

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПРОСТОРУ ЗІ СФЕРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ ЗА УМОВ КОНВЕКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ

Знайдено розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для термочутливого простору зі сферичною порожниною, який обмінюється теплом шляхом конвективно-променевого теплообміну з середовищем постійної температури. Проаналізовано вплив термочутливості матеріалу простору на величину та характер розподілу температури, зумовлених нею напружень і переміщень у випадках наявності й відсутності силових навантажень.

На сучасному етапі розвитку науки дослідженню температурних напружень приділяється все більше уваги, що пояснюється практичною необхідністю розрахунків на термоміцність елементів конструкцій у будівництві, теплоенергетиці та інших галузях техніки, де питання міцності, пов'язані з дією температури, можуть мати вирішальне значення. Особливо актуальними є такі розрахунки на основі математичних моделей, що враховують температурну залежність теплових і механічних характеристик матеріалу, оскільки вони суттєво підвищують їх точність. Огляди та аналізи методів розв'язування задач теплопровідності та термопружності наведено, наприклад, у [1, 2, 3, 4, 7, 9].

У роботі [8] визначено температурне поле і спричинений ним напружено-деформований стан термочутливого простору зі сферичною порожниною у випадку конвективного теплообміну через поверхню порожнини, а також проаналізовано вплив термочутливості матеріалу простору на розподіли температури, напружень і переміщень при відсутності навантажень на поверхні порожнини.

Тут побудовано розв'язок аналогічної задачі теплопровідності за умов складного теплообміну через поверхню порожнини з використанням аналітико-числової методики [6] та визначено його термопружний стан. Проведено порівняння отриманих значень температури з її значеннями, знайденими числовим методом, у випадках конвективного, променевого та конвективно-променевого теплообмінів. Досліджено вплив термочутливості матеріалу на величину та характер розподілу температури і компонент зумовленого нею напружено-деформованого стану при наявності та відсутності силових навантажень на поверхні порожнини.

Постановка задачі. Розглянемо задачу про визначення нестационарного температурного поля t та зумовленого ним напружено-деформованого стану простору зі сферичною порожниною, термомеханічні характеристики матеріалу якого є функціями температури. Нехай такий простір має початкову сталу температуру t_p і, починаючи з часу $\tau = 0$, через поверхню $r = r_1$ обмінюється теплом із середовищем сталої температури t_r , яке заповнює порожнину, шляхом променево-конвективного теплообміну. Крайова задача для визначення температурного поля має вигляд

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) = c_v(t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$$\left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial r} - \alpha(t - t_r) - \sigma \varepsilon (t^4 - t_r^4) \right] \Big|_{r=r_1} = 0, \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} t = t_p, \quad (3)$$

$$t|_{\tau=0} = t_p, \quad (4)$$

де α – коефіцієнт теплообміну через поверхню $r = r_1$; $c_v(t)$, $\lambda_t(t)$ – залежні від температури об'ємна теплоємність і коефіцієнт теплопровідності матеріалу простору; σ – постійна Стефана – Больцмана; ε – ступінь чорноти.

Методика розв'язування задачі теплопровідності. Виберемо за відлікову температуру деяке її значення t_0 , а за характерний розмір – радіус

порожнини r_1 . Введемо безрозмірні температуру $T = \frac{t}{t_0}$ і координату $\rho = \frac{r}{r_1}$

та подамо характеристики матеріалу простору у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де величини з індексом «0» мають відповідні розмірності, а величини з індексом «*» є функціями від безрозмірної температури, причому $\chi(t_p) = \chi_0$, а,

отже, $\chi^*(T_p) = 1$, де $T_p = \frac{t_p}{t_0}$. Тоді задача (1)–(4) набуде вигляду

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = c_v^*(T) \frac{\partial T}{\partial \text{Fo}}, \quad (5)$$

$$\left[\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} - \text{Bi}(T - T_r) - \text{Sk}(T^4 - T_r^4) \right] \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} T = T_p, \quad (7)$$

$$T \Big|_{\text{Fo}=0} = T_p. \quad (8)$$

Тут $\text{Bi} = \frac{\alpha r_1}{\lambda_{t0}}$ – критерій Біо; $\text{Sk} = \frac{\sigma \varepsilon t_0^3 r_1}{\lambda_{t0}}$ – критерій Старка; $\text{Fo} = \frac{a_0 \tau}{r_1^2}$ –

число Фур'є, $a_0 = \frac{\lambda_{t0}}{c_{v0}}$; $T_r = \frac{t_r}{t_0}$.

