УДК 539.3

В. А. Галазюк, Г. Т. Сулим, А. Я. Ващишин

ЕФЕКТ ДОТИЧНИХ НАПРУЖЕНЬ ЗА РАДІАЛЬНОГО СТЯГУВАННЯ ГРАНИЦІ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ В КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ

Запропоновано нову постановку задачі лінійної теорії пружності для півпростору зі змішаними крайовими умовами, розв'язок якої дає фізично коректну математичну модель напружено-деформованого стану (у тому числі малість пружних поворотів). Новизна постановки полягає в тому, що вона поряд із класичними крайовими умовами містить обумовлену гіпотезою суцільності вимогу неперервності компонент вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega} = 0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ *на лінії поділу крайових умов. Доведено, що виконання цієї вимоги можна здійснити натягом за певним законом границі півпростору поза областю стягування. При цьому всі характеристики напружено-деформованого стану є неперервними й обмеженими на лінії поділу крайових умов.*

У праці [3] запропоновано нову модель деформування пружних тіл, у якій постулюється існування на границі тіла межового шару безмежно малої товщини, реологічні властивості якого уможливлюють виконання фізичної умови неперервності компонент вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega} = 0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ на ній і, як наслідок, її гладке (без зламів) деформування. Зауважимо, що у випадку задання на границі тіла однотипних неперервних крайових умов локальні пружні повороти не появляються, а тому неперервність компонент вектора $\mathbf{\Omega}$ виконується автоматично. Нижче запропоновану модель застосовано до аналізу напружено-деформованого стану у півпросторі, границя якого в крузі фіксованого радіуса R стягується за довільним законом. Цю задачу розв'язано вперше і за допомогою методу розривних інтегралів Вебера – Шафгайтліна [5] доведено, що вимога неперервності компонент вектора $\mathbf{\Omega}$ на лінії поділу крайових умов відповідно до гіпотези суцільності [8] створює натяг границі, який проявляється певним полем радіальних переміщень, у результаті чого там появляються дотичні напруження і їх можна трактувати як необхідне довантаження границі для забезпечення гладкості її деформування. Якщо пружні повороти і, як наслідок, дотичні напруження зовні області стягування дорівнюють нулеві, то в області стягування на лінії поділу крайових умов вони мають класичний кореново-сингулярний розподіл, що створює механічно-суперечливу картину деформування границі пружного півпростору (утворення зламу на лінії поділу крайових умов). З фізичного погляду можна припустити, що у цьому випадку границя тіла має властивості ідеально гнучкої поверхні.

1. Постановка задачі. Однорідний ізотропний пружний півпростір віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$, вважаючи, що під дією зовнішнього навантаження у ньому реалізується осесиметричний напружено-деформований стан. Тоді для ненульових компонент вектора пружного переміщення $\mathbf{u} = \mathbf{u}(Ru_\alpha, 0, Ru_\gamma)$ можна записати систему рівнянь рівноваги

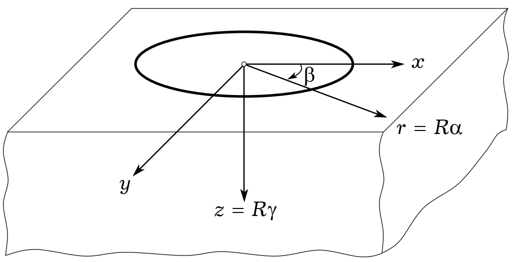

Рис. 1

$$k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = 0, \qquad k^2\partial_\gamma\theta - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\omega_\beta) = 0, \qquad k^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \tag{1}$$

стосовно об'ємної деформації θ і єдиної у цьому випадку ненульової компоненти $\omega_\beta(\alpha,\gamma)$ вектора $\mathbf{\Omega} = 0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$:

$$\theta \equiv \operatorname{div}\mathbf{u} = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma,$$

$$2\omega_\beta \equiv (\operatorname{rot}\mathbf{u})_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma = \varphi_\gamma(\alpha,\gamma) - \varphi_\alpha(\alpha,\gamma), \tag{2}$$

де $\varphi_\alpha(\alpha,\gamma)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,\gamma)$ − пружні кути повороту лінійних елементів, паралельних до координатних осей α і γ відповідно; λ і μ − сталі Ляме.

Безпосередньою підстановкою можна переконатися в тому, що функції

$$\theta(\alpha,\gamma) = -2\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi,$$

$$\omega_\beta(\alpha,\gamma) = k^2 \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi \tag{3}$$

є розв'язками системи рівнянь (1) у півпросторі $\gamma \ge 0$, де $J_\nu(x)$ − функції Бесселя першого роду порядку ν.

За відомими функціями $\theta(\alpha,\gamma)$ і $\omega_\beta(\alpha,\gamma)$ із системи диференціальних рівнянь (2) знайдемо компоненти вектора пружного переміщення

$$u_\alpha(\alpha,\gamma) = -\int_0^\infty \left[(k^2+1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi +$$

$$+ (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi,$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi + (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi, \tag{4}$$

