_0. Теорему 1 доведено повністю. ♦

Зауважимо, що, якщо

$$\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k |f_k| \le \lambda_1 |f_1|, \qquad f_1 \neq 0,$$

то функція $F \in D_0$ є конформною в Π_0.

2. Псевдозіркові та псевдоопуклі ряди Діріхле. Конформну в півплощині Π_0 функцію G (5) будемо називати псевдозірковою, якщо

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{G'(s)}{G(s)}\right\} > 0, \qquad s \in \Pi_0,$$

і псевдоопуклою, якщо

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{G''(s)}{G'(s)}\right\} > 0, \qquad s \in \Pi_0.$$

Очевидно, що функція G є псевдоопуклою тоді й тільки тоді, коли функція G' є псевдозірковою. Зауважимо, що функція F (4) є псевдоопуклою тоді й тільки тоді, коли функція G (5), де $g_k = f_k / f_1$, $f_1 \neq 0$, є псевдо опуклою.

Теорема 2. *За умови* (6) *функція* G (5) *є псевдозірковою, а якщо*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k^2 |g_k| \le \lambda_1^2, \tag{7}$$

то вона є псевдоопуклою в Π_0.

Д о в е д е н н я. Оскільки

$$\frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{\lambda_1 \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k g_k \exp\{s\lambda_k\}}{\exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}} =$$

$$= \lambda_1 \left(1 + \frac{\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda_k/\lambda_1 - 1) g_k \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} g_k \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}}\right)$$

і з огляду на (6)

$$\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda_k/\lambda_1 - 1) g_k \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} g_k \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}}\right| \le$$

$$\leq \frac{\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_k/\lambda_1-1)|g_k|\exp\{\sigma(\lambda_k-\lambda_1)\}}{1-\sum_{k=2}^{\infty}|g_k|\exp\{\sigma(\lambda_k-\lambda_1)\}} <$$

$$< \frac{\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_k/\lambda_1-1)|g_k|}{1-\sum_{k=2}^{\infty}|g_k|} \leq 1,$$

то $\operatorname{Re}\left\{\frac{G'(s)}{G(s)}\right\} > 0$ для всіх $s \in \Pi_0$. Першу частину теореми 2 доведено.

Нехай тепер

$$G_1(s) = \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\lambda_1}g_k\exp\{s\lambda_k\}.$$

За умови (7) функція G_1 є псевдозірковою. Оскільки $G'(s)=\lambda_1 G_1(s)$, то функція G' є псевдозірковою і, отже, функція G є псевдоопуклою.

Теорему 2 доведено. ♦

3. Близькі до псевдоопуклих ряди Діріхле. Конформну в Π_0 функцію G (5) будемо називати близькою до псевдоопуклої, якщо існує псевдоопукла в Π_0 функція $\Psi \in SD_0$ така, що

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{G'(s)}{\Psi'(s)}\right\} > 0, \qquad s \in \Pi_0.$$

Виберемо $\Psi(s) = \exp\{s\lambda_1\}$. Тоді за умови (6)

$$\operatorname{Re}\frac{G'(s)}{\Psi'(s)} = 1 + \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{g_k\lambda_k}{\lambda_1}\exp\{s(\lambda_k-\lambda_1)\}\right\} \geq$$

$$\geq 1 - \left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{g_k\lambda_k}{\lambda_1}\exp\{s(\lambda_k-\lambda_1)\}\right| > 1 - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|g_k|\lambda_k}{\lambda_1} \geq 0, \quad s \in \Pi_0.$$

Отже, правильне таке

Твердження 1. *За умови* (6) *функція* G (5) *є близькою до псевдоопуклої.*

З огляду на теорему 2 і твердження 1 виникає таке припущення.

Гіпотеза. *Кожна псевдозіркова функція* $G \in SD_0$ *є близькою до псевдоопуклої.*

Розглянемо тепер випадок, коли коефіцієнти g_k функції G є додатними.

Теорема 3. *Нехай* $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \lambda_1$ *і* $g_k > 0$ *для всіх* $k \geq 2$. *Якщо*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 g_2 \geq \ldots \geq \lambda_k g_k \geq \lambda_{k+1}g_{k+1} \geq \ldots, \tag{8}$$

то функція G (5) *є близькою до псевдоопуклої.*

Д о в е д е н н я. Функція

$$\Psi(s) = \ln\frac{1}{1-e^{s\lambda_1}} = e^{s\lambda_1} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}e^{n\lambda_1 s}$$

належить до класу SD_0 і є псевдоопуклою, оскільки

$$\frac{\Psi''(s)}{\Psi'(s)} = \frac{\lambda_1}{1-e^{s\lambda_1}}$$

і

$$\operatorname{Re}(1-e^{\bar{s}\lambda_1}) \geq 1 - \left|e^{\bar{s}\lambda_1}\right| = 1 - e^{\sigma\lambda_1} > 0, \qquad \sigma < 0.$$