До задачі (5)–(8) застосуємо перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(T) dT, \quad (9)$$

в результаті чого отримаємо крайову задачу на змінну θ :

$$\frac{\partial^2(\theta \rho)}{\partial \rho^2} = \frac{1}{a^*(\theta)} \frac{\partial(\theta \rho)}{\partial \text{Fo}}, \quad (10)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \text{Bi}(T(\theta) - T_r) - \text{Sk}(T^4(\theta) - T_r^4) \right] \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (11)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \theta = 0, \quad (12)$$

$$\theta \Big|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (13)$$

де $T(\theta)$ – вираз температури через змінну Кірхгофа, який для конкретної температурної залежності коефіцієнта теплопровідності знаходиться з інтегрального рівняння (9).

Для знаходження розв'язку нелінійної задачі (10)–(13) застосуємо метод послідовних наближень. За m -те, $m = 1, 2, \dots$, наближення розв'язку задачі візьмемо аналітичний розв'язок такої лінійної задачі:

$$\frac{\partial^2(\theta_m \rho)}{\partial \rho^2} = \frac{\partial(\theta_m \rho)}{\partial \text{Fo}_m}, \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial \theta_m}{\partial \rho} - \text{Bi}_m(\theta_m - \theta_r) \right] \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (15)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \theta_m = 0, \quad (16)$$

$$\theta_m \Big|_{\text{Fo}_m=0} = 0, \quad (17)$$

де

$$\text{Bi}_1 = \text{Bi}, \quad \text{Fo}_1 = \text{Fo},$$

$$\text{Bi}_m = [\theta_{m-1}(\text{Fo}^*, 1) - \theta_r]^{-1} \{ \text{Bi}[T(\theta_{m-1}(\text{Fo}^*, 1)) - T_r] + \text{Sk}[T^4(\theta_{m-1}(\text{Fo}^*, 1)) - T_r^4] \},$$

$$\theta_r = \int_{T_p}^{T_r} \lambda_t^*(T) dT, \quad \text{Fo}_m = a^*(\theta_{m-1}(\text{Fo}^*, 1)) \text{Fo}, \quad m \geq 2,$$

Fo^* – момент часу, для якого обчислюємо значення температури.

Розв'язок цієї задачі, знайдений за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за змінною Fo_m , має вигляд

$$\theta_m = \frac{\text{Bi}_m \theta_r}{(1 + \text{Bi}_m) \rho} \left[\text{erfc} \frac{\rho - 1}{2\sqrt{\text{Fo}_m}} - e^{(1 + \text{Bi}_m)(\rho - 1 + (1 + \text{Bi}_m) \text{Fo}_m)} \text{erfc} \left((1 + \text{Bi}_m) \sqrt{\text{Fo}_m} + \frac{\rho - 1}{2\sqrt{\text{Fo}_m}} \right) \right], \quad (18)$$

де $\text{erfc} \xi = 1 - \text{erf} \xi$; $\text{erf} \xi$ – інтеграл ймовірності.