вирази пружних кутів повороту

$$\varphi_\alpha(\alpha,\gamma) = -\int_0^\infty \xi^2 B(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi - (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \left[2k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)\right] \xi e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi -$$

$$- (k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi, \tag{5}$$

а за законом Гука та поданнями (4) − компоненти тензора напружень

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma) = 2\mu\left[(2-3k^2)\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi - k^2 \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_2(\alpha\xi)\,d\xi\right] +$$

$$+ 2\mu\gamma\left[\left(k^2 - \frac{3}{2}\right)\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_2(\alpha\xi)\,d\xi\right],$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = 2\mu \int_0^\infty \xi\left[A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi -$$

$$- 2\mu(k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\,d\xi,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) \equiv \mu\left[\varphi_\gamma(\alpha,\gamma) + \varphi_\alpha(\alpha,\gamma)\right] = 2\mu \int_0^\infty \xi\left[k^2 A(\xi) - \xi B(\xi)\right] e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi -$$

$$- 2\mu(k^2-1)\gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

У поданнях (3)−(6) $A(\xi)$ і $B(\xi)$ − довільні функції, які визначаються крайовими умовами задачі та забезпечують існування і обмеженість відповідних невласних інтегралів. Зазначимо, що розв'язки (4) статичної задачі теорії пружності для півпростору з круговою симетрією співпадають з формулами [6, с. 514].

Застосуємо отримані вище співвідношення і згадану фізичну модель до аналізу напружено-деформованого стану пружного півпростору за радіальної деформації його границі в крузі радіуса R.

Нехай стягування в крузі одиничного радіуса відбувається за довільним законом $\alpha f(\alpha^2)$. Тоді поставлену задачу про напружено-деформований стан у півпросторі $\gamma \geq 0$, на границі $\gamma = 0$ якого відсутнє нормальне навантаження, означимо такими крайовими умовами:

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, 0) = 0, \quad 0 \leq \alpha < \infty, \qquad u_\alpha(\alpha, 0) = -c\alpha f(\alpha^2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0) = g(\alpha^2), \quad 1 \leq \alpha < \infty, \qquad \lim_{\alpha\to\infty} g(\alpha^2) < \infty, \tag{7}$$

а також вимогою обмеженості на безмежності переміщень, тобто

$$\lim_{(\alpha,\gamma)\to\infty} u_\alpha(\alpha, \gamma) \leq \infty, \qquad \lim_{(\alpha,\gamma)\to\infty} u_\gamma(\alpha, \gamma) \leq \infty,$$

де $g(\alpha^2)$ − коригуюча функція, зокрема, і нуль.

Нижче буде з'ясовано, що функція $g(\alpha^2)$ визначається законом стягування $\alpha f(\alpha^2)$ і залежить від параметра $q > 0$, який характеризує властивості границі тіла. Тому для конкретизації цих властивостей пропонуються, зокрема, або фізично обґрунтована вимога неперервності відмінної від нуля компоненти $\omega_\beta(\alpha, \gamma)$ вектора $\mathbf{\Omega}$ [1, 2]:

$$\lim_{\alpha\to 1-0} \omega_\beta(\alpha, 0) = \lim_{\alpha\to 1+0} \omega_\beta(\alpha, 0) \tag{8}$$

на межі $\alpha = 1$ області стягування, або умова

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0) = 0, \qquad 1 \leq \alpha < \infty, \tag{9}$$

яка в класичній постановці характеризує вільну від зовнішнього дотичного навантаження геометричну границю пружного півпростору.

Тому розв'язок задачі, означеної крайовими умовами (7) і додатковою крайовою умовою (9), будемо називати класичним, а розв'язок задачі означеної крайовими умовами (7) і додатковою умовою (8) − некласичним.

2. Некласичний (фізично коректний) розв'язок. Відповідно до першого виразу з (4), другого з (6) і першої групи крайових умов (7) для визначення функцій $A(\xi)$ і $B(\xi)$ одержимо інтегральні рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^\infty \xi[A(\xi) - \xi B(\xi)] J_0(\alpha\xi)\, d\xi = 0, \qquad 0 \leq \alpha < \infty,$$

$$\int_0^\infty \left[(k^2 - 1)A(\xi) - \xi B(\xi)\right] J_1(\alpha\xi)\, d\xi = c\alpha f(\alpha^2), \qquad 0 \leq \alpha \leq 1, \tag{10}$$

причому перше з цих інтегральних рівнянь має очевидний розв'язок $\xi B(\xi) = A(\xi)$. Тому друге з інтегральних рівнянь (10) набуде вигляду

$$k^2 \int_0^\infty A(\xi) J_1(\alpha\xi)\, d\xi = c\alpha f(\alpha^2), \qquad 0 \leq \alpha \leq 1, \tag{11}$$

розв'язок якого знайдемо методом розривних інтегралів Вебера − Шафгайтліна [1, 2], відповідно до якого шукані функції $A(\xi)$ і $B(\xi)$ подамо у вигляді узагальненого ряду Неймана

$$A(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\frac{J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^{q}},\qquad B(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\frac{J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^{q+1}} \tag{12}$$

із наперед невизначеними коефіцієнтами a_n і параметром $q>0$.

