

**ДВОВІСНИЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ І ДВОМА РАДІАЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ, БЕРЕГИ ЯКИХ КОНТАКТУЮТЬ**

*Досліджено двовісний згин ізотропної пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами з урахуванням контакту їх берегів. Із використанням теорії функцій комплексної змінної і комплексних потенціалів розв'язок задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз контактного тиску між берегами тріщин і коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів.*

**Вступ.** Розвиток машинобудівних, авіаційних, будівельних, суднобудівних та інших технологій в багатьох випадках пов'язаний із використанням пластинчастих елементів, що обумовлено їх порівняною легкістю. Під час експлуатації таких елементів можуть виникати тріщини і важливо знати, яким чином вони впливають на міцність конструкцій. Одним із основних завдань при оцінці міцності конструктивного елементу з тріщинами є визначення коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, за допомогою яких характеризуємо напружено-деформований стан в околі вершин тріщин.

Вперше задачу про згин пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною розглянув М. L. Williams [34], використовуючи класичну теорію і вважаючи, що береги тріщини не контактують. Потім ця задача досліджувалась багатьма науковцями з використанням класичної та уточнених теорій згину пластин. Систематизація цих результатів наведена в роботах [1, 22].

Д. Р. Jones і J. L. Swedlow [32] вперше застосували числові методи для визначення напружень і переміщень біля вершини тріщини, враховуючи явище закриття тріщини за згину. Вони скористалися методом скінченних елементів, який базувався на теорії Кірхгофа. Пізніше Е. S. Heming (Jr.) [31] розв'язав таку ж задачу, використовуючи теорію Міндліна шостого порядку для згину пластин. У праці [29] досліджено закриття тріщини за згину пластини з використанням тривимірного методу скінченних елементів.

Розв'язок задачі про згин пластини з наскрізною тріщиною з урахуванням контакту її берегів на основі теорії Кірхгофа – Лява методом інтегральних рівнянь за припущення, що береги тріщини контактують по всій її довжині на верхній або нижній основі пластини, побудовано в [25]. Явище закриття тріщини з використанням методу скінченних елементів вивчалось у [33], а в [35] вивчався контакт берегів тріщин із використанням класичної теорії і методу скінченних елементів.

Дослідження задачі про згин пластини з наскрізною тріщиною, в якій береги контактують по висоті пластини, наведено в [30]. У праці [7] наведено результати експериментальних досліджень контакту берегів тріщини при згині пластини методом каустик у прохідному світлі, які підтвердили наявність мембранної складової поля напружень біля тріщини, що є прямим наслідком контактної взаємодії берегів тріщини при згині пластини.

У працях [5, 6, 17, 24, 26, 27, 28] досліджували згин безмежної і напівскінченної пластини з тріщинами, використовуючи теорію Кірхгофа – Лява, вважаючи, що тріщина контактує по всій довжині на верхній або нижній основі пластини. У роботах [10, 11] та [12] розглянуто згин кусково-однорідної пластини з різним розміщенням тріщини, береги якої контактують, відносно лінії поділу матеріалів. У роботі [13] досліджувалась задача про згин пластин з контактуючою тріщиною із використанням теорій шостого порядку. Вивчалась також задача про згин пластинки, послабленої наскрізною тріщиною уздовж дуги кола, береги якої контактують [2, 3, 4]. У роботах [9, 14, 21] досліджувався згин пластини з круговим отвором і тріщиною, береги якої контактують, з використанням класичної теорії згину пластин.

На основі вищенаведеного бачимо, що значно зросла зацікавленість дослідників задачами згину пластин з тріщинами, береги яких контактують. У пропонованій роботі проведено дослідження двовісного згину пластини з круговим отвором і двома радіальними розміщеними на одній прямій тріщинами, береги яких контактують.

**Постановка задачі.** Нехай нескінченна ізотропна пластина завтовшки  $2h$  містить круговий отвір радіуса  $R$  і дві радіальні тріщини завдовжки  $2\ell$  кожна, які вільні від зовнішнього навантаження і знаходяться на одній прямій. Приймаючи гіпотезу Кірхгофа про жорстку нормаль, вважатимемо, що береги тріщин приходять у гладкий контакт по лінії на верхній основі пластини, у яку вироджується деяка реальна область контакту [25]. Виберемо декартову систему координат  $Oxy\tilde{z}$  так, щоб координатна площина  $Oxy$  лежала в серединній площині пластини, а початок координат  $O$  співпадав з центром кругового отвору. У площині  $Oxy$  введемо полярну систему координат  $r, \theta$  з полюсом у точці  $O$  і полярною віссю  $Ox$ . Вважатимемо, що центри тріщин  $O_j$  знаходяться на відстані  $x_{0j}$  від точки