Якщо, наприклад, коефіцієнт теплопровідності лінійно залежить від температури $\lambda_t^*(T) = 1 + k(T - T_p)$, то m -те наближення температури в просторі обчислюється за формулою

$$T_m = k^{-1}(\sqrt{1 + 2k\theta_m} - 1) + T_p. \quad (19)$$

Числове розв'язування задачі теплопровідності. Крайову задачу на змінну Кірхгофа (10)–(13) розв'яжемо чисельним методом. Просторову дискретизацію за змінною ρ проведемо інтегро-інтерполяційним методом. На відрізок $[1, \rho_n]$ області зміни ρ введемо рівномірну сітку $w_n = \{\rho_i = 1 + ih, i = 0, \dots, n; h = (\rho_n - 1)/n\}$. Позначимо $\rho_{i \pm 1/2} = \rho_i \pm h/2$, $v(\rho, \theta, \text{Fo}) = \rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial \rho}$; $v_{i \pm 1/2} = v(\rho_{i \pm 1/2}, \theta_{i \pm 1/2}, \text{Fo})$. Рівняння (10) проінтегруємо за змінною ρ на відрізьку $\rho_{i-1/2} \leq \rho \leq \rho_{i+1/2}$. В результаті цього отримаємо, що

$$\int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} \frac{1}{a^*(\theta)} \rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} d\rho = v_{i+1/2} - v_{i-1/2}. \quad (20)$$

Інтеграл у рівності (20), який містить шукану функцію θ , замінимо лінійними комбінаціями значень θ у вузлах сітки:

$$\int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} \frac{1}{a^*(\theta)} \rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} d\rho \approx h \rho_i^2 \frac{1}{a^*(\theta_i)} \frac{d\theta_i}{d\text{Fo}}. \quad (21)$$

Зінтегрувавши співвідношення $\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{v(\rho, \theta, \text{Fo})}{\rho^2}$ на відрізьку $[\rho_{i-1}, \rho_i]$ за змінною ρ , отримаємо

$$\theta_i - \theta_{i-1} = \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \frac{v(\rho, \theta, \text{Fo})}{\rho^2} d\rho. \quad (22)$$

Припустивши, що $v(\rho, \theta, \text{Fo}) = v_{i-1/2} = \text{const}$ для $\rho \in [\rho_{i-1}, \rho_i]$, маємо

$$\theta_i - \theta_{i-1} = v_{i-1/2} \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \frac{d\rho}{\rho^2}, \quad (23)$$

звідки наближене значення

$$v_{i-1/2} \approx \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h} \rho_i \rho_{i-1}. \quad (24)$$

Підставивши (21), (24) у рівність (20), отримуємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\theta_i}{d\text{Fo}} = a^*(\theta_i) \frac{1}{h^2(1+ih)^2} [(\theta_{i+1} - \theta_i)\rho_{i+1/2}^2 - (\theta_i - \theta_{i-1})\rho_{i-1/2}^2], \quad (25)$$

яка є різницевим аналогом рівняння (10) у точках ρ_i , $i = 1, \dots, n-1$.

Аналогічно апроксимуємо крайову умову (11). При цьому рівняння (10) інтегруємо за змінною ρ на відрізку $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_{1/2}$, де $\rho_0 = 1$, $\rho_{1/2} = 1 + h/2$. В результаті знаходимо, що

$$\int_{\rho_0}^{\rho_{1/2}} \frac{1}{a^*(\theta)} \rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} d\rho = v_{1/2} - v_0,$$

$$\text{де } v_0 \approx \rho_0^2 [\text{Bi}(T(\theta)|_{\rho=\rho_0} - T_r) + \text{Sk}(T^4(\theta)|_{\rho=\rho_0} - T_r^4)], \quad v_{1/2} \approx \frac{\theta_1 - \theta_0}{h} \rho_{1/2}^2.$$

Поклавши

$$\int_{\rho_0}^{\rho_{1/2}} \frac{1}{a^*(\theta)} \rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} d\rho \approx \frac{h\rho_0^2}{2a^*(\theta_0)} \frac{d\theta_0}{d\text{Fo}},$$

отримуємо різницевий аналог крайової умови (11):

$$\frac{d\theta_0}{d\text{Fo}} = a^*(\theta_0) \frac{2}{h} \left[\frac{1}{h} (\theta_1 - \theta_0) \rho_{1/2}^2 - \text{Bi}(T(\theta_0) - T_r) - \text{Sk}(T^4(\theta_0) - T_r^4) \right]. \quad (26)$$