Подальші дослідження базуватимуться на властивостях розривного інтегралу Вебера – Шафгайтліна [7]

$$\int_0^{\infty}\frac{J_{\nu}(\alpha\xi)J_{\mu}(\beta\xi)}{\xi^{\lambda}}\,d\xi=$$

$$=\frac{\alpha^{\nu}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2};\frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2};\nu+1;\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}{2^{\lambda}\beta^{\nu-\lambda+1}\Gamma\left(\frac{-\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)},$$

$$0\le\alpha\le\beta,\qquad \operatorname{Re}(\nu+\mu-\lambda+1)>0,\qquad \operatorname{Re}\lambda>-1, \tag{13}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{J_{\nu}(\alpha\xi)J_{\mu}(\beta\xi)}{\xi^{\lambda}}\,d\xi=$$

$$=\frac{\beta^{\mu}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right)F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2};\frac{-\nu+\mu-\lambda+1}{2};\mu+1;\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}{2^{\lambda}\alpha^{\mu-\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma(\mu+1)},$$

$$\beta\le\alpha\le\infty,\qquad \operatorname{Re}(\nu+\mu-\lambda+1)>0,\qquad \operatorname{Re}\lambda>-1. \tag{14}$$

У виразах (13), (14) $\Gamma(x)$ – ґамма-функція; $F(a;b;c;x^2)$ – гіпергеометрична функція Ґаусса, задана гіпергеометричним рядом

$$F(a;b;c;x^2)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\,\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)}\,\frac{x^{2k}}{k!} \tag{15}$$

з одиничним радіусом збіжності за умови $c-a-b>0$, причому

$$F(a;b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\qquad c-a-b>0,$$

$$F(a;b;c;x^2)=(1-x^2)^{c-a-b}F(c-a;c-b;c;x^2). \tag{16}$$

При $a=-k$ або $b=-k$, де $k\in\mathbb{N}_0$, ряд (15) зводиться до полінома степеня $2k$, який можна подати через поліноми Якобі.

Якщо ряд (12) підставити в інтегральне рівняння (11) та обчислити розривний інтеграл Вебера – Шафгайтліна за формулою (13), то в області $0\le\alpha\le1$ одержимо алгебричне рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\frac{\alpha\Gamma(n-q+2)F(n-q+2;-n;2;\alpha^2)}{2^{q}\Gamma(n+1)}=k^{-2}c\alpha f(\alpha^2),\quad 0\le\alpha\le1, \tag{17}$$

стосовно невідомих коефіцієнтів a_n.

Оскільки алгебричне рівняння (17) є рядом за поліномами Якобі [4] з аргументом $(1-2\alpha^2)$, тобто за функціями $F(n-q+2;-n;2;\alpha^2)\equiv(n+1)^{-1}\times$ $\times P_n^{(1,-q)}(1-2\alpha^2)$, які є повною системою функцій на проміжку $[0,1]$, то відповідно до апроксимаційної теореми Вайєрштраса про наближення неперервної функції поліномом існує єдиний набір коефіцієнтів a_n, який є розв'язком рівняння (17). При цьому в області $1\le\alpha<\infty$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)=g(\alpha^2)=$$
$$=-k^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma(n-q+2)F(n-q+2;n-q+1;2n-q+3;\alpha^{-2})}{2^q\alpha^{2n-2q+3}\Gamma(2n-q+3)\Gamma(-n+q)}$$
і залежить тільки від параметра q.

Не обмежуючи загальності міркувань, покладемо в умові (7) $f(\alpha^2)=1$, припустивши, що стягування в області $0\le\alpha\le1$ відбувається за лінійним законом. Тоді розв'язком рівняння (17) буде $a_0=\dfrac{c}{k^2}\dfrac{2^q}{\Gamma(2-q)}$, $a_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}$, і відповідно до подання (12) і рівності (17) функції $A(\xi)$ і $B(\xi)$ у цьому випадку матимуть такий вигляд:

$$A(\xi)=\frac{2^q c}{k^2\Gamma(2-q)}\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^q},\qquad B(\xi)=\frac{2^q c}{k^2\Gamma(2-q)}\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q+1}}.\tag{18}$$

Тепер за відомими функціями $A(\xi)$ і $B(\xi)$ через інтегральні подання (3)–(6) можна записати усі характеристики напружено-деформованого стану:

$$\theta(\alpha,\gamma)=-2a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}J_0(\alpha\xi)e^{-\xi\gamma}\,d\xi,\quad \omega_\beta(\alpha,\gamma)=k^2a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}J_1(\alpha\xi)e^{-\xi\gamma}\,d\xi,$$

$$u_\alpha(\alpha,\gamma)=-k^2a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q}}J_1(\alpha\xi)e^{-\xi\gamma}\,d\xi+(k^2-1)\gamma a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}J_1(\alpha\xi)e^{-\xi\gamma}\,d\xi,$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma)=a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q}}J_0(\alpha\xi)e^{-\xi\gamma}\,d\xi+(k^2-1)\gamma a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}J_0(\alpha\xi)e^{-\xi\gamma}\,d\xi,$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,\gamma)=-a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}J_1(\alpha\xi)e^{-\xi\gamma}\,d\xi-(k^2-1)\gamma a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-2}}J_1(\alpha\xi)e^{-\xi\gamma}\,d\xi,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha,\gamma)=(2k^2-1)a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}J_1(\alpha\xi)e^{-\xi\gamma}\,d\xi-$$
$$-(k^2-1)\gamma a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-2}}J_1(\alpha\xi)e^{-\xi\gamma}\,d\xi,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\gamma)=2\mu\left[(2-3k^2)a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}e^{-\xi\gamma}J_0(\alpha\xi)\,d\xi-k^2a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}\times\right.$$
$$\left.\times e^{-\xi\gamma}J_2(\alpha\xi)\,d\xi\right]+2\mu\gamma\left[\left(k^2-\frac{3}{2}\right)a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-2}}e^{-\xi\gamma}J_0(\alpha\xi)\,d\xi-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-2}}e^{-\xi\gamma}J_2(\alpha\xi)\,d\xi\right],$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma)=2\mu(k^2-1)\gamma a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-2}}e^{-\xi\gamma}J_0(\alpha\xi)\,d\xi,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma)=2\mu(k^2-1)a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}}e^{-\xi\gamma}J_1(\alpha\xi)\,d\xi-$$
$$-2\mu(k^2-1)\gamma a_0\int_0^\infty\frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-2}}e^{-\xi\gamma}J_1(\alpha\xi)\,d\xi.\tag{19}$$

