УДК 539.3

С. П. Шевчук

ВПЛИВ ПРУЖНОГО СТРІЧКОВОГО ВКЛЮЧЕННЯ НА ДЕФОРМАЦІЮ ПОВЕРХНІ АНІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Методом функцій стрибка розв'язано антиплоску задачу теорії пружності для анізотропного півпростору з тонким анізотропним пружним включенням. Досліджено вплив параметрів (довжини, заглиблення, пружності) тонкостінного включення на поле деформацій біля поверхні анізотропного півпростору.

Вступ. Усі реальні тіла мають численні дефекти структури матеріалу, параметри яких мають не лише стохастичний, але й детермінований характер. Поширеними дефектами в кристалічних тілах є тріщини, тонкі включення, прошарки та ін. Поряд із цим сучасні композиційні матеріали є конструкційно неоднорідними, причому в ролі арматури вони часто містять волокна й стрічки. Під час навантаження біля вершин тонкостінних неоднорідностей виникає значна концентрація напружень, через що можуть утворюватись і потім зростати тріщини, матеріал буде пластично деформуватись. Все це зменшує міцність матеріалу, тривалість функціонування конструкцій чи навіть спричиняє раптове їх руйнування.

У задачах технічної діагностики, пошуку копалин постає проблема визначення механічних і геометричних параметрів чужорідних елементів за відомими переміщеннями та деформаціями поверхні досліджуваного тіла. Для розв'язання цієї складної багатопараметричної оберненої задачі потрібні деякі вхідні експериментальні дані, результати інших вимірювань. Першим кроком до вирішення цієї проблеми є детальний аналіз впливу параметрів дефекту на напружено-деформований стан із використанням розв'язку прямої задачі механіки для середовищ із такими включеннями.

У роботі [4] розв'язано задачу теорії пружності для тонких пружних включень на межі поділу двох анізотропних матеріалів в умовах поздовжнього зсуву та виконано конкретні обчислення для окремого включення всередині однорідного анізотропного середовища. Антиплоска задача теорії пружності для пакету анізотропних смуг, що містять плоскі стрічкові неоднорідності, розв'язана у роботі [5]. Обчислення здійснено для кусково-однорідної анізотропної площини, яка складається із двох півплощин, коли всередині однієї із півплощин розміщена пружна стрічка. Загальніший розв'язок отримано у праці [6]. Зовнішнє навантаження задається не лише зсувним зусиллям на безмежності, але й гвинтовими дислокаціями та зосередженими силами у кожній із смуг.

У цій роботі методом функцій стрибка розв'язано антиплоску задачу теорії пружності для анізотропного півпростору з тонким анізотропним пружним включенням. Зовнішнє навантаження задане рівномірно розподіленим зсувним зусиллям на нескінченності σ_{xz}^{∞}. Навантаження на поверхні півпростору відсутні. Детально досліджено поле деформацій на вільній поверхні.

Формулювання задачі. Розглянемо задачу поздовжнього зсуву вздовж осі Oz для анізотропного півпростору $y > 0$ з пружними характеристиками a_{km}, $k, m = 4, 5$. З огляду на характер антиплоскої задачі напружено-деформований стан у кожній площині, перепендикулярній до напряму зсуву, однаковий і тому достатньо обмежитись аналізом полів у одній із них, зокрема xOy. Усередині півлощини вздовж відрізка L розміщене тонке пружне включення, нахилене під кутом φ до межі півпростору $y = 0$. У центрі O_0 відрізка L розмістимо початок двох локальних декартових систем координат $x_0O_0y_0$ і $s_0O_0n_0$ (де $O_0s_0 \parallel L$, $O_0x_0 \parallel Ox$), зв'язаних залежністю

$$z \equiv x + iy = z_0 + z_{00}, \qquad z_0 = x_0 + iy_0, \qquad s_0 + in_0 = z_0 e^{-i\varphi}, \tag{1}$$

де $z_{00} = iH$ – координата центра включення в основній системі координат, H – величина заглиблення включення. Включення має довжину $2a$ і сталу товщину $2h$. Пружні характеристики включення a_{km}^0, $k, m = 4, 5$.