Для такої функції Ψ, враховуючи, що $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \lambda_1$, маємо

$$\frac{G'(s)}{\Psi'(s)} = \frac{\lambda_1 \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k g_k \exp\{s\lambda_k\}}{\lambda_1 \exp\{s\lambda_1\}/(1-\exp\{s\lambda_1\})} =$$

$$= \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k}{\lambda_1} \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}\right)(1-\exp\{s\lambda_1\}) =$$

$$= 1 - \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k}{\lambda_1} \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\} -$$

$$- \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k}{\lambda_1} \exp\{s\lambda_k\} = 1 - \exp\{s\lambda_1\} +$$

$$+ \frac{\lambda_2 g_2}{\lambda_1} \exp\{s\lambda_1\} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k - \lambda_{k+1} g_{k+1}}{\lambda_1} \exp\{s\lambda_k\} =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{\lambda_2 g_2}{\lambda_1}\right) \exp\{s\lambda_1\} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k - \lambda_{k+1} g_{k+1}}{\lambda_1} \exp\{s\lambda_k\}.$$

Оскільки з огляду на (8) $\lambda_1 \ge \lambda_2 g_2$ і $\lambda_k g_k \ge \lambda_{k+1} g_{k+1}$ для всіх $k \ge 2$, то

$$\left|\left(1 - \frac{\lambda_2 g_2}{\lambda_1}\right) \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k - \lambda_{k+1} g_{k+1}}{\lambda_1} \exp\{s\lambda_k\}\right| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{\lambda_2 g_2}{\lambda_1}\right) \exp\{\sigma\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k - \lambda_{k+1} g_{k+1}}{\lambda_1} \exp\{\sigma\lambda_k\} <$$

$$< \left(1 - \frac{\lambda_2 g_2}{\lambda_1}\right) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda_k g_k - \lambda_{k+1} g_{k+1}}{\lambda_1} = 1, \qquad \sigma < 0,$$

і отримуємо нерівність $\operatorname{Re}\left\{\frac{G'(s)}{\Psi'(s)}\right\} > 0$. Теорему 3 доведено. ♦

Теорема 3 є аналогом критерію J. W. Alexander-а для близьких до опуклих функцій в одиничному крузі. Зауважимо також, що в означенні близькості до псевдоопуклості можемо вибрати F замість G і $\Psi \in D_0$.

4. Геометричні інтерпретації. Будемо говорити, що гладка крива $C = \{w = w(t) : -\infty < t < +\infty\}$ має властивість опуклості, якщо дотична до неї повертається у додатному напрямі.

Твердження 2. *Конформна функція* $G \in SD_0$ *є псевдоопуклою в* Π_0 *тоді й тільки тоді, коли кожна крива* $C_0 = \{w = G(\sigma_0 + it) : -\infty < t < +\infty\}$, $-\infty < \sigma_0 < 0$, *має властивість опуклості.*

Д о в е д е н н я. Оскільки пряма $\{s = \sigma_0 + it : -\infty < t < +\infty\}$ утворює кут $\pi/2$ з дійсною віссю, то дотична до кривої $C_0 = \{w = G(\sigma_0 + it) : -\infty < < t < +\infty\}$ утворює кут $\tau = \pi/2 + \arg G'(\sigma_0 + it)$ з дійсною віссю. Звідси випливає, що дотична до C_0 повертається у додатному напрямі тоді й тільки тоді, коли

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d \arg G'(\sigma_0 + it)}{dt} > 0.$$

Але

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{G''(\sigma_0 + it)}{G'(\sigma_0 + it)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{d \ln G'(\sigma_0 + it)}{d(\sigma_0 + it)}\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{d\ln G'(\sigma_0 + it)}{idt}\right\} = \frac{d}{dt}\arg G'(\sigma_0 + it),$$

тобто дотична до C_0 повертається у додатному напрямі тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{Re}\left\{\frac{G''(\sigma_0 + it)}{G'(\sigma_0 + it)}\right\} > 0$. З огляду на довільність σ_0 твердження 2 доведено. ♦

Будемо говорити, що гладка крива $C = \{w = w(t): -\infty < t < +\infty\}$ має властивість зірковості, якщо $\arg w(t)$ зростає на $(-\infty, +\infty)$.

Твердження 3. *Конформна функція* $G \in SD_0$ *є псевдозірковою в* Π_0 *тоді й тільки тоді, коли кожна крива* $C_0 = \{w = G(\sigma_0 + it): -\infty < t < +\infty\}$, $-\infty < \sigma_0 < 0$, *має властивість зірковості.*

Д о в е д е н н я. Крива $C_0 = \{w = G(\sigma_0 + it): -\infty < t < +\infty\}$ має властивість зірковості тоді й тільки тоді, коли $\frac{d\arg G(\sigma_0 + it)}{dt} > 0$. Але, як раніше, маємо

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{G'(\sigma_0 + it)}{G(\sigma_0 + it)}\right\} = \frac{d\arg G(\sigma_0 + it)}{dt},$$

тобто з огляду на довільність σ_0 твердження 3 доведено. ♦

Задача. *Знайти геометричну інтерпретацію близькості до псевдоопуклості.*

5. Властивості розв'язків диференціального рівняння (3). Підставляючи (5) у (3), отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\lambda_k^2 + \gamma_2)\exp\{s\lambda_k\} = -\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_1 g_k \exp\{s(\lambda_k + h)\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_0 g_k \exp\{s(\lambda_k + 2h)\}, \qquad g_1 = 1. \tag{9}$$

Якщо $\lambda_1^2 + \gamma_2 \neq 0$, то

$$(\lambda_1^2 + \gamma_2)\exp\{s\lambda_1\} = -(1 + o(1))\gamma_1 \exp\{s(\lambda_1 + h)\}, \qquad \operatorname{Re} s = \sigma \to -\infty,$$

тобто

$$\lambda_1^2 + \gamma_2 = -(1 + o(1))\gamma_1 \exp\{sh\} \to 0, \qquad \operatorname{Re} s = \sigma \to -\infty,$$