Інтеграли у виразах (19) у загальному випадку можна обчислити числовими методами, проте на площині $\gamma = 0$ вони вироджуються у розривні інтеграли Вебера – Шафгайтліна і за формулами (13) і (14) отримаємо, що в області $0 \le \alpha \le 1$

$$\theta(\alpha, 0) = -\,4ck^{-2}\,, \tag{20}$$

$$\omega_\beta(\alpha, 0) = 2c\,\frac{\Gamma(2.5-q)}{\Gamma(2-q)\sqrt{\pi}}\,\alpha F(2.5-q; 0{,}5; 2; \alpha^2)\,, \tag{21}$$

$$u_\alpha(\alpha, 0) = -\,c\alpha,\;\; u_\gamma(\alpha, 0) = 2ck^{-2}\,\frac{\Gamma(1.5-q)}{\Gamma(2-q)\sqrt{\pi}}\,F(1.5-q\,; -0.5\,; 1\,; \alpha^2)\,, \tag{22}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha, 0) = -\,2ck^{-2}\,\frac{\Gamma(2.5-q)}{\Gamma(2-q)\sqrt{\pi}}\,\alpha F(2.5-q\,; 0.5\,; 2\,; \alpha^2)\,,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha, 0) = 2(2-k^{-2})c\,\frac{\Gamma(2.5-q)}{\Gamma(2-q)\sqrt{\pi}}\,\alpha F(2.5-q\,; 0.5\,; 2\,; \alpha^2)\,, \tag{23}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, 0) = 4\mu(2k^{-2}-3)c\,,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0) = 4\mu(k^2-1)k^{-2}c\,\frac{\Gamma(2.5-q)}{\Gamma(2-q)\sqrt{\pi}}\,\alpha F(2.5-q; 0.5; 2; \alpha^2)\,, \tag{24}$$

а в області $1 < \alpha < \infty$ –

$$\theta(\alpha, 0) = -\,\frac{4c}{k^2\Gamma(-1+q)\Gamma(3-q)}\,\alpha^{2q-4}F(2-q; 2-q; 3-q; \alpha^{-2})\,, \tag{25}$$

$$\omega_\beta(\alpha, 0) = \frac{2c\Gamma(2.5-q)}{\mathbf{\Gamma(-0.5+q)}\Gamma(2-q)\Gamma(3-q)}\,\alpha^{2q-4}F(2.5-q; 1.5-q; 3-q; \alpha^{-2})\,, \tag{26}$$

$$u_\alpha(\alpha, 0) = -\,\frac{c}{\Gamma(q)\Gamma(3-q)}\,\alpha^{2q-3}F(2-q; 1-q; 3-q; \alpha^{-2})\,,$$

$$u_\gamma(\alpha, 0) = \frac{k^{-2}c\Gamma(1.5-q)}{\mathbf{\Gamma(-0.5+q)}\Gamma(2-q)\Gamma(3-q)}\,\alpha^{2q-3}F(1.5-q; 1.5-q; 3-q; \alpha^{-2})\,, \tag{27}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha, 0) = -\,\frac{2k^{-2}c\Gamma(2.5-q)}{\mathbf{\Gamma(-0.5+q)}\Gamma(2-q)\Gamma(3-q)}\,\alpha^{2q-4}F(2.5-q; 1.5-q; 3-q; \alpha^{-2})\,,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha, 0) = \frac{2(2-k^{-2})c\Gamma(2.5-q)}{\mathbf{\Gamma(-0.5+q)}\Gamma(2-q)\Gamma(3-q)}\,\alpha^{2q-4}F(2.5-q; 1.5-q; 3-q; \alpha^{-2})\,, \tag{28}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, 0) = \frac{8\mu(k^{-2}-1)c}{\Gamma(-1+q)\Gamma(3-q)}\,\alpha^{2q-4}F(2-q; 2-q; 3-q; \alpha^{-2}) -$$

$$-\,\frac{2\mu c}{\Gamma(q)\Gamma(3-q)}\,\alpha^{2q-4}F(2-q; 1-q; 3-q; \alpha^{-2})\,,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0) = \frac{4\mu(1-k^{-2})c\Gamma(2.5-q)}{\mathbf{\Gamma(-0.5+q)}\Gamma(2-q)\Gamma(3-q)}\,\alpha^{2q-4}F(2.5-q; 1.5-q; 3-q; \alpha^{-2})\,. \tag{29}$$

Аналіз виразів (23) і (28) для пружних кутів повороту $\varphi_\alpha(\alpha, 0)$ і $\varphi_\gamma(\alpha, 0)$ вказує на те, що у площині $\gamma = 0$ вони мають різні аналітичні вирази в областях $0 \le \alpha \le 1$ та $1 \le \alpha < \infty$. Тому відповідно до рівності (8) на краю $\alpha = 1$ повинні виконуватися такі граничні рівності:

$$\lim_{\alpha\to 1-0}\varphi_\alpha(\alpha,0)=\lim_{\alpha\to 1+0}\varphi_\alpha(\alpha,0),\qquad \lim_{\alpha\to 1-0}\varphi_\gamma(\alpha,0)=\lim_{\alpha\to 1+0}\varphi_\gamma(\alpha,0), \tag{30}$$

наслідком яких є умова (8).