Для побудови різницевого аналогу крайової умови (12) розглянемо умову

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_n} = 0. \quad (27)$$

Зінтегрувавши рівняння (10) на відрізку $\rho_{n-1/2} \leq \rho \leq \rho_n$, знаходимо, що

$$\int_{\rho_{n-1/2}}^{\rho_n} \frac{1}{a^*(\theta)} \rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} d\rho = v_n - v_{n-1/2},$$

$$\text{де } v_n = 0, \quad v_{n-1/2} = \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{h} \rho_{n-1/2}^2.$$

Поклавши

$$\int_{\rho_{n-1/2}}^{\rho_n} \frac{1}{a^*(\theta)} \rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} d\rho \approx \frac{h\rho_n^2}{2a^*(\theta_n)} \frac{d\theta_n}{d\text{Fo}},$$

отримуємо різницевий аналог крайової умови (12) у вигляді

$$\frac{d\theta_n}{d\text{Fo}} = -a^*(\theta_n) \frac{2}{h^2(1+nh)^2} (\theta_n - \theta_{n-1}) \rho_{n-1/2}^2.$$

Отже, побудована інтегро-інтерполяційним методом напівдискретна математична модель нелінійної задачі теплопровідності (10)–(13) має вигляд задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_0}{d\text{Fo}} &= \frac{2a^*(\theta_0)}{h} \left[\frac{1}{h} (\theta_1 - \theta_0) \rho_{1/2}^2 - \text{Bi} (T(\theta_0) - T_r) - \text{Sk} (T^4(\theta_0) - T_r^4) \right], \\ \frac{d\theta_i}{d\text{Fo}} &= \frac{a^*(\theta_i)}{h^2(1+ih)^2} [(\theta_{i+1} - \theta_i) \rho_{i+1/2}^2 - (\theta_i - \theta_{i-1}) \rho_{i-1/2}^2], \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{d\theta_n}{d\text{Fo}} &= -\frac{2a^*(\theta_n)}{h^2(1+nh)^2} (\theta_n - \theta_{n-1}) \rho_{n-1/2}^2, \\ \theta_i(0) &= 0,\end{aligned}\tag{28}$$

де $T(\theta_0)$ – нелінійний вираз температури через змінну Кірхгофа, який для конкретної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури знаходимо з (9); $a^*(\theta_i)$ – відома залежність коефіцієнта температуропровідності від змінної Кірхгофа.

Розв’язок задачі (28) знаходимо за допомогою формул диференціювання назад (методи Гіра зі стрічковою структурою матриці Якобі, яка обчислюється чисельним диференціюванням).

Напружено-деформований стан простору зі сферичною порожниною, що перебуває у центрально-симетричному температурному полі при сталому тиску p_1 на поверхні $\rho = 1$ визначається відмінною від нуля безрозмірною радіальною компонентою переміщення $\bar{u} = u/r_1 \alpha_0 t_0$, через яку виражаються безрозмірні радіальне $\sigma_\rho = \sigma_r/2G_0 \alpha_0 t_0$ і колове $\sigma_\phi = \sigma_{\phi\phi}/2G_0 \alpha_0 t_0$ напруження:

$$\sigma_\rho = \bar{G}(T) \left[(1 - \nu(T)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + 2\nu(T) \frac{\bar{u}}{\rho} - (1 - \nu(T)) \Phi^*(T) \right],\tag{29}$$

$$\sigma_\phi = \bar{G}(T) \left[\nu(T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{\bar{u}}{\rho} - (1 - \nu(T)) \Phi^*(T) \right],\tag{30}$$

які задовольняють рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{2(\sigma_\rho - \sigma_\phi)}{\rho} = 0,\tag{31}$$

де $\Phi^*(T) = \frac{1 + \nu(T)}{1 - \nu(T)} \int_{T_p}^T \alpha_t(T) dT$; $\bar{G}(T) = \frac{G^*(T)}{1 - 2\nu(T)}$; $\alpha(T)$, $G(T)$, $\nu(T)$ – відповідно залежні від температури коефіцієнт лінійного розширення, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу подані у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$.