що неможливо. Отже, $\lambda_1^2 + \gamma_2 = 0$, $\gamma_2 < 0$, і $\lambda_1 = \sqrt{-\gamma_2}$. Тоді з нерівності (9) випливає, що

$$\sum_{k=2}^{\infty} g_k(\lambda_k^2 + \gamma_2)\exp\{s\lambda_k\} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_1 g_k \exp\{s(\lambda_k + h)\} - \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_0 g_k \exp\{s(\lambda_k + 2h)\}, \tag{10}$$

і оскільки $\lambda_2^2 + \gamma_2 \neq 0$, то

$$g_2(\lambda_2^2 + \gamma_2)\exp\{s\lambda_2\} = -(1 + o(1))\gamma_1 \exp\{s(\lambda_1 + h)\}, \qquad \operatorname{Re} s = \sigma \to -\infty.$$

Звідси випливає, що $\lambda_2 = \lambda_1 + h$ і $g_2 = -\gamma_1/(\lambda_2^2 + \gamma_2)$. Але з огляду на (10) маємо

$$\sum_{k=3}^{\infty} g_k(\lambda_k^2 + \gamma_2)\exp\{s\lambda_k\} =$$

$$= -\sum_{k=2}^{\infty} \gamma_1 g_k \exp\{s(\lambda_k + h)\} - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_0 g_k \exp\{s(\lambda_k + 2h)\}. \quad (11)$$

Звідси випливає, що

$$g_3(\lambda_3^2 + \gamma_2)\exp\{s\lambda_3\} = -(1+o(1))\gamma_1 g_2 \exp\{s(\lambda_1 + 2h)\} -$$
$$- \gamma_0 \exp\{s(\lambda_1 + 2h)\} = -(1+o(1))(\gamma_1 g_2 + \gamma_0)\exp\{s(\lambda_1 + 2h)\}$$

при $\operatorname{Re} s = \sigma \to -\infty$, тобто

$$\lambda_3 = \lambda_1 + 2h, \qquad g_3 = -\frac{\gamma_1 g_2}{\lambda_3^2 + \gamma_2} - \frac{\gamma_0}{\lambda_3^2 + \gamma_2}.$$

Тому з (11) отримуємо

$$\sum_{k=4}^{\infty} g_k(\lambda_k^2 + \gamma_2)\exp\{s\lambda_k\} =$$
$$= -\sum_{k=3}^{\infty} \gamma_1 g_k \exp\{s(\lambda_k + h)\} - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_0 g_k \exp\{s(\lambda_k + 2h)\},$$

звідки, як раніше, одержуємо

$$\lambda_4 = \lambda_3 + h, \qquad g_4 = -\frac{\gamma_1 g_3}{\lambda_4^2 + \gamma_2} - \frac{\gamma_0 g_2}{\lambda_4^2 + \gamma_2}.$$

Продовжуючи цей процес, прийдемо до формул

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + h, \qquad g_k = -\frac{\gamma_1 g_{k-1}}{\lambda_k^2 + \gamma_2} - \frac{\gamma_0 g_{k-2}}{\lambda_k^2 + \gamma_2}, \qquad k \ge 3. \quad (12)$$

Отже, доведено таке твердження.

Лема 1. *Нехай* $h > 0$, $\gamma_0 \ne 0$, $\gamma_1 \ne 0$ *і* $\gamma_2 < 0$. *Тоді диференціальне рівняння* (3) *має розв'язок*

$$G(s) = \exp\{s\sqrt{|\gamma_2|}\} + \sum_{k=2}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}, \qquad \lambda_k = \sqrt{|\gamma_2|} + (k-1)h, \quad (13)$$

де $g_2 = -\gamma_1/(\lambda_2^2 + \gamma_2)$ *і для всіх* $k \ge 3$ *коефіцієнти* g_k *визначаються рекурентною формулою* (12).

Використовуючи теорему 2 і формули (12), доведемо таку теорему.

Теорема 4. *Нехай* $\gamma_0 \ne 0$, $\gamma_1 \ne 0$, $h > 0$ *і* $\gamma_2 < 0$. *Тоді диференціальне рівняння* (3) *має розв'язок* (13) *такий, що*:

(***i***) *якщо*

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma_2|}}\left(\frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)|\gamma_1|}{2h\sqrt{|\gamma_2|} + h^2} + \frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + 2h)|\gamma_0|}{4h\sqrt{|\gamma_2|} + 4h^2}\right) +$$
$$+ \frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + 2h)|\gamma_1|}{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)(4h\sqrt{|\gamma_2|} + 4h^2)} + \frac{|\gamma_0|(\sqrt{|\gamma_2|} + 3h)}{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)(6h\sqrt{|\gamma_2|} + 9h^2)} \le 1, \quad (14)$$

то функція G *є псевдозірковою і близькою до псевдоопуклої в* Π_0;

(***ii***) *якщо*

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma_2|}}\left(\frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)^2|\gamma_1|}{2h\sqrt{|\gamma_2|} + h^2} + \frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + 2h)^2|\gamma_0|}{4h\sqrt{|\gamma_2|} + 4h^2}\right) +$$
$$+ \frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + 2h)^2|\gamma_1|}{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)^2(4h\sqrt{|\gamma_2|} + 4h^2)} + \frac{|\gamma_0|(\sqrt{|\gamma_2|} + 3h)^2}{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)^2(6h\sqrt{|\gamma_2|} + 9h^2)} \le 1, \quad (15)$$

то функція G *є псевдоопуклою в* Π_0;

(***iii***) *ряд Діріхле* (13) *є цілим і*

$$\ln M(\sigma, G) = (1 + o(1))\frac{\sqrt{|\gamma_0|}}{h}e^{h\sigma}, \qquad \sigma \to +\infty, \tag{16}$$

де $M(\sigma, G) = \sup\{|G(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$.