Оскільки пружні кути повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ відповідно до подань (23) і (28) задані гіпергеометричним рядом (15), який є збіжним в точці $\alpha=1$ за умови $c-a-b>0$, то граничні рівності (30) будуть виконані, якщо

$$1<q<1.5. \tag{31}$$

За виконання нерівності (31) усі означені поданнями (20)–(29) характеристики напружено-деформованого стану на межі області стягування $\alpha=1$ є неперервними, в чому легко переконатися, застосувавши рівність (16), і обмеженими. Зокрема, відповідно до подань (20) і (24) об'ємна деформація $\theta(\alpha,0)$ і внутрішнє нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,0)$ за умови (31) є неперервними на краю $\alpha=1$ області стягування, постійними в області $0\le\alpha\le 1$ і не залежать від параметра q.

3. Механічні властивості границі тіла залежно від параметра q**.** Відповідно до подань (27) і (28) параметр q через множники α^{2q-3} і α^{2q-4} визначає ступінь заникання відповідно переміщень і пружних поворотів границі тіла при $\alpha\to\infty$. Тому є актуальною механічна інтерпретація властивостей границі залежно від параметра $1<q<1.5$. Зокрема, для $q=1$ із виразів (20), (22) і (24) матимемо, що в області $0\le\alpha\le 1$

$$\theta(\alpha,0)=-\,4ck^2,\qquad u_\alpha(\alpha,0)=-\,c\alpha,\qquad \sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,0)=-\,4\mu c(3-2k^{-2}),$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)=2\mu c(k^2-1)k^{-2}\alpha F(1.5;0.5;2;\alpha^2),$$

а з виразів (25), (27) і (29) в області $1\le\alpha<\infty$ –

$$\theta(\alpha,0)=0,\quad \varepsilon_{\gamma\gamma}(\alpha,0)=0,\quad u_\alpha(\alpha,0)=-\,c\alpha^{-1},\quad \sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,0)=2\mu c\alpha^{-2},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)=2\mu c(k^2-1)k^{-2}\alpha^{-3}F(1.5;0.5;2;\alpha^{-2}).$$

Порівняльний аналіз одержаних значень характеристик напружено-деформованого стану вказує на те, що на межі області стягування $\alpha=1$ дотичне напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(1,0)$ має логарифмічну особливість, оскільки таку особливість має гіпергеометрична функція Ґаусса $F(1.5;0.5;2;\alpha^{-2})$ при $\alpha=$ $=1$, нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,0)$ має розрив першого роду зі зміною знаку, а об'ємна деформація $\theta(\alpha,0)$ зовні області стягування $1\le\alpha<\infty$ тотожно дорівнює нулеві. У цьому випадку можна вважати, що поверхня тіла деформується подібно до нестисливого матеріалу.

Якщо $q=1.5$, то відповідно з поданнями (27) і (28), використавши формулу підсумовування гіпергеометричної функції Ґаусса $F(0.5;-0.5;1.5;\alpha^{-2})=$ $=0.5\left(\alpha\arcsin\alpha^{-1}+\sqrt{1-\alpha^{-2}}\right)$, переміщення $u_\alpha(\alpha,0)$ на границі тіла поза межами області стягування $1\le\alpha<\infty$ набере вигляду

$$u_\alpha(\alpha,0)=-2c\pi^{-1}\left(\alpha\arcsin\alpha^{-1}+\sqrt{1-\alpha^2}\right), \tag{32}$$

причому $\lim\limits_{\alpha\to\infty}u_\alpha(\alpha,0)=-\,4c\pi^{-1}$.

Разом з тим пружні кути повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ для $q=1.5$ в області $1\le\alpha<\infty$ відповідно до подань (28) заникають за гіперболічним законом:

$$\varphi_\alpha(\alpha,0) = -\frac{4c}{\pi k^2}\alpha^{-1}, \qquad \varphi_\gamma(\alpha,0) = -\frac{4(2k^2-1)c}{\pi k^2}\alpha^{-1}.$$

У цьому випадку механічні властивості границі тіла нагадують властивості гнучкої, але нерозтяжної поверхні.

Дотичні напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)$, які виникають на границі тіла в результаті поширення в ньому пружних поворотів за умови (31), визначаються законом (29) і також залежать від параметра q. Якщо $q = 1.5$, то відповідно до закону (29) дотичні напруження

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = \frac{8\mu(k^2-1)c}{k^2\pi}\alpha^{-1},$$

тобто заникають за гіперболічним законом. Ці дотичні напруження можна трактувати як необхідне довантаження границі $\gamma = 0$ пружного півпростору для забезпечення гладкості її деформування, оскільки за умови (31) означені виразами (23) і (28) пружні кути повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ є неперервними на краю $\alpha = 1$ області стягування.