Побудова розв'язку. За принципом спряження методу функцій стрибка тонке включення вилучається з розгляду, а його вплив на тіло зводиться до утворення на L стрибків вектора напружень та похідної від вектора переміщень:

$$\sigma_{n_0z}^- - \sigma_{n_0z}^+ = f_5(s_0), \qquad \frac{\partial}{\partial s_0}(w^- - w^+) = f_6(s_0), \qquad s_0 \in L. \tag{2}$$

Причому $f_5(s_0) = f_6(s_0) = 0$, якщо $s_0 \notin L$. Функції стрибка, взагалі кажучи, є невідомими.

Умови взаємодії тонкого пружного анізотропного включення із зовнішнім середовищем, які зв'язують між собою напруження та переміщення на поверхнях матриці, що прилягають до протилежних боків включення, мають вигляд [4]

$$\boldsymbol{\sigma}^+(s_0) + \boldsymbol{\sigma}^-(s_0) = \left(2\mathbf{N} + \frac{1}{h}\int_{-a}^{s_0} \mathbf{f}(t)\,dt\right)\mathbf{L}, \qquad s_0 \in [-a, a]. \tag{3}$$

Тут

$$\boldsymbol{\sigma}(z) = \left(\sigma_{n_0z}(z), \frac{\partial w(z)}{\partial s_0}\right); \quad \mathbf{f}(t) = \left(f_5(t), f_6(t)\right); \quad \mathbf{L} = \frac{1}{a_{44}'^0}\begin{Vmatrix} -a_{45}'^0 & |r'^0|^2 \\ -1 & -a_{45}'^0 \end{Vmatrix};$$

$\mathbf{N} = (N_1, N_2)$ – вектор апріорних констант,

$$N_1 = \sigma_{s_0z}^0(-a)\frac{a_{44}'}{\max(a_{44}', a_{44}'^0)},$$

$$N_2 = \frac{\min(a_{44}', a_{44}'^0)}{a_{44}'}\left[-a_{44}'\sigma_{n_0z}^0(-a) - a_{45}'\sigma_{s_0z}^0(-a)\right]; \; r'^0 = \sqrt{(a_{45}'^0)^2 - a_{44}'^0 a_{55}'^0}.$$

Сталі a_{km}' характеризують пружні властивості матеріалу у системі координат $s_0O_0n_0$ і їх зв'язок з a_{km} наведено у праці [3, с. 44, формула (6.2)].

Для поздовжнього зсуву у напрямі осі Oz співвідношення закону Гука та рівняння рівноваги мають вигляд [3]

$$\frac{\partial w}{\partial y} = a_{44}\sigma_{yz} + a_{45}\sigma_{xz}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = a_{45}\sigma_{yz} + a_{55}\sigma_{xz}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{5}$$

Очевидна різниця між стандартним позначенням комплексної змінної $z = x + iy$ та координати z. Якщо ввести функцію напружень F згідно з означенням

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \sigma_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{6}$$

то рівняння (5) задовольнятиметься тотожно, а з (4) отримаємо диференціальне рівняння

$$a_{55}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2a_{45}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + a_{44}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0. \tag{7}$$

Функцію напружень F можна подати у вигляді суперпозиції однорідного F^0, породженого зовнішнім навантаженням за відсутності включень, та збуреного $\hat{F}$ розв'язків. У свою чергу, $\hat{F}$ є сумою основного збуреного розв'язку $\hat{F}^0$ для безмежної площини з такими самими механічними властивостями та тими ж включеннями, які належать півплощині, та збуреного коригувального $\hat{F}^1$, який повинен враховувати вільну межу півпростору, не породжуючи стрибків напружень і переміщень на лінії L [6]:

$$F(z) = F^0(z) + \hat{F}(z) = F^0(z) + \hat{F}^0(z) + \hat{F}^1(z). \tag{8}$$

Однорідний розв'язок відповідає впливу зовнішнього навантаження на тіло без дефектів, а тому під час переходу через вісь включення він не викликає стрибків напружень і переміщень. Тому збурений розв'язок повинен задовольняти нульові крайові умови та породжувати стрибки напружень і похідних від переміщень на лінії L:

$$\hat{\sigma}^-_{n_0 z} - \hat{\sigma}^+_{n_0 z} = f_5(s_0), \qquad \frac{\partial}{\partial s_0}(\hat{w}^- - \hat{w}^+) = f_6(s_0), \qquad s_0 \in L. \tag{9}$$