Д о в е д е н н я. З огляду на (12) маємо

$$\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k|g_k| = \lambda_2|g_2| + \sum_{k=3}^{\infty}\lambda_k|g_k| \le \lambda_2|g_2| + \sum_{k=3}^{\infty}\lambda_k\left(\frac{|\gamma_1||g_{k-1}|}{\lambda_k^2 + \gamma_2} + \frac{|\gamma_0||g_{k-2}|}{\lambda_k^2 + \gamma_2}\right) =$$

$$= \lambda_2|g_2| + \sum_{k=2}^{\infty}\lambda_{k+1}\frac{|\gamma_1||g_k|}{\lambda_{k+1}^2 + \gamma_2} + \sum_{k=2}^{\infty}\lambda_{k+2}\frac{|\gamma_0||g_k|}{\lambda_{k+1}^2 + \gamma_2} +$$

$$+ \lambda_3\frac{|\gamma_0||g_1|}{\lambda_3^2 + \gamma_2} = \lambda_2|g_2| + \lambda_3\frac{|\gamma_0||g_1|}{\lambda_3^2 + \gamma_2} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda_{k+1}|\gamma_1|}{\lambda_k(\lambda_{k+1}^2 + \gamma_2)}\lambda_k|g_k| + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|\gamma_0|\lambda_{k+2}}{\lambda_k(\lambda_{k+2}^2 + \gamma_2)}\lambda_k|g_k|,$$

тобто

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_{k+1}|\gamma_1|}{\lambda_k(\lambda_{k+1}^2 + \gamma_2)} - \frac{|\gamma_0|\lambda_{k+2}}{\lambda_k(\lambda_{k+2}^2 + \gamma_2)}\right)\lambda_k|g_k| \le \lambda_2|g_2| + \lambda_3\frac{|\gamma_0||g_1|}{\lambda_3^2 + \gamma_2}.$$

Послідовності $\left(\frac{\lambda_{k+1}|\gamma_1|}{\lambda_k(\lambda_{k+1}^2 + \gamma_2)}\right)_{k=2}^{\infty}$ і $\left(\frac{|\gamma_0|\lambda_{k+2}}{\lambda_k(\lambda_{k+2}^2 + \gamma_2)}\right)_{k=2}^{\infty}$ є спадними. Тому звідси випливає, що

$$\left(1 - \frac{\lambda_3|\gamma_1|}{\lambda_2(\lambda_3^2 + \gamma_2)} - \frac{|\gamma_0|\lambda_4}{\lambda_2(\lambda_4^2 + \gamma_2)}\right)\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k|g_k| \le \lambda_2|g_2| + \lambda_3\frac{|\gamma_0||g_1|}{\lambda_3^2 + \gamma_2}. \tag{17}$$

Оскільки $\lambda_k = \sqrt{|\gamma_2|} + (k-1)h$, $g_1 = 1$, $|g_2| = |\gamma_1|\frac{1}{\lambda_2^2 + \gamma_2}$, то з (14) випливає, що

$$1 - \frac{\lambda_3|\gamma_1|}{\lambda_2(\lambda_3^2 + \gamma_2)} - \frac{|\gamma_0|\lambda_4}{\lambda_2(\lambda_4^2 + \gamma_2)} > 0,$$

і отже, з (17), використовуючи (14), отримуємо

$$\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k|g_k| \le \frac{\lambda_2\frac{|\gamma_1|}{\lambda_2^2 + \gamma_2} + \lambda_3\frac{|\gamma_0||g_1|}{\lambda_3^2 + \gamma_2}}{1 - \frac{\lambda_3|\gamma_1|}{\lambda_2(\lambda_3^2 + \gamma_2)} - \frac{|\gamma_0|\lambda_4}{\lambda_2(\lambda_4^2 + \gamma_2)}} =$$

$$= \frac{\frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)|\gamma_1|}{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)^2 + \gamma_2} + \frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + 2h)|\gamma_0|}{(\sqrt{|\gamma_2|} + 2h)^2 + \gamma_2}}{1 - \frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + 2h)|\gamma_1|}{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)((\sqrt{|\gamma_2|} + 2h)^2 + \gamma_2)} - \frac{|\gamma_0|(\sqrt{|\gamma_2|} + 3h)}{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)((\sqrt{|\gamma_2|} + 3h)^2 + \gamma_2)}} =$$

$$= \frac{\frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)|\gamma_1|}{2h\sqrt{|\gamma_2|} + h^2} + \frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + 2h)|\gamma_0|}{4h\sqrt{|\gamma_2|} + 4h^2}}{1 - \frac{(\sqrt{|\gamma_2|} + 2h)|\gamma_1|}{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)(4h\sqrt{|\gamma_2|} + 4h^2)} - \frac{|\gamma_0|(\sqrt{|\gamma_2|} + 3h)}{(\sqrt{|\gamma_2|} + h)(6h\sqrt{|\gamma_2|} + 9h^2)}} \le$$

$$\le \sqrt{|\gamma_2|} = \lambda_1,$$

тобто згідно з теоремою 2 і твердженням 1 функція G є псевдозірковою і близькою до псевдоопуклої в Π_0.