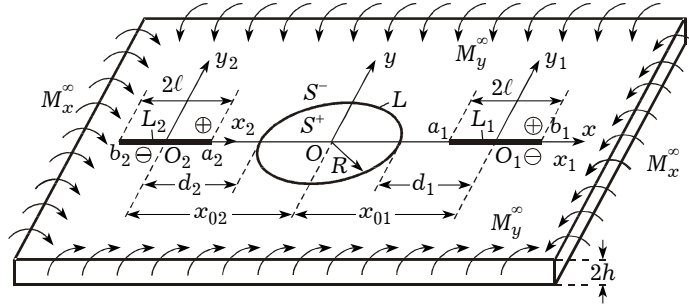


Рис. 1

$O$ , причому  $x_{0j} > R + \ell$ ,  $j = 1, 2$ . Пов'яжемо з тріщинами декартові системи координат  $O_jx_jy_j$  (див. рис. 1). Позначимо область усередині кругового отвору через  $S^+$ , ззовні – через  $S^-$ , лінії, де розміщені тріщини, – через  $L_j$ , а коло – через  $L$ . Точки площини  $Oxy$ , що співпадають з кінцями тріщин, позначимо через  $a_j$  і  $b_j$ ,  $j = 1, 2$ . Вважатимемо, що пластина згинається на нескінченності рівномірно розподіленими моментами  $M_x^\infty$  і  $M_y^\infty$  (див. рис. 1).

Оскільки береги тріщини контактують, то крім згинальних моментів виникають мембранні зусилля [25]. Тому розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини (теорія Кірхгофа – Лява), при таких крайових умовах:

– для кругового отвору

$$M_r = 0, \quad P_r = 0, \quad t \in L, \quad (1)$$

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad t \in L; \quad (2)$$

– для тріщин

$$P^+ = P^- = 0, \quad M_{y_j}^+ = M_{y_j}^- \equiv M_{y_j}, \quad x_j \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

$$\sigma_{x_jy_j}^+ = \sigma_{x_jy_j}^- = 0, \quad \sigma_{y_jy_j}^+ = \sigma_{y_jy_j}^- \equiv \sigma_{y_jy_j}, \quad x_j \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

$$M_{y_j} = -2h^2\sigma_{y_jy_j}, \quad x_j \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial [v_{\Pi}]}{\partial x_j} + h \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial y_j} \right] = 0, \quad x_j \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

де  $\sigma_{x_jy_j}$ ,  $\sigma_{y_jy_j}$ ,  $\sigma_r$  і  $\sigma_{r\theta}$  – компоненти тензора напружень відповідно в  $j$ -й декартовій і полярній системах координат з початком у точці  $O$ ;  $v_{\Pi}$  – про-

екція вектора переміщення точки на вісь  $O_j y_j$  у плоскій задачі, а  $w$  – прогин пластини у задачі про згин;  $M_r$  і  $M_{y_j}$  – згинальні моменти;  $P^\pm$  і  $P_r$  – узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні сили у декартовій і полярній системах координат;  $[f] = f^+ - f^-$ ; індексами «+» і «-» позначено граничні значення функції при прямуванні точки площини до  $j$ -ї тріщини при  $y_j \rightarrow \pm 0$ .

**Побудова розв'язку задачі про згин пластини.** Комплексні потенціали для задачі згину [18] подамо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \Phi_K(z) + \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2), \\ \Psi(z) &= \Psi_K(z) + \Psi_1(z_1) - x_{01}\Phi'_1(z_1) + \Psi_2(z_2) + x_{02}\Phi'_2(z_2),\end{aligned}\quad (7)$$

де  $z = x + iy$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $z_j = z + (-1)^j x_{0j}$ ,  $x_{0j} = R + d_j$ ,  $j = 1, 2$ ; функції  $\Phi_j(z_j)$  і  $\Psi_j(z_j)$  голоморфні ззовні  $j$ -ї тріщини та зникають на нескінченності, функції  $\Phi_K(z)$  і  $\Psi_K(z)$  голоморфні ззовні кола і при великих  $|z|$  їх можна подати у вигляді [18]

$$\Phi_K(z) = \Gamma + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Psi_K(z) = \Gamma' + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (8)$$

де  $\Gamma = -\frac{M_y^\infty + M_x^\infty}{4D(1+\nu)}$ ;  $\Gamma' = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-\nu)}$ ;  $D = \frac{2Q}{3(1-\nu^2)}$ ;  $Q = Eh^3$ ;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Увівши функції [18]

$$\begin{aligned}\Omega_j(z_j) &= -\bar{\Phi}_j(z_j) - z_j \cdot \bar{\Phi}'_j(z_j) - \bar{\Psi}_j(z_j), \quad j = 1, 2, \\ \Phi_K(z) &= -\bar{\Phi}_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \cdot \bar{\Phi}'_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \cdot \bar{\Psi}_K\left(\frac{R^2}{z}\right), \quad z \in S^+, \end{aligned}$$