Якщо реологічні властивості границі тіла означити параметром $q = 0.5$, то умова (9) рівності нулеві дотичних напружень в області $1 < \alpha < \infty$ границі $\gamma = 0$ півпростору буде виконана, оскільки у виразі (29) чисельник є обмеженим, а виділений жирним шрифтом множник у знаменнику є необмежено великим. Тепер відповідно до подань (20)–(29) одержимо розподіл характеристик напружено-деформованого стану на границі пружного півпростору за відсутності дотичних напружень в області $1 < \alpha < \infty$. Зокрема, в області $0 \le \alpha \le 1$:

$$\theta(\alpha,0) = -4ck^{-2}, \tag{33}$$

$$\omega_\beta(\alpha,0) = \frac{4}{\pi}c\alpha F(2;0.5;2;\alpha^2) = -\frac{4}{\pi}c\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{34}$$

$$u_\alpha(\alpha,0) = -c\alpha, \qquad u_\gamma(\alpha,0) = \frac{4c}{k^2\pi}F(1;-0.5;1;\alpha^2) = \frac{4c}{k^2\pi}\sqrt{1-\alpha^2}, \tag{35}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0) = -\frac{4c}{k^2\pi}\alpha F(2;0.5;2;\alpha^2) = -\frac{4c}{k^2\pi}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$\varphi_\gamma(\alpha,0) = \frac{4(2k^2-1)}{k^2\pi}c\alpha F(2;0.5;2;\alpha^2) = \frac{4(2k^2-1)}{k^2\pi}c\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{36}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,0) = \frac{4\mu}{k^2}(2-3k^2)c,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = \frac{8\mu(k^2-1)}{k^2\pi}c\alpha F(2;0.5;2;\alpha^2) = \frac{8\mu(k^2-1)}{k^2\pi}c\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{37}$$

а в області $1 < \alpha < \infty$ –

$$\theta(\alpha,0) = \frac{32}{3k^2}c\alpha^{-3}F(1.5;1.5;2.5;\alpha^{-2}) = \frac{32}{k^2}c\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \arcsin\frac{1}{\alpha}\right), \tag{38}$$

$$\omega_\beta(\alpha,0) = \frac{16}{3\pi}c\alpha^{-3}\frac{F(2;1;2.5;\alpha^{-2})}{\boldsymbol{\Gamma(0)}} = 0, \tag{39}$$

$$u_\alpha(\alpha,0) = -\frac{4c}{3\pi}\alpha^{-2}F(1.5;0.5;2.5;\alpha^{-2}) = -\frac{2c}{\pi}\left(\alpha\arcsin\frac{1}{\alpha} - \sqrt{1-\alpha^{-2}}\right),$$

$$u_\gamma(\alpha,0) = \frac{8c}{3k^2\pi}\alpha^{-2}\frac{F(1;1;2.5;\alpha^{-2})}{\mathbf{\Gamma(0)}} = 0\,, \tag{40}$$

$$\varphi_\alpha(\alpha,0) = -\frac{8c}{3k^2\pi}\alpha^{-3}\frac{F(2;1;2.5;\alpha^{-2})}{\mathbf{\Gamma(0)}} = 0\,,$$

$$\varphi_\gamma(\alpha,0) = \frac{16(2k^2-1)}{3k^2\pi}c\alpha^{-3}\frac{F(2;1;2.5;\alpha^{-2})}{\mathbf{\Gamma(0)}} = 0\,, \tag{41}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,0) = -\frac{64\mu(1-k^2)}{3k^2\pi}c\alpha^{-3}F(1.5;1.5;2.5;\alpha^{-2}) -$$

$$-\frac{8c}{3\pi}\mu\alpha^{-3}F(1.5;0.5;2.5;\alpha^{-2}) = -\frac{64\mu(1-k^2)}{k^2\pi}c\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} -\right.$$

$$\left.-\arcsin\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{4}{\pi}\mu c\left(\arcsin\frac{1}{\alpha} - \frac{\sqrt{1-\alpha^{-2}}}{\alpha}\right),$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0) = \frac{32\mu(k^2-1)}{3k^2\pi}c\alpha^{-3}\frac{F(2;1;2.5;\alpha^{-2})}{\mathbf{\Gamma(0)}} = 0\,. \tag{42}$$

У поданнях (39)–(42) слід врахувати, що $|\mathbf{\Gamma(0)}| = \infty$.

Аналіз означених поданнями (33)–(42) характеристик напружено-деформованого стану вказує на те, що в областях $0 \le \alpha \le 1$ і $1 < \alpha < \infty$ вони мають різні аналітичні вирази з розривом другого роду на межі області стягування $\alpha = 1$, причому об'ємна деформація $\theta(\alpha,0)$ і внутрішнє нормальне напруження $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,0)$ відповідно до подань (33), (37) і (38), (42) в околі точки $\alpha = 1$ є одночасно від'ємною і додатною, що, якщо це не нуль, фізично неможливо. Разом з тим компонента $\omega_\beta(\alpha,0)$ вектора $\mathbf{\Omega}$ і відповідно пружні кути повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$ і $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ дорівнюють нулеві поза нею (формула (40)). Це вказує на те, що припущення про відсутність дотичних напружень поза межею області стягування виділяє клас поверхонь, у яких пружні повороти не виникають і не поширюються. З механічної точки зору таку поверхню тіла можна трактувати як ідеально гнучку, (двовимірний аналог ідеально гнучкої нитки). При цьому нормальне переміщення $u_\gamma(\alpha,0)$ границі пружного півпростору в межах області стягування відповідно до формули (35) є півеліпсом зі зламом на краю $\alpha = 1$, а поза нею воно відсутнє (формула (40)), що підтверджує фізично суперечливу картину деформування границі за умови відсутності дотичних напружень поза областю $0 \le \alpha \le 1$.