Подібно маємо

$$\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k^2\,|g_k| = \lambda_2^2\,|g_2| + \sum_{k=3}^{\infty}\lambda_k^2\,|g_k| \le \lambda_2^2\,|g_2| +$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\lambda_k^2\left(\frac{|\gamma_1||g_{k-1}|}{\lambda_k^2+\gamma_2}+\frac{|\gamma_0||g_{k-2}|}{\lambda_k^2+\gamma_2}\right) = \lambda_2^2\,|g_2| + \lambda_3^2\,\frac{|\gamma_0||g_1|}{\lambda_3^2+\gamma_2} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda_{k+1}^2\,|\gamma_1|}{\lambda_k^2(\lambda_{k+1}^2+\gamma_2)}\lambda_k^2\,|g_k| + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|\gamma_0|\,\lambda_{k+2}^2}{\lambda_k^2(\lambda_{k+2}^2+\gamma_2)}\lambda_k^2\,|g_k|,$$

звідки, як раніше, одержуємо

$$\left(1-\frac{\lambda_3^2\,|\gamma_1|}{\lambda_2^2(\lambda_3^2+\gamma_2)}-\frac{|\gamma_0|\,\lambda_4^2}{\lambda_2^2(\lambda_4^2+\gamma_2)}\right)\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k^2\,|g_k| \le \lambda_2^2\,|g_2| + \lambda_3^2\,\frac{|\gamma_0||g_1|}{\lambda_3^2+\gamma_2}.$$

Тому, використовуючи умову (15), отримуємо

$$\sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k^2\,|g_k| \le \frac{\lambda_2^2\,\dfrac{|\gamma_1|}{\lambda_2^2+\gamma_2}+\lambda_3^2\,\dfrac{|\gamma_0||g_1|}{\lambda_3^2+\gamma_2}}{1-\dfrac{\lambda_3^2\,|\gamma_1|}{\lambda_2^2(\lambda_3^2+\gamma_2)}-\dfrac{|\gamma_0|\,\lambda_4^2}{\lambda_2^2(\lambda_4^2+\gamma_2)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{(\sqrt{|\gamma_2|}+h)^2\,|\gamma_1|}{2h\sqrt{|\gamma_2|}+h^2}+\dfrac{(\sqrt{|\gamma_2|}+2h)^2\,|\gamma_0|}{4h\sqrt{|\gamma_2|}+4h^2}}{1-\dfrac{(\sqrt{|\gamma_2|}+2h)^2\,|\gamma_1|}{(\sqrt{|\gamma_2|}+h)^2(4h\sqrt{|\gamma_2|}+4h^2)}-\dfrac{|\gamma_0|(\sqrt{|\gamma_2|}+3h)^2}{(\sqrt{|\gamma_2|}+h)^2(6h\sqrt{|\gamma_2|}+9h^2)}} \le$$

$$\le |\gamma_2| = \lambda_1^2,$$

тобто згідно з теоремою 2 функція G є псевдоопуклою в Π_0.

Нарешті, оскільки для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$ існує $k_0 = k_0(\sigma) \ge 3$ таке, що

$$\frac{|\gamma_1|}{\lambda_{k+1}^2+\gamma_2}e^{h\sigma}+\frac{|\gamma_0|}{\lambda_{k+2}^2+\gamma_2}e^{2h\sigma} \le \frac{1}{2}, \qquad k \ge k_0,$$

то, як раніше, маємо

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}|g_k|\exp\{\sigma\lambda_k\} \le \sum_{k=k_0-1}^{\infty}\frac{|\gamma_1||g_k|}{\lambda_{k+1}^2+\gamma_2}\exp\{\sigma\lambda_k\}\exp\{\sigma(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\} +$$

$$+\sum_{k=k_0-2}^{\infty}\frac{|\gamma_0||g_k|}{\lambda_{k+2}^2+\gamma_2}\exp\{\sigma\lambda_k\}\exp\{\sigma(\lambda_{k+2}-\lambda_k)\} =$$

$$=\frac{|\gamma_1||g_{k_0-1}|\exp\{\sigma\lambda_{k_0}\}}{\lambda_{k_0}^2+\gamma_2}+\frac{|\gamma_0||g_{k_0-2}|\exp\{\sigma\lambda_{k_0}\}}{\lambda_{k_0}^2+\gamma_2}+$$

$$+\frac{|\gamma_0||g_{k_0-1}|\exp\{\sigma\lambda_{k_0+1}\}}{\lambda_{k_0+1}^2+\gamma_2}+$$

$$+\sum_{k=k_0}^{\infty}\left(\frac{|\gamma_1|}{\lambda_{k+1}^2+\gamma_2}e^{h\sigma}+\frac{|\gamma_0|}{\lambda_{k+2}^2+\gamma_2}e^{2h\sigma}\right)|g_k|\exp\{\sigma\lambda_k\} \le$$

$$\le\frac{|\gamma_1||g_{k_0-1}|\exp\{\sigma\lambda_{k_0}\}}{\lambda_{k_0}^2+\gamma_2}+\frac{|\gamma_0||g_{k_0-2}|\exp\{\sigma\lambda_{k_0}\}}{\lambda_{k_0}^2+\gamma_2}+$$

$$+\frac{|\gamma_0||g_{k_0-1}|\exp\{\sigma\lambda_{k_0+1}\}}{\lambda_{k_0+1}^2+\gamma_2}+\frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{\infty}|g_k|\exp\{\sigma\lambda_k\}.$$

Звідси випливає, що $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}|g_k|\exp\{\sigma\lambda_k\}<+\infty$ для всіх $\sigma\in\mathbb{R}$, тобто ряд Діріхле (13) є цілим.