напружено-деформований стан пластини визначимо на основі формул

$$\begin{aligned}\Phi_K(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \overline{\Phi_K(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) + \\ + \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) \left\{ \overline{\Phi_1(z_1)} + \overline{\Phi_2(z_2)} \right\} + \frac{\bar{z}}{z} \left\{ \Omega_1(\bar{z}_1) + \Omega_2(\bar{z}_2) - \right. \\ \left. - (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_1(z_1)} - (z_2 - \bar{z}_2) \overline{\Phi'_2(z_2)} \right\} = \tilde{g},\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\tilde{x} \Phi_K(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \overline{\Phi_K(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \tilde{x} \left\{ \Phi_1(z_1) + \right. \\ \left. + \Phi_2(z_2) \right\} - \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) \left\{ \overline{\Phi_1(z_1)} + \overline{\Phi_2(z_2)} \right\} - \frac{\bar{z}}{z} \left\{ \Omega_1(\bar{z}_1) + \Omega_2(\bar{z}_2) - \right. \\ \left. - (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_1(z_1)} - (z_2 - \bar{z}_2) \overline{\Phi'_2(z_2)} \right\} = \tilde{f},\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\Phi_m(z_m) - \Omega_m(\bar{z}_m) + (z_m - \bar{z}_m) \overline{\Phi'_m(z_m)} + \Phi_K(z) + \left(1 + \frac{R^2}{\bar{z}^2}\right) \overline{\Phi_K(z)} + \\ + z \overline{\Phi'_K(z)} + \frac{R^2}{\bar{z}^2} \left\{ \Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_K(z)} \right\} + \Phi_j(z_j) + \overline{\Phi_j(z_j)} + \\ + z_m \overline{\Phi'_j(z_j)} + (z_{0m} - z_{0j}) \overline{\Phi'_j(z_j)} - \overline{\Phi_j(z_j)} - \bar{z}_j \overline{\Phi'_j(z_j)} - \\ - \Omega_j(z_j) = \partial_{x_m} g_m, \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{\alpha}\Phi_m(z_m) + \Omega_m(\bar{z}_m) - (z_m - \bar{z}_m)\overline{\Phi'_m(z_m)} + \tilde{\alpha}\Phi_K(z) - \left(1 + \frac{R^2}{\bar{z}^2}\right)\overline{\Phi_K(z)} - \\
& - z\overline{\Phi'_K(z)} - \frac{R^2}{\bar{z}^2}\left\{\Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z}\overline{\Phi'_K(z)}\right\} + \tilde{\alpha}\Phi_j(z_j) - \overline{\Phi_j(z_j)} - \\
& - z_m\overline{\Phi'_j(z_j)} - (z_{0m} - z_{0j})\Phi'_j(z_j) + \overline{\Phi_j(z_j)} + \bar{z}_j\overline{\Phi'_j(z_j)} + \\
& + \Omega_j(\bar{z}_j) = f_m, \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m, \quad (12)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
r = z\bar{z}, \quad z_m = x_m + iy_m, \quad \tilde{\alpha} = \frac{3 + \nu}{1 - \nu}, \quad g_m = i\partial_{y_m} w + \partial_{x_m} w, \quad z_{01} = x_{01}, \quad z_{02} = -x_{02}, \\
z_j = z_{0m} - z_{0j} + x_m, \quad \tilde{f} = p \left\{ M_r + i\tilde{c}'_0 + iH_{r\theta} + i \int_0^s N_n(s) ds \right\}, \quad p = -\frac{1}{D(1 - \nu)}, \\
f_m = p \left\{ M_{y_m} + i\tilde{c}'_m + iH_{x_my_m} + i \int_{-\infty}^t N_{y_m}(\tau) d\tau \right\}, \quad \tilde{g} = \frac{1}{iz} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left[ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] e^{i\theta} \right).
\end{aligned}$$

Функцію  $\Phi_K(z)$  можна подати у вигляді [18]

$$\Phi_K(z) = \bar{\Gamma}' \frac{R^2}{z^2} + O(1), \quad |z| \rightarrow 0. \quad (13)$$

На основі крайових умов (3) і залежності (12) отримаємо задачу лінійного спряження

$$(\tilde{\alpha}\Phi_m(z_m) - \Omega_m(z_m))^+ - (\tilde{\alpha}\Phi_m(z_m) - \Omega_m(z_m))^- = 0, \quad x_m \in L_m, \quad m = 1, 2,$$

розв'язавши яку, одержимо

$$\Omega_m(z_m) = \tilde{\alpha}\Phi_m(z_m), \quad m = 1, 2.$$

Якщо додати залежності (11) і (12), матимемо співвідношення

$$\Phi_m(z_m) + \tilde{\alpha}\Phi_m(z_m) + \Phi_K(z) + \tilde{\alpha}\Phi_K(z) = \partial_{x_m} g_m + f_m, \quad m = 1, 2,$$

і якщо тепер врахувати крайові умови (3), то на основі них отримуємо задачу лінійного спряження

$$\Phi_m^+(t) - \Phi_m^-(t) = y_m(t), \quad t \in L, \quad m = 1, 2, \quad y_m(x_m) = \frac{1}{1 + \tilde{\alpha}} \left[ \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right],$$