Зокрема, якщо в умові (7) $f(\alpha^2) = 1$, радіальне переміщення $u_\alpha(\alpha,0)$ в області $1 < \alpha < \infty$ відповідно до подання (27) визначається так:

$$u_\alpha(\alpha,0) = -k^2 c a_0 \frac{\Gamma(2-q)F(2-q;1-q;3-q;\alpha^{-2})}{2^q\alpha^{3-2q}\Gamma(q)\Gamma(3-q)}, \tag{43}$$

де $F(2-q;1-q;3-q;\alpha^{-2})$ – гіпергеометрична функція Ґаусса, означена збіжним в точці $\alpha = 1$ за умови $q > 0$ гіпергеометричним рядом (15). Тобто можна стверджувати, що радіальне переміщення $u_\alpha(\alpha,0)$ відповідно до гіпотези суцільності є неперервним на межі області $0 \le \alpha \le 1$ і заникає на безмежності за умови $0 < q < 1.5$.

Якщо $q = 0.5$, то у поданні (43)

$$F(2-q;1-q;3-q;\alpha^{-2}) = F(1.5;0.5;2.5;\alpha^{-2}) =$$
$$= 1.5\alpha\left(\alpha^2 \arcsin \alpha^{-1} - \sqrt{\alpha^2 - 1}\right),$$

і в цьому випадку

$$u_\alpha(\alpha,0) = -2\pi^{-1}c\left(\alpha \arcsin \alpha^{-1} - \sqrt{1-\alpha^{-2}}\right), \tag{44}$$

що співпадає з радіальним переміщенням $u_\alpha(\alpha,0)$ (40) у класичному випадку за умови (9) відсутності дотичних напружень в області $1 < \alpha < \infty$ границі $\gamma = 0$ півпростору.