Напружений стан однорідної анізотропної площини з включенням описується залежностями [6]

$$\hat{\sigma}^0_{y_0 z} = \frac{i}{4}\left(t_5(z_1) - t_5(z_2)\right) - \frac{1}{4a_{55}\alpha}\left(t_6(z_1) + t_6(z_2)\right),$$

$$\hat{\sigma}^0_{x_0 z} = \frac{1}{4}\left((\alpha - i\beta)t_5(z_1) + (\alpha + i\beta)t_5(z_2)\right) +$$

$$+ \frac{1}{4a_{55}\alpha}\left((\beta + i\alpha)t_6(z_1) + (\beta - i\alpha)t_6(z_2)\right). \tag{10}$$

Тут

$$t_r(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{f_r(t)dt}{t - z}, \qquad r = 5, 6; \qquad z_1 = x_0 + \beta y_0 + i\alpha y_0, \qquad z_2 = \overline{z}_1;$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{a_{44}a_{55} - (a_{45})^2}}{a_{55}}, \qquad \beta = \frac{a_{45}}{a_{55}}.$$

Для повернутого на кут φ відносно осі $O_0 x_0$ включення в однорідній площині вираз для напружень (10) у системі координат $s_0 O_0 n_0$ збережеться, лише у ньому слід формально замінити x_0 та y_0 на s_0 та n_0, а сталі a_{km}, α, β – на a'_{km}, α', β' відповідно, де $\alpha' = \dfrac{\sqrt{a'_{44}a'_{55} - (a'_{45})^2}}{a'_{55}}$, $\beta' = \dfrac{a'_{45}}{a'_{55}}$. Скориставшись залежністю

$$\sigma_{y_0 z} + i\sigma_{x_0 z} = e^{-i\varphi}(\sigma_{n_0 z} + i\sigma_{s_0 z}), \tag{11}$$

отримаємо вираз для напружень від повернутого на кут φ включення в однорідній півплощині.

Залежності (10), (11) дають основний збурений розв'язок для півплощини.

Розв'язок рівняння (7) у просторі зображень інтегрального перетворення Фур'є має вигляд

$$F^F(\xi, y) = A_1(\xi)e^{\lambda_1 y} + A_2(\xi)e^{\lambda_2 y}, \tag{12}$$

де $\lambda_1 = \alpha|\xi| - i\beta\xi$, $\lambda_2 = -\alpha|\xi| - i\beta\xi$; $A_1(\xi)$ і $A_2(\xi)$ – довільні функції.

Оскільки функція напружень (12) повинна бути обмеженою, коли $y \to \infty$, то

$$F^F(\xi, y) = A_2(\xi)e^{\lambda_2 y}. \tag{13}$$

У просторі зображень справджуються співвідношення

$$\sigma_{xz}^F = \frac{\partial F^F}{\partial y}, \qquad \sigma_{yz}^F = i\xi F^F. \tag{14}$$

Із (13), (14) отримаємо структуру коригувального збуреного розв'язку в просторі зображень інтегрального перетворення Фур'є

$$\hat{\sigma}_{yz}^{1F} = i\xi A_2(\xi)e^{\lambda_2 y}, \qquad \hat{\sigma}_{xz}^{1F} = \lambda_2 A_2(\xi)e^{\lambda_2 y}. \tag{15}$$

Невідомі функції $A_1(\xi)$ і $A_2(\xi)$ знайдемо, задовольнивши крайові умови, і остаточно визначимо коригувальний збурений розв'язок у вигляді

$$\hat{\sigma}_{yz}^1 = -\frac{\gamma'}{4}\left[t_5(z_3) + \frac{i}{a'_{55}\alpha'}t_6(z_3)\right] - \frac{\bar{\gamma}'}{4}\left[t_5(\bar{z}_3) - \frac{i}{a'_{55}\alpha'}t_6(\bar{z}_3)\right],$$

$$\hat{\sigma}_{xz}^1 = -\beta\hat{\sigma}_{yz}^1 - \frac{i\alpha\gamma'}{4}\left[t_5(z_3) + \frac{i}{a'_{55}\alpha'}t_6(z_3)\right] + \frac{i\alpha\bar{\gamma}'}{4}\left[t_5(\bar{z}_3) - \frac{i}{a'_{55}\alpha'}t_6(\bar{z}_3)\right], \tag{16}$$

де

$$\gamma' = \alpha'\sin\varphi + i(\cos\varphi - \beta'\sin\varphi), \qquad z_3 = iS_1\alpha y - S_1 x - S_1\beta y - S_2,$$

$$S_1 = \beta'\sin\varphi - \cos\varphi + i\alpha'\sin\varphi, \qquad S_2 = H(\sin\varphi + \beta'\cos\varphi) + iH\alpha'\cos\varphi.$$

Використовуючи вирази (8), (10), (16), отримаємо повний розв'язок, який залежить від функцій стрибка f_i, $i = 5, 6$. Підставивши цей розв'язок в умови взаємодії (3), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно функцій f_i, яку розв'язуємо методом колокацій [2]. За відомими функціями стрибка та однорідним розв'язком задачі можна обчислити напружено-деформований стан у довільній точці тіла з включенням.