Підставивши співвідношення (29), (30) у рівняння (31), отримаємо диференціальне рівняння для визначення \bar{u} [8]:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \bar{u}) \right) = \frac{\partial \Phi^*(T)}{\partial \rho} - \psi(T) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + 2m(T) \frac{\bar{u}}{\rho} - \Phi^*(T) \right),\tag{32}$$

$$\text{де} \quad \psi(T) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\ln \left(G^*(T) \frac{1 - \nu(T)}{1 - 2\nu(T)} \right) \right), \quad m(T) = \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} \left(G^*(T) \frac{\nu(T)}{1 - 2\nu(T)} \right)}{\frac{\partial}{\partial \rho} \left(G^*(T) \frac{1 - \nu(T)}{1 - 2\nu(T)} \right)}.$$

Розв’язок рівняння (32) побудуємо методом збурення. На відміну від [8], дещо по-іншому перегрупуємо члени в правій частині рівняння (32) і поряд з ним розглянемо диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \bar{u}) \right) = \frac{\partial \Phi^*(T)}{\partial \rho} + \Phi^*(T) - \varepsilon \psi(T) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + 2m(T) \frac{\bar{u}}{\rho} \right), \quad (33)$$

яке при $\varepsilon = 1$ збігається з (32).

Розв'язок рівняння (33) подамо у вигляді розвинення за степенями параметра ε :

$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(\rho, \text{Fo}). \quad (34)$$

Підставивши (34) у рівняння (33) і прирівнявши члени при однакових степенях ε , отримаємо

диференціальне рівняння для знаходження складової \bar{u}_0 переміщення \bar{u} :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \bar{u}_0) \right) = \frac{\partial \Phi^*(T)}{\partial \rho} + \psi(T) \Phi^*(T) \quad (35)$$

і рекурентну послідовність диференціальних рівнянь для знаходження k -ї складової \bar{u}_k , $k \geq 1$:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \bar{u}_k) \right) = -f_{k-1}(\rho, \text{Fo}), \quad (36)$$

де $f_{k-1}(\rho, \text{Fo}) = \psi(T) \left(\frac{\partial \bar{u}_{k-1}}{\partial \rho} + 2m(T) \frac{\bar{u}_{k-1}}{\rho} - \Phi^*(T) \right)$.

Враховуючи сказане, розв'язок рівняння (32) запишемо як

$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k(\rho, \text{Fo}), \quad (37)$$

де \bar{u}_0, \bar{u}_k є розв'язками рівнянь (35), (36) і відповідно мають вигляд

$$\bar{u}_0 = c_{10}\rho + \rho^{-2}(c_{20} + H(\rho) - H_3(\rho)/3) + \rho H_0(\rho)/3, \quad (38)$$

$$\bar{u}_k = c_{1k}\rho + \rho^{-2}(c_{2k} + H_3^{k-1}(\rho)/3) - \rho H_0^{k-1}(\rho)/3. \quad (39)$$

Тут c_{ik} , $i = 1, 2$, – сталі інтегрування, $H(\rho) = \int_1^{\rho} \xi^2 \Phi^*(\xi, \text{Fo}) d\xi$,

$$H_m(\rho) = \int_1^{\rho} \xi^m \psi(T) \Phi^*(\xi, \text{Fo}) d\xi, \quad H_m^{(k-1)}(\rho) = \int_1^{\rho} \xi^m f_{k-1}(\xi, \text{Fo}) d\xi.$$

Враховуючи подання (34), температурні напруження обчислюємо за формулами

$$\sigma_{\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{\rho k}, \quad \sigma_{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{\varphi k}, \quad (40)$$