розв'язок якої має вигляд [8, 20]

$$\Phi_m(z_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{y_m(t)}{t - z_m} dt, \quad m = 1, 2. \quad (14)$$

На основі формули (10) і крайових умов (1) отримаємо

$$\begin{aligned}
& \tilde{\alpha}\Phi_K^-(s) + \Phi_K^+(s) + \tilde{\alpha}\Phi_1(s - x_{01}) + \tilde{\alpha}\Phi_2(s + x_{02}) - \left(1 + \frac{R^2}{s^2}\right) \left\{ \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \right. \\
& \left. + \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) \right\} - \frac{R^2}{s^2} \left\{ \tilde{\alpha}\Phi_1\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \tilde{\alpha}\Phi_2\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right) - \right. \\
& \left. - \left(s - \frac{R^2}{s}\right) \left( \bar{\Phi}'_1\left(\frac{R^2}{s} - x_{01}\right) + \bar{\Phi}'_2\left(\frac{R^2}{s} + x_{02}\right) \right) \right\} = i\tilde{c}'_0, \quad s \in L.
\end{aligned}$$

Якщо ввести функцію

$$\begin{aligned}
F(z) &= \Phi_K(z) + \tilde{\alpha}\Phi_1(z - x_{01}) + \tilde{\alpha}\Phi_2(z + x_{02}) - i\tilde{c}'_0, \quad z \in S^+, \\
F(z) &= -\tilde{\alpha}\Phi_K(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \left\{ \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \bar{\Phi}_2\left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) \right\} + \\
& + \frac{R^2}{z^2} \left\{ \tilde{\alpha}\Phi_1\left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \tilde{\alpha}\Phi_2\left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) - \left(z - \frac{R^2}{z}\right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \left( \bar{\Phi}'_1 \left( \frac{R^2}{z} - x_{01} \right) + \bar{\Phi}'_2 \left( \frac{R^2}{z} + x_{02} \right) \right) \Big\}, \quad z \in S^-, \quad (15)$$

то на основі попередньої формули отримуємо, що  $F(z)$  задовольняє задачу лінійного спряження

$$F^+(s) - F^-(s) = 0, \quad s \in L, \quad (16)$$

розв'язок якої, врахувавши залежності (8) та (13), можна подати у вигляді

$$F(z) = \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} - \tilde{\alpha} \Gamma + B, \quad B = \frac{i}{2\pi} \left\{ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\overline{y_1(t)}}{t - x_{01}} dt + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\overline{y_2(t)}}{t + x_{02}} dt \right\}. \quad (17)$$

Беручи до уваги (17), на основі (15) запишемо

$$\begin{aligned} \Phi_K(z) &= \bar{\Gamma}' \frac{R^2}{z^2} - \tilde{\alpha} \Gamma + B - \tilde{\alpha} \Phi_1(z - x_{01}) - \tilde{\alpha} \Phi_2(z + x_{02}) + i\tilde{c}'_0, \quad z \in S^+, \\ \Phi_K(z) &= \frac{1}{\tilde{\alpha}} \left\{ -\bar{\Gamma}' \frac{R^2}{z^2} + \tilde{\alpha} \Gamma - B + \left( 1 + \frac{R^2}{z^2} \right) \left\{ \bar{\Phi}'_1 \left( \frac{R^2}{z} - x_{01} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{\Phi}'_2 \left( \frac{R^2}{z} + x_{02} \right) \right\} + \frac{R^2}{z^2} \left\{ \tilde{\alpha} \Phi_1 \left( \frac{R^2}{z} - x_{01} \right) + \tilde{\alpha} \Phi_2 \left( \frac{R^2}{z} + x_{02} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( z - \frac{R^2}{z} \right) \left( \bar{\Phi}'_1 \left( \frac{R^2}{z} - x_{01} \right) + \bar{\Phi}'_2 \left( \frac{R^2}{z} + x_{02} \right) \right) \right\} \right\}, \quad z \in S^-. \quad (18) \end{aligned}$$

З крайових умов (3) та формули (12) отримаємо

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha} \Phi_m^+(x_m) + \tilde{\alpha} \Phi_m^-(x_m) + \tilde{\alpha} \Phi_K(z_{0m} + x_m) - \left( 1 + \frac{R^2}{(z_{0m} + x_m)^2} \right) \times \\ &\quad \times \overline{\Phi_K(z_{0m} + x_m)} - \left( z_{0m} + x_m - \frac{R^2}{z_{0m} + x_m} \right) \overline{\Phi'_K(z_{0m} + x_m)} - \\ &\quad - \frac{R^2}{(z_{0m} + x_m)^2} \Phi_K \left( \frac{R^2}{z_{0m} + x_m} \right) + \tilde{\alpha} \Phi_j(z_j) - \overline{\Phi_j(z_j)} - x_m \overline{\Phi'_j(z_j)} - \\ &\quad - (z_{0m} - z_{0j}) \Phi'_j(z_j) + \overline{\Phi_j(z_j)} + \overline{\tilde{z}_j \Phi'_j(z_j)} + \Omega_j(\tilde{z}_j) = \\ &= i\tilde{c}'_m + pM_{y_m}, \quad x_m \in L_m, \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m. \quad (19) \end{aligned}$$