Для вивчення зростання ряду (13) використаємо метод Вімана – Валірона. Нехай $\mu(\sigma,G)=\max\{|g_k|\exp\{\sigma\lambda_k\}:k\ge 1\}$ – максимальний член ряду Діріхле (5) і $\nu(\sigma,G)=\max\{k:|g_k|\exp\{\sigma\lambda_k\}=\mu(\sigma,G)\}$ – його центральний індекс. Припустимо, що показники ряду (5) задовольняють умову $\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln n(t)dt}{t^2}<+\infty$, де $n(t)=\sum\limits_{0<\lambda_n\le t}1$, і приймемо $\eta(x)=\int\limits_x^{\infty}\frac{\ln n(t)dt}{t^2}$, $\ell(x)=$ $=\frac{1}{\eta(x)}\ln^{-2}\frac{1}{\eta(x)}$ і $k(x)=\frac{x}{\sqrt{\ell(x)}}$. Тоді [11] для кожного $m\in\mathbb{N}$ і всіх s, $\operatorname{Re}s=\tau$, $|\tau-\sigma|<\frac{1}{30\,k(\lambda_\nu)}$,

$$G^{(m)}(s)=\lambda_\nu^m\big(G(s)+o(M(\tau,G))\big),\qquad \nu=\nu(\sigma,G), \tag{18}$$

при $0\le\sigma\to+\infty$ зовні деякої множини $E\subset[0,+\infty)$ скінченної міри, а E міститься в об'єднанні проміжків $[R_\nu+\tau_{\nu-1},R_\nu+\tau_\nu)$ і $\tau_\nu-\tau_{\nu-1}\to 0$ при $\nu\to\infty$.

Нехай $\delta(\sigma)$ – довільна додатна на $[0,+\infty)$ функція, яка прямує до нуля при $\sigma\to+\infty$, а $\Delta(\sigma)=\{s:\operatorname{Re}s=\sigma,|G(s)|\ge(1-\delta(\sigma))M(\sigma,G)\}$. Тоді, вибираючи $\tau=\sigma$, з (18) отримуємо

$$G^{(m)}(s)=\lambda_\nu^m G(s)(1+\varepsilon(\sigma)),\qquad s\in\Delta(\sigma), \tag{19}$$

де $\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to+\infty$, $\sigma\notin E$.

Припустимо тепер, що ряд Діріхле (13) задовольняє (3). Підставляючи (19) в (3), отримуємо $\lambda_\nu^2=|\gamma_0|e^{2h\sigma}(1+\varepsilon_1(\sigma))$, де $\varepsilon_1(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to+\infty$, $\sigma\notin E$. Тому

$$\lambda_{\nu(\sigma,G)}=(1+o(1))\sqrt{|\gamma_0|}e^{h\sigma},\qquad \sigma\to+\infty,\qquad \sigma\notin E. \tag{20}$$

Якщо $\sigma\in E$, тобто $\sigma_{\nu-1}=R_\nu+\tau_{\nu-1}\le\sigma<\sigma_\nu=R_\nu+\tau_\nu$ для деякого ν, то $\sigma_\nu-\sigma_{\nu-1}\to 0$, і отже, $e^{h\sigma_{\nu-1}}=(1+o(1))e^{h\sigma}=(1+o(1))e^{h\sigma_\nu}$ при $\nu\to\infty$. Тому

$$(1+o(1))\sqrt{|\gamma_0|}e^{h\sigma}=(1+o(1))\sqrt{|\gamma_0|}\,e^{h\sigma_{\nu-1}}=\lambda_{\nu(\sigma_{\nu-1},F)}\le\lambda_{\nu(\sigma,G)}\le\lambda_{\nu(\sigma_\nu,G)}=$$

$$=(1+o(1))\sqrt{|\gamma_0|}\,e^{h\sigma_\nu}=(1+o(1))\sqrt{|\gamma_0|}\,e^{h\sigma},\qquad \sigma\to+\infty,$$

тобто (20) виконується при $\sigma\to+\infty$. Але [2, с. 182]

$$\ln\mu(\sigma,G)=\ln\mu(0,G)+\int\limits_0^{\sigma}\lambda_{\nu(t,G)}\,dt.$$

Тому $\ln\mu(\sigma,G)=(1+o(1))\frac{\sqrt{|\gamma_0|}}{h}e^{h\sigma}$ при $\sigma\to+\infty$, і оскільки $\ln\lambda_n\sim\ln n$ при $n\to\infty$, то [10, 12] $\ln M(\sigma,G)=(1+o(1))\ln\mu(\sigma,G)$ при $\sigma\to+\infty$, тобто виконується рівність (16). Теорему 4 повністю доведено. ♦

З використанням теореми 4 доведемо таке

Твердження 4. *Нехай* $\gamma_0<0$, $\gamma_1<0$, $\gamma_2<0$, $h>0$,

$$|\gamma_1|\le\frac{2\sqrt{|\gamma_2|}+h}{\sqrt{|\gamma_2|}+h}h\sqrt{|\gamma_2|} \tag{21}$$