де складові температурних напружень мають вигляд

$$\sigma_{\rho 0} = G^*(T) [\bar{v}(T)(c_{10} + H_0(\rho)/3) - 2\rho^{-3}(c_{20} + H(\rho) - H_3(\rho)/3)], \quad (41)$$

$$\sigma_{\varphi 0} = G^*(T) [\bar{v}(T)(c_{10} + H_0(\rho)/3) + \rho^{-3}(c_{20} + H(\rho) - H_3(\rho)/3) - \Phi^*(T)], \quad (42)$$

$$\sigma_{\rho k} = G^*(T) [\bar{v}(T)(c_{1k} - H_0^{(k-1)}(\rho)/3) - 2\rho^{-3}(c_{2k} + H_3^{(k-1)}(\rho)/3)], \quad (43)$$

$$\sigma_{\varphi k} = G^*(T) [\bar{v}(T)(c_{1k} - H_0^{(k-1)}(\rho)/3) + \rho^{-3}(c_{2k} + H_3^{(k-1)}(\rho)/3)], \quad (44)$$

причому $\bar{v}(T) = \frac{1 + \nu(T)}{1 - 2\nu(T)}$.

Сталі інтегрування c_{ik} , $i = 1, 2$, визначаємо з умов, що на поверхні порожнини $\rho = 1$ діє тиск \bar{p}_1 , а на безмежності напруження зникають:

$$\sigma_{\rho k} \Big|_{\rho=1} = -\bar{p}_1 \delta_{0k}, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \{\sigma_{\rho k}, \sigma_{\phi k}\} = 0, \quad (45)$$

де $\bar{p}_1 = p_1 / (2G_0 \alpha_{t_0} t_0)$, δ_{0k} – символ Кронекера.

Вимагаючи, щоб складові напружень (41)–(44) задовольняли умови (45), враховуючи при цьому, що $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi^*(T) = 0$, знаходимо

$$c_{10} = -\frac{1}{3} H_0(\rho) \Big|_{\rho=\infty}, \quad c_{1k} = \frac{1}{3} H_0^{k-1}(\rho) \Big|_{\rho=\infty},$$

$$c_{20} = \frac{\bar{p}_1}{2G^*(T) \Big|_{\rho=1}} + \frac{c_{10}}{2} \bar{v}(T) \Big|_{\rho=1}, \quad c_{2k} = \frac{1}{2} c_{1k} \bar{v}(T) \Big|_{\rho=1}.$$

Числові дослідження. На основі отриманих розв'язків проведено числові дослідження температурного поля і напружень у термочутливому просторі зі сферичною порожниною. За матеріал вибрано сталь 15Х1М1Ф з такими залежностями теплофізичних і механічних характеристик від температури:

$$\lambda_t(t) = 42.31 - 0.0087 t \text{ [Вт/(м} \cdot \text{К)]}, \quad c(t) = 403.5608 + 0.54594 t \text{ [Дж/(кг} \cdot \text{К)]},$$

$$\rho = 7841 \text{ [кг/м}^3\text{]}, \quad \alpha_t(t) = (10.6429 + 7.24 \cdot 10^{-3} t - 3.4102 t^2) \cdot 10^{-6} \text{ [K}^{-1}\text{]},$$

$$E(T) = (2.17573 - 5.2 \cdot 10^{-4} t - 4.6271 \cdot 10^{-7} t^2) \cdot 10^{11} \text{ [Па]},$$

$$v(t) = 0.31863 + 0.3 \cdot 10^{-4} t + 7.126 \cdot 10^{-8} t^2.$$

При поданні характеристик у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$ за опорну температуру t_0 взято температуру середовища порожнини $t_r = 873 \text{ К}$. Початкова температура простору прийнята рівною 293 К .

Розрахунки розподілів безрозмірних температурного поля T , переміщення \bar{u} і компонентів тензора напружень σ_ρ, σ_ϕ проведено для випадків конвективного, променевого і конвективно-променевого теплообмінів (відповідно рис. 1, 2, 4, 6). На рис. 3, 5, 7 наведено розподіли переміщень і напружень при наявності та відсутності силового навантаження \bar{p}_1 на поверхні порожнини для випадку конвективно-променевого теплообміну. Штрихові лінії на цих рисунках – відповідні розподіли у випадку нетермочутливого матеріалу, характеристики якого дорівнюють опорним значенням χ_0 .