Врахувавши залежності (14) і (18), на основі формул (19) отримаємо два інтегральних рівняння для знаходження невідомої функції  $y_m(t)$ , які в безрозмірних координатах будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \{ K_{mm}(\xi, \eta) Y_m(\eta) + L_{mm}(\xi, \eta) \overline{Y_m(\eta)} \} d\eta + \\ &\quad + \int_{-1}^1 \{ K_{mj}(\xi, \eta) Y_j(\eta) + L_{mj}(\xi, \eta) \overline{Y_j(\eta)} \} d\eta - \frac{i\varepsilon_m^2 \tilde{c}'_0}{X_m^2} = i\tilde{c}'_m + \\ &\quad + \frac{\tilde{p}M_{y_m}}{M_y^\infty} + P_m(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m, \quad (20) \end{aligned}$$

де

$$K_{mj} = \begin{cases} \frac{\tilde{\alpha}}{\pi i(\eta - \xi)} + \tilde{K}_{mj}, & m = j, \\ \tilde{K}_{mj} + K_{mj}^V, & m \neq j, \end{cases} \quad L_{mj} = \begin{cases} \tilde{L}_{mj}, & m = j, \\ \tilde{L}_{mj} + L_{mj}^V, & m \neq j, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{mj} &= \tilde{\alpha} K_{mj}^I - \left(1 + \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2}\right) K_{mj}^{II} - \left(X_m - \frac{\varepsilon_m^2}{X_m}\right) K_{mj}^{III} - \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2} K_{mj}^{IV}, \\
\tilde{L}_{mj} &= \tilde{\alpha} L_{mj}^I - \left(1 + \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2}\right) L_{mj}^{II} - \left(X_m - \frac{\varepsilon_m^2}{X_m}\right) L_{mj}^{III} - \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2} L_{mj}^{IV}, \\
K_{mj}^I &= \frac{\lambda_j \varepsilon_m^2}{2\pi i X_m (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)}, \\
L_{mj}^I &= \frac{1}{2\pi i \tilde{\alpha}} \left( \frac{\lambda_j}{T_j} - \frac{\lambda_j (X_m^2 + \varepsilon_m^2)}{X_m (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)} + \frac{\lambda_j \varepsilon_m^2 F_{mj}}{(T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)^2} \right), \\
K_{mj}^{II} &= \frac{1}{2\pi i \tilde{\alpha}} \left( \frac{\lambda_j (X_m^2 + \varepsilon_m^2)}{X_m (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)} - \frac{\lambda_j}{T_j} - \frac{\lambda_j \varepsilon_m^2 F_{mj}}{(T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)^2} \right), \\
S_{mj}^{II} &= -\frac{\lambda_j \varepsilon_m^2}{2\pi i X_m (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)}, \\
K_{mj}^{III} &= -\frac{\lambda_j \varepsilon_m^2}{\tilde{\alpha} \pi i (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2} + \frac{\omega_{jm} (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)}{X_m^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega_{jm} F_{mj}}{X_m} - \frac{\varepsilon_m^2 F_{mj}}{X_m (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)} \right), \\
L_{mj}^{III} &= \frac{\lambda_j \varepsilon_m^2}{\pi i X_m^2 (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)} \left( \omega_{jm} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_m^2}{T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j} \right), \\
K_{mj}^{IV} &= -\frac{\tilde{\alpha} \lambda_j X_m}{2\pi i (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)}, \quad L_{mj}^{IV} = -\frac{\lambda_j}{2\pi i T_j}, \quad K_{mj}^V = \frac{\tilde{\alpha} \lambda_j}{\pi i} \frac{1}{T_j - \omega_{mj} X_m}, \\
F_{mj} &= \omega_{mj} X_m - \frac{\varepsilon_m \varepsilon_j}{X_m}, \quad L_{mj}^V = \frac{\lambda_j}{2\pi i} \frac{(C_m \omega_{mj} + A_{mj} - B_{mj})}{(T_j - \omega_{mj} X_m)^2}, \\
\omega_{mj} &= \frac{d_m}{d_j}, \quad A_{12} = 1 + \omega_{12} + 2\varepsilon_2, \quad A_{21} = -1 - \omega_{21} - 2\varepsilon_1, \\
P_m(\xi) &= \tilde{A} - \tilde{\alpha} \tilde{A} + \tilde{B} + \frac{\varepsilon_m^2 \tilde{A} (1 - \tilde{\alpha})}{X_m^2} - \frac{\varepsilon_m^2 \tilde{B}}{\tilde{\alpha} X_m^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2} - 2 \frac{X_m^2 - \varepsilon_m^2}{X_m^2} \right), \\
B_{12} &= 1 + \varepsilon_2 + \omega_{12} X_1, \quad B_{21} = -1 - \varepsilon_1 + \omega_{21} X_2, \quad C_1 = X_1 - 1 - \varepsilon_1, \\
C_2 &= X_2 + 1 + \varepsilon_2, \quad \lambda_m = \frac{\ell}{d_m}, \quad \varepsilon_m = \frac{R}{d_m}, \quad x_m = \ell \xi, \quad t_m = \ell \eta, \\
\tilde{p} &= -1.5(1 + \nu), \quad T_m = (-1)^{1+m} (1 + \varepsilon_m) + \lambda_m \eta, \quad y_m(t) = \frac{1}{Q} M_y^\infty Y_m(t), \\
Y_m(t) &= Y_{m1}(t) + i Y_{m2}(t), \quad X_m = (-1)^{1+m} (1 + \varepsilon_m) + \lambda_m \xi, \\
\tilde{A} &= -0.375(1 + \rho)(1 - \nu), \quad \tilde{B} = 0.5 \tilde{p}(1 - \rho), \quad \rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty},
\end{aligned}$$