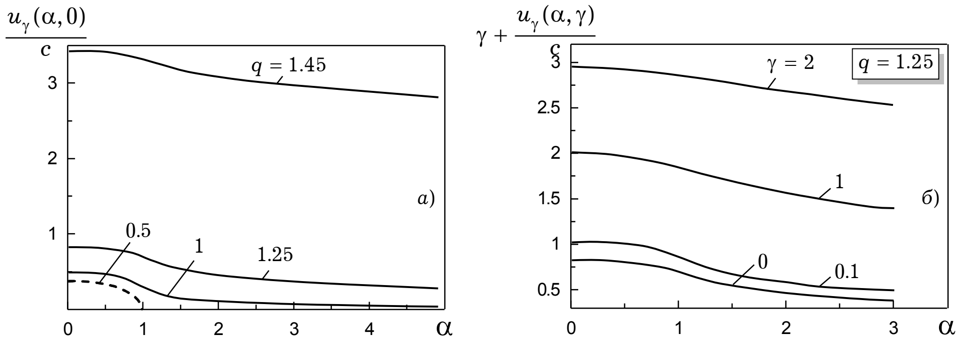

Рис. 2

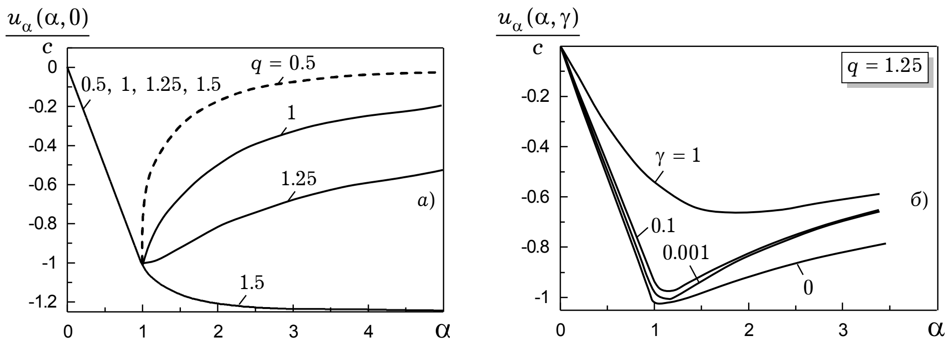

Рис. 3

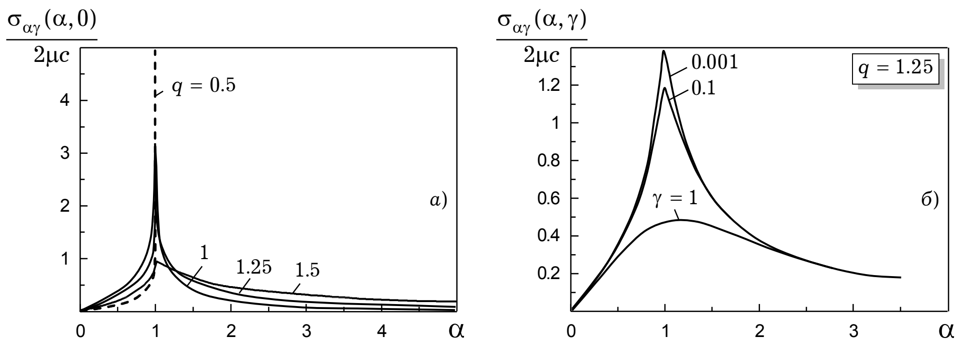

Рис. 4

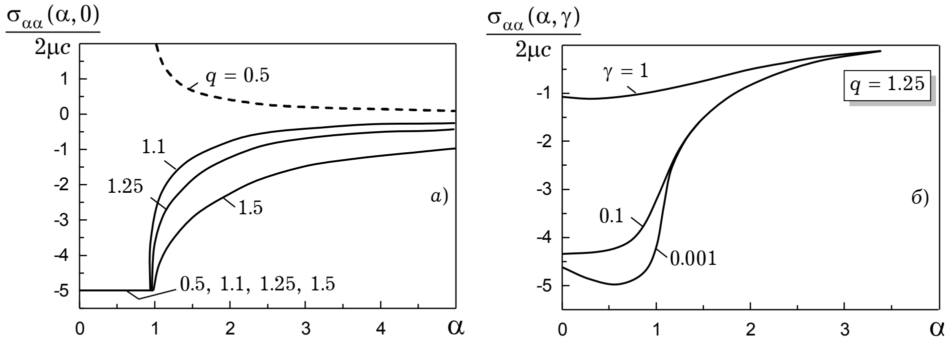

Рис. 5

Очевидно, що фізично більш адекватною є картина напружено-деформованого стану за умови $1 < q < 1.5$, про що говорить числовий аналіз, викладений на зображених вище рис. 2–5 (розрахунки виконано при $k^2 = 4$).

Висновки. Таким чином, застосування моделі деформування пружного півпростору з урахуванням пружних властивостей границі тіла вздовж його поверхні допомогло з'ясувати й довести наступне.

Відповідно до гіпотези суцільності пружні повороти неперервно поширюються вздовж границі тіла, створюючи її натяг. Цей натяг проявляється певним полем радіальних переміщень, в результаті чого появляються дотичні напруження, які з механічного погляду можна трактувати як необхідне довантаження границі тіла для забезпечення гладкості її деформування.

У межах запропонованої моделі методом розривних інтегралів Вебера – Шафгайтліна за довільного закону розподілу в крузі фіксованого радіуса радіальних переміщень на границі пружного півпростору віднайдено множину напружено-деформованих станів, які залежать від параметра q, $1 < q < 1.5$.

Доведено, що за вимоги (14) неперервності компонент вектора $\mathbf{\Omega}$ на межі $\alpha = 1$ множина регулярних розв'язків обмежена нерівністю $q > 1$. При цьому пружні кути повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$, $\varphi_\gamma(\alpha,0)$, як і усі інші характеристики напружено-деформованого стану, є неперервними на межі $\alpha = 1$, а дотичні напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,0)$ неперервно переходять в область $1 \le \alpha < \infty$ границі пружного півпростору за законом (42) і заникають, як α^{2q-4} (рис. 4).

З'ясовано, що класична умова (9) в області $1 \le \alpha < \infty$ границі пружного півпростору виконується у випадку $q = 0.5$. При цьому відповідно до подань (41) рівність нулеві пружних кутів повороту $\varphi_\alpha(\alpha,0)$, $\varphi_\gamma(\alpha,0)$ в області $1 \le \alpha < \infty$ межі пружного півпростору є свідченням того, що вони за $q = 0.5$ з навантаженої області не поширюються, і в цьому випадку механічні властивості поверхні нагадують властивості абсолютно гнучкої поверхні.

Таким чином, рівність нулю дотичних напружень на границі тіла обумовлює її властивість бути ідеально гнучкою поверхнею і цей факт проявляється тільки за наявності локальних поворотів. У цьому випадку відповідно до подань (35) і (40) вертикальне переміщення $u_\gamma(\alpha,0)$ границі пружного півпростору в області $0 \le \alpha \le 1$ є півеліпсом, а в області $1 \le \alpha < \infty$ – воно є нульовим, утворюючи злам на межі $\alpha = 1$ (рис. 2). Крім того, відповідно до подань (33) і (38) у класичному випадку для $q = 0.5$ перший інваріант тензора деформації $\theta = \operatorname{div}\mathbf{u}$ є розривним в точці $\alpha = 1$, що суперечить моделі твердого деформівного тіла.

1. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Некласична математична модель деформування пружного півпростору з тонким дисковим абсолютно жорстким включенням // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природ. науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 77–82.
2. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Неклассическая модель деформирования тел с трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 63–75.
3. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 17–33.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1100 с.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. – Москва: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с.
6. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
7. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
8. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.

ЭФФЕКТ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАДИАЛЬНОМ СТЯГИВАНИИ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ ГРАНИЦЫ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Предложена новая постановка задач линейной теории упругости для полупространства со смешанными краевыми условиями, решение которой даёт физически корректную математическую модель напряженно-деформированного состояния (в том числе малость упругих поворотов). Новизна постановки состоит в том, что наряду с классическими краевыми условиями она содержит обусловленное гипотезой сплошности требование непрерывности компонент вектора локального жесткого поворота $\mathbf{\Omega} = 0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ *на линии раздела краевых условий. Доказано, что выполнение этого требования можно осуществить путём стягивания по определённому закону границы полупространства вне области усадки. При этом все характеристики напряженно-деформированного состояния являются непрерывными и ограниченными на линии раздела краевых условий.*

EFFECT OF TANGENTIAL STRESSES AT RADIAL CONTRACTION OF ELASTIC HALF-SPACE BOUNDARY IN CIRCULAR DOMAIN

A new statement of the problem of linear elasticity theory for half-space with mixed boundary conditions is proposed. The solution of this problem gives us a physically correct mathematical model of the stress-strain state (in particular, smallness of elastic rotations). The novelty of statement of the problem is that it contains, together with classical boundary conditions, the requirement (stipulated by hypothesis of entirety) of continuity of the vector's component of local rigid rotation $\mathbf{\Omega} = 0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ *on the line of boundary conditions. In this connection all characteristics of the stress-strain state are continuous and, consequently, bounded on the line of boundary conditions.*

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
05.10.05