Відносна похибка між значеннями температури, отриманими методом послідовних наближень і чисельним методом, не перевищувала 2%.

З графіків, наведених на рис. 1, видно, що з віддаленням від порожнини вздовж радіуса температура прямує до початкової T_p . Проведені обчислення показують, що максимальна розбіжність між значеннями температури в термочутливому і нетермочутливому просторах спостерігається при конвективно-промежевому теплообміні та становить приблизно 2%. Теплофізичні характеристики в заданому діапазоні температур змінюються так: $\lambda_t(t)$ на 11%, $c(t)$ на 48%.

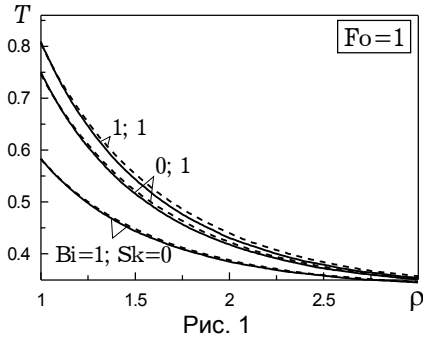


Рис. 1

За формулами (37)–(39), (40)–(44) обчислено компоненти вектора переміщення \bar{u} і тензора напружень σ_ρ, σ_ϕ . Для практичних розрахунків важливим є обчислення декількох перших членів рядів (37), (40). Числові

дослідження показали, що проведене перегрупування членів у правій частині рівняння (32) (більш вдалий вибір нульового наближення) привело до покращення збіжності рядів (37), (40). З п'яти знайдених у даному випадку наближень приблизно 90–95% сумарних величин переміщення і напружень дають нульове і перше наближення.

З наведених графіків на рис. 2 видно, що у випадку термочутливого матеріалу переміщення \bar{u} приймає на поверхні порожнини від'ємні значення, а з віддаленням від неї уздовж радіуса змінює знак, приблизно при $\rho = 1.7$ (для $Fo = 1$) досягає максимуму і монотонно спадає. Для нетермочутливого матеріалу на поверхні порожнини переміщення приймають нульові значення. На рис. 3 показано розподіли переміщень у термочутливому і нетермочутливому просторах при їх конвективно-променевому нагріванні за відсутності ($\bar{p}_1 = 0$) та наявності ($\bar{p}_1 = 0.1$) тиску на поверхні сферичної порожнини. Наявність тиску змінює якісно та кількісно картину розподілу переміщень.