Приклад. Дослідимо вплив параметрів тонкостінного ізотропного включення на поле деформацій для випадку, коли матеріалом півпростору є однонапрямлений намотувальний склопластик [1]:

$$a_{44} = 0.2\ \text{ГПа}^{-1}, \qquad a_{55} = 0.174\ \text{ГПа}^{-1}, \qquad a_{45} = 0,$$

а включення паралельне до межі півпростору. Міру його жорсткості охарактеризуємо параметром g:

$$a_{44}^0 = 0.1\cdot 10^g\ \text{ГПа}^{-1}, \qquad a_{55}^0 = 0.1\cdot 10^g\ \text{ГПа}^{-1}, \qquad a_{45}^0 = 0.$$

На рис. 1 зображено залежність компоненти деформації $\varepsilon_{xz}^* = \hat{\varepsilon}_{xz}/\varepsilon_{xz}^0$ нормованого збуреного розв'язку від безрозмірної координати $x^* = x/a$ на межі півпростору $y = 0$ для значень $g = -6, -2, -1, 0, 6$ (значенню $g = -6$ відповідає практично абсолютно жорстке включення, $g = 6$ – майже щілина). Відносна товщина включення $h/a = 0.1$, а його відносне заглиблення $H^* = H/a = 0.5$. Помітно, що ε_{xz}^* змінює свій знак на протилежний в околі $x^* = 1$, тобто над вершиною включення. За поздовжнього зсуву зусиллями σ_{xz}^∞ тільки для абсолютно жорсткого включення ($g = -6$) і включень, жорсткіших від середовища ($g = -6, -2, -1$), збурений напружено-деформований стан є істотним. Для податніших він є дуже малим і для щілини – дорівнює нулеві. Тому надалі вплив заглиблення і довжини включення на поле деформацій досліджено для абсолютно жорсткого включення. У випадку поздовжнього зсуву зусиллями σ_{yz}^∞ результат є протилежним – для щілини та включень,

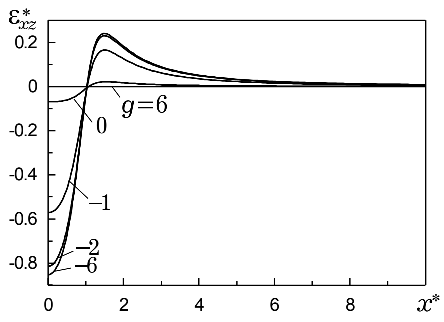

Рис. 1

податніших від середовища, збурений напружено-деформований стан є істотним, а для абсолютно жорсткого включення він дорівнює нулеві.

Рис. 2 ілюструє зміну ε^*_{xz} на вільній поверхні для різних значень відносної заглибленості ($H^* = 0.5$, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5) абсолютно жорсткого включення при $h/a = 0.1$. Бачимо, що, чим більше заглиблене включення, тим далі від проекції його краю на вільну поверхню компонента деформації ε^*_{xz} змінює свій знак, а її величина істотно зменшується.