$Y_{m1}(t)$  і  $Y_{m2}(t)$  – дійсні функції.

Рівняння (20) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 Y_m(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \eta Y_{m1} d\eta = 0, \quad m = 1, 2, \quad (21)$$

які виражають відповідно однозначність кутів повороту і прогину пластини при обході контуру тріщини.

Для знаходження сталої  $\tilde{c}'_0$  скористаємося умовою однозначності прогину пластини при обході кругового отвору:

$$\tilde{c}'_0 = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left( \int_{-1}^1 \frac{\lambda_1 Y_1(\eta)}{T_1} d\eta + \int_{-1}^1 \frac{\lambda_2 Y_2(\eta)}{T_2} d\eta \right). \quad (22)$$

**Побудова розв'язку плоскої задачі.** Введемо в розгляд комплексні потенціали Колосова – Мухелішвілі [8]  $\Phi_{II}(z)$  і  $\Psi_{II}(z)$ , які подамо у вигляді

$$\Phi_{II}(z) = \Phi_{PK}(z) + \Phi_{II1}(z_1) + \Phi_{II2}(z_2),$$

$$\Psi_{II}(z) = \Psi_{PK}(z) + \Psi_{II1}(z_1) - x_{01} \Phi'_{II1}(z_1) + \Psi_{II2}(z_2) + x_{02} \Phi'_{II2}(z_2),$$

де функції  $\Phi_{IIj}(z_j)$  і  $\Psi_{IIj}(z_j)$  голоморфні ззовні  $j$ -ї тріщини та зникають на нескінченності, функції  $\Phi_{PK}(z)$  і  $\Psi_{PK}(z)$  голоморфні ззовні кола та зникають на нескінченності.

Якщо ввести функції [19]

$$\Omega_{IIj}(z_j) = \bar{\Phi}_{IIj}(z_j) + z_j \bar{\Phi}'_{IIj}(z_j) + \bar{\Psi}_{IIj}(z_j), \quad j = 1, 2,$$

$$\Phi_{PK}(z) = -\bar{\Phi}_{PK}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'_{PK}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}_{PK}\left(\frac{R^2}{z}\right), \quad z \in S^+,$$

то для визначення напружено-деформованого стану пластини отримаємо формули

$$\begin{aligned} \Phi_{PK}(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi_{PK}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \overline{\Phi_{PK}(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_{PK}(z)} \right\} + \Phi_{II1}(z_1) + \\ + \Phi_{II2}(z_2) + \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) \left\{ \overline{\Phi_{II1}(z_1)} + \overline{\Phi_{II2}(z_2)} \right\} - \frac{\bar{z}}{z} \left\{ \Omega_{II1}(\bar{z}_1) + \Omega_{II2}(\bar{z}_2) + \right. \\ \left. + (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_{II1}(z_1)} + (z_2 - \bar{z}_2) \overline{\Phi'_{II2}(z_2)} \right\} = \sigma_{rr} - i \sigma_{r\theta}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x \Phi_{PK}(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_{PK}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \overline{\Phi_{PK}(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'_{PK}(z)} \right\} + x \Phi_{II1}(z_1) + \\ + x \Phi_{II2}(z_2) - \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) \left\{ \overline{\Phi_{II1}(z_1)} + \overline{\Phi_{II2}(z_2)} \right\} + \frac{\bar{z}}{z} \left\{ \Omega_{II1}(\bar{z}_1) + \Omega_{II2}(\bar{z}_2) + \right. \\ \left. + (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_{II1}(z_1)} + (z_2 - \bar{z}_2) \overline{\Phi'_{II2}(z_2)} \right\} = \frac{2\mu}{iz} \frac{\partial(u + iv)}{\partial\theta}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{II m}(z_m) + \Omega_{II m}(\bar{z}_m) + (z_m - \bar{z}_m) \overline{\Phi'_{II m}(z_m)} + \Phi_{PK}(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \overline{\Phi_{PK}(z)} + \\ + z \overline{\Phi'_{PK}(z)} + \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Phi_{PK}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \bar{z} \overline{\Phi'_{PK}(z)} \right\} + \Phi_{II j}(z_j) + \overline{\Phi_{II j}(z_j)} + \\ + z_m \overline{\Phi'_{II j}(z_j)} + (z_{0m} - z_{0j}) \overline{\Phi'_{II j}(z_j)} - \overline{\Phi_{II j}(z_j)} - \bar{z}_j \overline{\Phi'_{II j}(z_j)} + \Omega_{II j}(\bar{z}_j) = \\ = \sigma_{y_m y_m} + i \sigma_{x_m y_m}, \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} x \Phi_{II m}(z_m) - \Omega_{II m}(\bar{z}_m) - (z_m - \bar{z}_m) \overline{\Phi'_{II m}(z_m)} + x \Phi_{PK}(z) - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \times \\ \times \overline{\Phi_{PK}(z)} - z \overline{\Phi'_{PK}(z)} - \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Phi_{PK}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \bar{z} \overline{\Phi'_{PK}(z)} \right\} + x \Phi_{II j}(z_j) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} - z_m \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} - (z_{0m} - z_{0j}) \Phi'_{\Pi j}(z_j) + \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} + \bar{z}_j \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} - \\
& - \Omega_{\Pi j}(\bar{z}_j) = 2\mu(u + iv)'_{x_m}, \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m, \quad (26)
\end{aligned}$$