і

$$|\gamma_0| \le \left(\frac{4h(\sqrt{|\gamma_2|}+h)^2}{\sqrt{|\gamma_2|}+2h} - |\gamma_1| \right) \frac{|\gamma_1|}{h(2\sqrt{|\gamma_2|}+h)} . \tag{22}$$

Тоді цілий розв'язок (13) *диференціального рівняння* (3) *є близьким до псевдоопуклого в* Π_0 *рядом Діріхле.*

Д о в е д е н н я. Справді, оскільки $\gamma_0 < 0$ і $\gamma_1 < 0$, то з огляду на (12) маємо

$$\lambda_1 = \sqrt{|\gamma_2|}, \qquad \lambda_{k+1} = \lambda_k + h ,$$

$$g_2 = \frac{|\gamma_1|}{\lambda_2^2+\gamma_2}, \qquad g_k = \frac{|\gamma_1|\, g_{k-1}}{\lambda_k^2+\gamma_2} + \frac{|\gamma_0|\, g_{k-2}}{\lambda_k^2+\gamma_2}, \qquad k \ge 3 ,$$

тобто всі $g_k > 0$. Умова (21) рівносильна умові $|\gamma_1| \le \lambda_1(\lambda_2^2+\gamma_2)/\lambda_2$, тобто $\lambda_2 g_2 \le \lambda_1$. Звідси випливає, що $|\gamma_1| < \lambda_2(\lambda_3^2+\gamma_2)/\lambda_3$, тобто $|\gamma_1| < 4h(\sqrt{|\gamma_2|} + {}$ $+ h)^2/(\sqrt{|\gamma_2|}+2h)$. Умова (22) рівносильна умові $|\gamma_0| \le (\lambda_2(\lambda_3^2+\gamma_2)/\lambda_3 - |\gamma_1|)g_2$, звідки $\lambda_3 g_3 \le \lambda_2 g_2$. Припустимо тепер, що $\lambda_1 \ge \lambda_2 g_2 \ge \ldots \ge \lambda_k g_k$ для $k \ge 3$, і зауважимо, що нерівність $\lambda_k g_k \ge \lambda_{k+1} g_{k+1}$ рівносильна нерівності

$$\frac{\lambda_{k+1} g_{k+1}}{\lambda_k g_k} = \frac{\dfrac{\lambda_{k+1}|\gamma_1|}{\lambda_k(\lambda_{k+1}^2+\gamma_2)}\lambda_k g_k + \dfrac{\lambda_{k+1}|\gamma_0|}{\lambda_{k-1}(\lambda_{k+1}^2+\gamma_2)}\lambda_{k-1} g_{k-1}}{\dfrac{\lambda_k|\gamma_1|}{\lambda_{k-1}(\lambda_k^2+\gamma_2)}\lambda_{k-1} g_{k-1} + \dfrac{\lambda_k|\gamma_0|}{\lambda_{k-2}(\lambda_k^2+\gamma_2)}\lambda_{k-2} g_{k-2}} \le 1 .$$

Ця нерівність випливає зі спадання послідовностей

$$\left(\frac{\lambda_k|\gamma_1|}{\lambda_{k-1}(\lambda_k^2+\gamma_2)} \right)_{k=2}^{\infty} \qquad \text{і} \qquad \left(\frac{\lambda_k|\gamma_0|}{\lambda_{k-2}(\lambda_k^2+\gamma_2)} \right)_{k=2}^{\infty} .$$

Отже, умова (8) виконується і твердження 4 доведено. ♦

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – Москва: Наука, 1976. – 536 с.
3. *Магола Я. С., Шеремета М. М.* Про властивості цілих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 4. – С. 62–74.
   Те саме: *Mahola Ya. S., Sheremeta M. M.* On properties of entire solutions of linear differential equations with polynomial coefficients // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 3. – P. 366–382. – https://doi.org/10.1007/s10958-012-0691-9.
4. *Магола Я., Шеремета М.* Близькість до опуклості цілого розв'язку одного лінійного диференціального рівняння з поліноміальними коефіцієнтами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 70. – С. 122–127.
5. *Шеремета З. М.* Близькість до опуклості цілого розв'язку одного диференціального рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 3. – С. 31–35.
6. *Шеремета З. М.* О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 8. – С. 1045–1050.
   Те саме: *Sheremeta Z. M.* The properties of entire solutions of one differential equation // Differ. Equat. – 2000. – **36**, No. 8. – P. 1155–1161. https://doi.org/10.1007/BF02754183.
7. *Шеремета З. М., Шеремета М. М.* Опуклість цілих розв'язків одного диференціального рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 2. – С. 186–191.
8. *Шеремета З. М., Шеремета М. Н.* Близость к выпуклости целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 4. – С. 477–481.

Те саме: *Sheremeta Z. M., Sheremeta M. N.* Closeness to convexity for entire solutions of a differential equation // Differ. Equat. – 2002. – **38**, No. 4. – P. 496–501. – https://doi.org/10.1023/A:1016355531151.