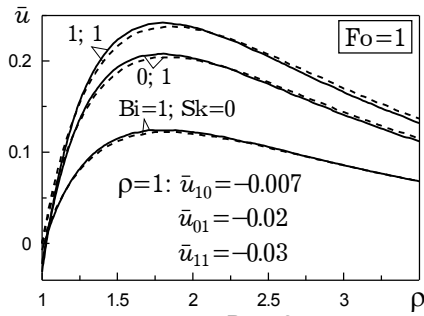


Рис. 2

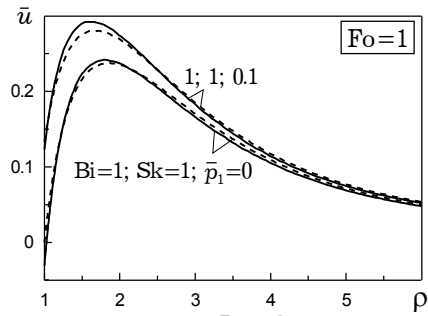


Рис. 3

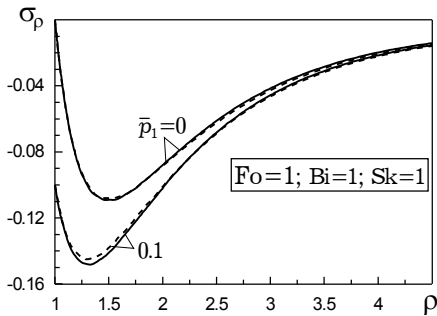


Рис. 4

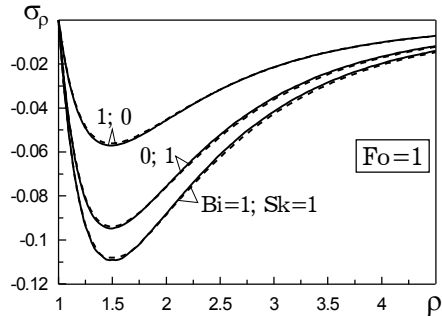


Рис. 5

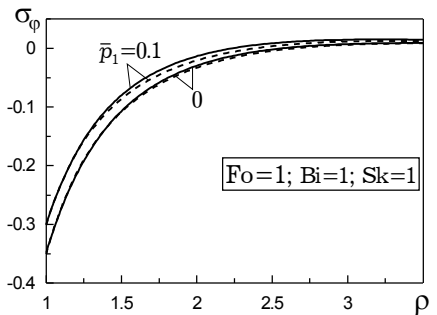


Рис. 6

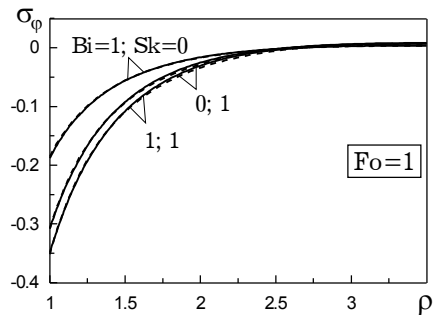


Рис. 7

Як бачимо з наведених графіків на рис. 4, з віддаленням від порожнини вздовж радіуса радіальні напруження σ_ρ зростають за абсолютною величиною, досягають максимуму при $\rho = 1.5$ і далі монотонно спадають, прямуючи до нуля. При наявності тиску (рис. 5) напруження σ_ρ досягають свого максимального значення ближче ($\rho = 1.3$) до поверхні порожнини.

Колові напруження є максимальними за абсолютною величиною на поверхні порожнини, з віддаленням від неї монотонно спадають, змінюючи свій знак на протилежний при $\rho \rightarrow \infty$ (рис. 6). Навантаження тиском $\bar{p}_1 = 0.1$ поверхні порожнини призводить до якісної і кількісної зміни розподілу колових напружень (рис. 7).

1. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Математические методы теплопроводности. – Киев: Вища шк., 1993. – 415 с.
2. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 487 с.
3. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. – Москва: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.
5. *Львов А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.
6. *Попович В. С.* Побудова розв'язків задач термопружності термочутливих тіл при конвективно-променевому теплообміні // Доп. НАН України. – 1997. – № 11. – С. 69–73.
7. *Попович В. С., Вовк О. М., Гарматій Г. Ю.* Термопружний стан термочутливої кулі за умов складного теплообміну з оточуючим середовищем // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 99–106.
8. *Попович В. С., Сулим Г. Т.* Центральна-симетрична квазістатична задача термопружності термочутливого тіла // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 3. – С. 62–68.
9. *Постольник Ю. С., Огуцов А. П.* Металургійна термомеханіка. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. – 633 с.

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ ПРИ УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНО-ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА

Найдено решение нестационарной задачи теплопроводности для термочувствительного пространства со сферической полостью, которое обменивается теплом путем конвективно-лучистого теплообмена со средой постоянной температуры. Проанализировано влияние термочувствительности материала пространства на величину и характер распределения температуры, обусловленных ею напряжений и перемещений в случаях наличия и отсутствия силовых нагрузок.

THERMOELASTIC STATE OF THERMOSENSITIVE SPACE WITH SPHERICAL CAVITY UNDER CONVECTIVE-RADIANT HEAT EXCHANGE

The solution of non-stationary heat conductivity problem for thermosensitive space with spherical cavity with convective-radiant heat exchange with an medium of constant temperature is found. The influence of thermosensitive space material on the size and character of distribution of temperature and pressure, caused by it in the cases of presence and absence of force loading, is analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.02.06