де  $\mu$  – модуль зсуву,  $\alpha = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ .

За аналогією із задачею про згин пластини, розглянутої у попередньому підрозділі, на основі формул (23)–(26) і крайових умов (2), (4) можна отримати

$$\Phi_{\Pi m}(z) = \Omega_{\Pi m}(z), \quad \Phi_{\Pi m}(z_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{g'_m(t)}{t - z_m} dt, \quad m = 1, 2, \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Pi K}(z) &= B_{\Pi} + \Phi_{\Pi 1}(z - x_{01}) + \Phi_{\Pi 2}(z + x_{02}), \quad z \in S^+, \\
\Phi_{\Pi K}(z) &= B_{\Pi} - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \left\{ \bar{\Phi}_{\Pi 1}\left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \bar{\Phi}_{\Pi 2}\left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) \right\} + \\
&+ \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Phi_{\Pi 1}\left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \Phi_{\Pi 2}\left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) + \left(z - \frac{R^2}{z}\right) \times \right. \\
&\times \left. \left( \bar{\Phi}'_{\Pi 1}\left(\frac{R^2}{z} - x_{01}\right) + \bar{\Phi}'_{\Pi 2}\left(\frac{R^2}{z} + x_{02}\right) \right) \right\}, \quad z \in S^-, \quad (28)
\end{aligned}$$

де

$$g'_m(x_m) = \frac{2\mu}{i(1+\alpha)} \left[ \frac{\partial(u + iv)}{\partial x_m} \right], \quad B_{\Pi} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\overline{g'_1(t)}}{t - x_{01}} dt + \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\overline{g'_2(t)}}{t + x_{02}} dt \right\}.$$

Враховувавши співвідношення (27) і формулу (25), на основі крайових умов (4) можемо записати вираз

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_m y_m} &= \Phi_{\Pi m}^+(x_m) + \Phi_{\Pi m}^-(x_m) + \Phi_{\Pi K}(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \overline{\Phi_{\Pi K}(z)} + \\
&+ z \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \overline{\Phi'_{\Pi K}(z)} + \frac{R^2}{z^2} \Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} + \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} + \\
&+ x_m \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} + (z_{0m} - z_{0j}) \Phi'_{\Pi j}(z_j) - \overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)} - \bar{z}_j \overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)} + \Phi_{\Pi j}(\bar{z}_j), \\
& \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m. \quad (29)
\end{aligned}$$

Беручи до уваги вирази (27) і (28) для функцій  $\Phi_{\Pi m}(z)$  і  $\Phi_{\Pi K}(z)$ , для знаходження невідомих функцій  $g'_m(t)$  із залежності (29) отримаємо два інтегральні рівняння, які в безрозмірних координатах мають вигляд