9. *Шеремета З.* Про близькість до опуклості цілих розв'язків одного диференціального рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 54–56.
10. *Шеремета М. Н.* О полной эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 6. – С. 119–123.
    Те саме: *Sheremeta M. N.* Full equivalence of the logarithms of the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series // Math. Notes. – 1990. – **47**, No. 6. – P. 608–611. – https://doi.org/10.1007/BF01170894.
11. *Шеремета М. Н.* О производной целого ряда Дирихле // Мат. сб. – 1988. – **137**(**179**). – № 1(9). – С. 128–139.
    Те саме: *Sheremeta M. N.* On the derivative of an entire Dirichlet series // Math. USSR-Sb. – 1990. – **65**, No. 1. – P. 133–145.
12. *Шеремета М. Н.* О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 5. – С. 141–148.
    Те саме: *Sheremeta M. N.* A relation between the maximal term and maximum of the modulus of the entire Dirichlet series // Math. Notes. – 1992. – **51**, No. 5. – P. 522–526. – https://doi.org/10.1007/BF01262189.
13. *Alexander J. W.* Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions // Ann. Math. – 1915. – **17**, No. 1. – P. 12–22.
14. *Cho N. E., Kwon O. S., Ravichandran V.* Coefficient, distortion and growth inequalities for certain close-to-convex functions // J. Inequal. Appl. – 2011. –**2011**. – P. 100–106. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2011-100.
15. *Goodman A. W.* Univalent functions. – Vol. II. – Tampa: Mariner Publ. Co., 1983. – xii+311 p. – https://zbmath.org/1041.30501?
16. *Goodman A. W.* Univalent functions and nonanalytic curves // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – **8**. – P. 598–601. – https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1957-0086879-9.
17. *Juneja O. P., Reddy T. R.* Meromorphic starlike univalent functions with positive coefficients // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect. A: Math. – 1985. – **39**. – P. 65–76.
18. *Kaplan W.* Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math. J. – 1952. – **1**, No. 2. – P. 169–185. – https://doi.org/10.1307/mmj/1028988895.
19. *Kowalczyk J., Leś-Bomba E.* On a subclass of close-to-convex functions // Appl. Math. Lett. – 2010. – **23**, No. 10. – P. 1147–1151.
    – https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.03.004.
20. *Mahola Ya. S., Sheremeta M. M.* Properties of entire solutions of a linear differential equation of n-th order with polynomial coefficients of n-th degree // Мат. студії. – 2008. – **30**, № 2. – С. 153–162.
21. *Mogra M. L.* Hadamard product of certain meromorphic univalent functions // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – **157**, No. 1. – P. 10–16.
    – https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90133-K.
22. *Mogra M. L., Reddy T. R, Juneja O. P.* Meromorphic univalent functions with positive coefficients // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – **32**, No. 2. – P. 161–176.
    – https://doi.org/10.1017/S0004972700009874.
23. *Owa S., Pascu N. N.* Coefficient inequalities for certain classes of meromorphically starlike and meromorphically convex functions // J. Inequal. Pure Appl. Math. – 2003. – **4**, No. 1. – Art. 17. – http://jipam.vu.edu.au.
24. *Şeker B.* On certain new subclass of close-to-convex functions // Appl. Math. Comput. – 2011. – **218**, No. 3. – P. 1041–1045.
25. *Shah S. M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation. II // J. Math. Anal. Appl. – 1989. – **142**, No. 2. – P. 422–430. – https://doi.org/10.1016/0022-247X(89)90011-5.
26. *Sheremeta Z. M.* On entire solutions of a differential equation // Мат. студії. – 2000. – **14**, No. 1. – P. 54–58. – https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.03.018.
27. *Tang Huo, Deng Guan-Tie, Li Shu-Hai.* On a certain new subclass of meromorphic close-to-convex functions // J. Inequal. Appl. – 2013. – **2013**. – P. 164–169.
    – https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-164.
28. *Uralegaddi B. A.* Meromorphically starlike functions with positive and fixed second coefficients // Kyungpook Math. J. – 1989. – **29**, No. 1. – P. 64–68.

29. *Wang Z., Gao C., Yuan S.* On certain subclass of close-to-convex functions // Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. – 2006. – **22**, No. 2. – P. 171–177.
30. *Wang Z.-G., Sun Y., Xu N.* Some properties of certain meromorphic close-to-convex functions // Appl. Math. Lett. – 2012. – **25**, No. 3. – P. 454–460. – https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.09.035.

ПСЕВДОЗВЕЗДНЫЕ, ПСЕВДОВЫПУКЛЫЕ И БЛИЗКИЕ К ПСЕВДОВЫПУКЛЫМ РЯДЫ ДИРИХЛЕ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для рядов Дирихле с нулевой абсциссой абсолютной сходимости введены понятия псевдозвездности, псевдовыпуклости и близости к псевдовыпуклости. Полученные результаты применены к изучению свойств решений дифференциальных уравнений с экспоненциальными коэффициентами.

Ключевые слова: *ряды Дирихле, псевдозвездность, псевдовыпуклость, близость к псевдовыпуклости, дифференциальное уравнение.*

PSEUDOSTARLIKE, PSEUDOCONVEX AND CLOSE-TO-PSEUDOCONVEX DIRICHLET SERIES SATISFYING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH EXPONENTIAL COEFFICIENTS

The concepts of pseudostarlikeness, pseudoconvexity and close-to-pseudoconvexity are introduced for Dirichlet series with null abscissa of absolute convergence. Properties of the solutions of differential equations with exponential coefficients are studied with the help of the obtained results.

Key words: *Dirichlet series, pseudostarlikeness, pseudoconvexity, close-to-pseudoconvexity, differential equation.*

[1] Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів,
[2] Київ. нац. ун-т харч. технологій, Київ

Одержано
02.09.17