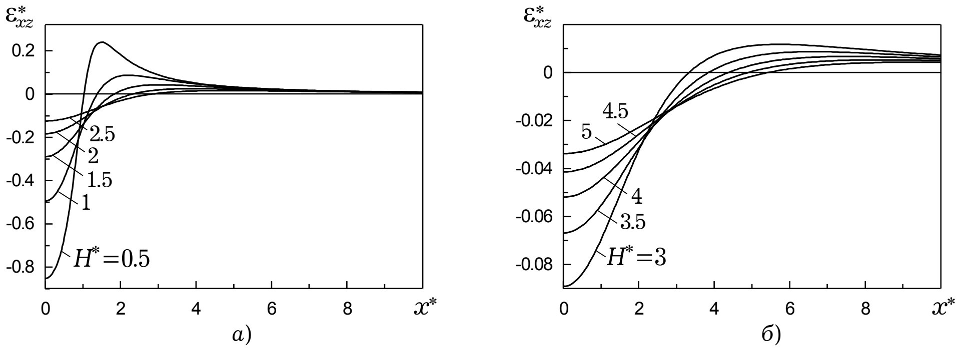

Рис. 2

На рис. 3 відображено вплив відносної довжини $a^* = a/H$ включення на залежність компоненти нормованої деформації ε^*_{xz} від безрозмірної координати $x^* = x/H$ на вільній поверхні $y = 0$. Помітно, що ε_{xz} змінює свій знак на протилежний в околі $x^* = a^*$, тобто над проекцією вершини включення. На рис. 3–5 кривим зі значеннями $a^* = 1, 2, 3, 4, 5$ відповідають такі значення відносної товщини включення: $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}$.

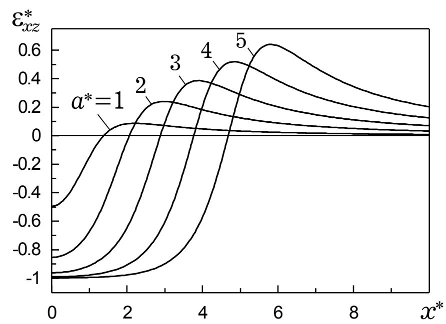

Рис. 3

Усередині тіла ($y^* = y/H = 0.2$) обидві компоненти деформації ε^*_{xz} і $\varepsilon^*_{yz} = \hat{\varepsilon}_{yz}/\varepsilon^0_{yz}$ нормованого збуреного розв'язку не дорівнюють нулеві. Це дає додаткову інформацію про довжину включення. Компонента деформації ε^*_{yz} досягає екстремальних значень над проекцією вершини включення. Ці залежності зображено на рис. 4, 5.

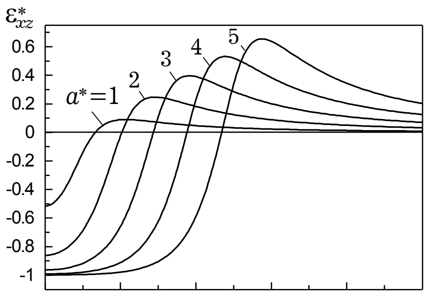

Рис. 4

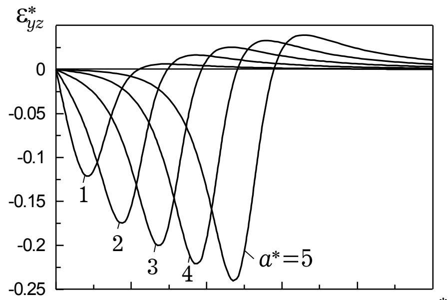

Рис. 5

Зі зробленого вище аналізу випливає, що, отримавши дані про збурене поле деформацій на поверхні пружного півпростору або під нею, можемо визначити розміри і заглиблення включення, яке збурило поле.

1. *Ашкенази Е. К., Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Ленинград: Машиностроение, 1980. – 227 с.
2. *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Метод колокацій розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1990. – Вип. 242. – С. 8–13.
3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
4. *Сулим Г. Т.* Продольный сдвиг анизотропной среды с ленточными включениями / Редкол. журн. «Физ.-хим. механика материалов». – Львов, 1987. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 15.01.87, № 329–В87.
5. *Сулим Г. Т., Шевчук С. П.* Поздовжній зсув шаруватих анізотропних середовищ зі стрічковими неоднорідностями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 3. – С. 90–97.
6. *Sulym G., Shevchuk S.* Antiplane problem for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations // J. Theor. and Appl. Mech. – 1999. – **37**, No. 1. – P. 47–63.

ВЛИЯНИЕ УПРУГОГО ЛЕНТОЧНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ НА ДЕФОРМАЦИЮ ПОВЕРХНОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

Методом функций скачка решена антиплоская задача теории упругости для анизотропного полупространства с тонким анизотропным упругим включением. Исследовано влияние параметров (длины, углубления, упругости) тонкостенного включения на поле деформаций возле поверхности анизотропного полупространства.

INFLUENCE OF ELASTIC RIBBON INCLUSION ON ANISOTROPIC HALF-SPACE SURFACE DEFORMATION UNDER LONGITUDINAL SHEAR

The antiplane problem of elasticity theory for an anisotropic half-space with the thin anisotropic elastic inclusion is solved by the jump function method. The influence of thin-walled inclusion parameters (its dimensions, deepening, elasticity) on field of deformations near an anisotropic half-space surface is investigated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.05.05