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \{R_{mm}(\xi, \eta) G_m(\eta) + S_{mm}(\xi, \eta) \overline{G_m(\eta)}\} d\eta + \\
& + \int_{-1}^1 \{R_{mj}(\xi, \eta) G_j(\eta) + S_{mj}(\xi, \eta) \overline{G_j(\eta)}\} d\eta = \frac{h^2}{M_y^\infty} \sigma_{y_m y_m}, \\
& \quad \xi \in [-1, 1], \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m, \quad (30)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
R_{mj} &= \begin{cases} \frac{1}{\pi(\eta - \xi)} + \tilde{R}_{mj}, & m = j, \\ \tilde{R}_{mj} + R_{mj}^V, & m \neq j, \end{cases} \quad S_{mj} = \begin{cases} \tilde{S}_{mj}, & m = j, \\ \tilde{S}_{mj} + S_{mj}^V, & m \neq j, \end{cases} \\
\tilde{R}_{mj} &= R_{mj}^I + \left(1 + \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2}\right) R_{mj}^{II} + \left(X_m - \frac{\varepsilon_m^2}{X_m}\right) R_{mj}^{III} + \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2} R_{mj}^{IV},
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{mj} &= S_{mj}^I + \left(1 + \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2}\right) S_{mj}^{II} + \left(X_m - \frac{\varepsilon_m^2}{X_m}\right) S_{mj}^{III} + \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2} S_{mj}^{IV}, \\
R_{mj}^I &= \frac{\lambda_j \varepsilon_m^2}{2\pi X_m (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)}, \\
S_{mj}^I &= \frac{\lambda_j}{2\pi T_j} - \frac{\lambda_j (X_m^2 + \varepsilon_m^2)}{2\pi X_m (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)} + \frac{\lambda_j \varepsilon_m^2 F_{mj}}{2\pi (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)^2}, \\
R_{mj}^{II} &= \frac{\lambda_j}{2\pi T_j} - \frac{\lambda_j (X_m^2 + \varepsilon_m^2)}{2\pi X_m (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)} + \frac{\lambda_j \varepsilon_m^2 F_{mj}}{2\pi (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)^2}, \\
S_{mj}^{II} &= \frac{\lambda_j \varepsilon_m^2}{2\pi X_m (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)}, \\
R_{mj}^{III} &= \frac{\lambda_j \varepsilon_m^2}{\pi (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon_m^2}{X_m^2} + \frac{\omega_{jm} (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)}{X_m^2} - \frac{\omega_{jm} F_{mj}}{X_m} - \frac{\varepsilon_m^2 F_{mj}}{X_m (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)}\right), \\
S_{mj}^{III} &= -\frac{\lambda_j \varepsilon_m^2}{\pi X_m^2 (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)} \left(\omega_{jm} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_m^2}{T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j}\right), \\
K_{mj}^{IV} &= \frac{\lambda_j X_m}{2\pi (T_j X_m - \varepsilon_m \varepsilon_j)}, \quad L_{mj}^{IV} = \frac{\lambda_j}{2\pi T_j}, \\
R_{mj}^V &= \frac{\lambda_j}{\pi} \frac{1}{T_j - \omega_{mj} X_m}, \quad L_{mj}^V = -\frac{\lambda_j (C_m \omega_{mj} + A_{mj} - B_{mj})}{2\pi (T_j - \omega_{mj} X_m)^2}, \\
g'_m(t) &= \frac{1}{h^2} M_y^\infty G_m(t), \quad G_m(t) = G_{m1}(t) + iG_{m2}(t),
\end{aligned}$$

$G_{m1}(t)$  і  $G_{m2}(t)$  – дійсні функції.

Із умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини маємо

$$\int_{-1}^1 G_m(\eta) d\eta = 0, \quad m = 1, 2. \quad (31)$$

Якщо врахувати крайову умову (5), то рівняння (20) і (30) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}
\text{Im} \left\{ \int_{-1}^1 \{K_{mm}(\xi, \eta) Y_m(\eta) + L_{mm}(\xi, \eta) \overline{Y_m(\eta)}\} d\eta + \right. \\
\left. + \int_{-1}^1 \{K_{mj}(\xi, \eta) Y_j(\eta) + L_{mj}(\xi, \eta) \overline{Y_j(\eta)}\} d\eta \right\} - \frac{\varepsilon_m^2 \tilde{c}'_0}{X_m^2} = \tilde{c}'_m, \\
\xi \in [-1, 1], \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Re} \left\{ \int_{-1}^1 \{K_{mm}(\xi, \eta) Y_m(\eta) + L_{mm}(\xi, \eta) \overline{Y_m(\eta)}\} d\eta + \right. \\
\left. + \int_{-1}^1 \{K_{mj}(\xi, \eta) Y_j(\eta) + L_{mj}(\xi, \eta) \overline{Y_j(\eta)}\} d\eta \right\} + \\
+ 2\tilde{p} \text{Re} \left\{ \int_{-1}^1 \{R_{mm}(\xi, \eta) G_m(\eta) + S_{mm}(\xi, \eta) \overline{G_m(\eta)}\} d\eta + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\xi, \eta) G_j(\eta) + S_{mj}(\xi, \eta) \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta \Big\} = P_m(\xi),$$

$$\xi \in [-1, 1], \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m, \quad (33)$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ R_{mm}(\xi, \eta) G_m(\eta) + S_{mm}(\xi, \eta) \overline{G_m(\eta)} \right\} d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\xi, \eta) G_j(\eta) + S_{mj}(\xi, \eta) \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta \right\} = 0,$$

$$\xi \in [-1, 1], \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m. \quad (34)$$

Зауважимо, що з огляду на співвідношення (6) функції  $Y_{m2}(\eta)$  і  $G_{m1}(\eta)$  пов'язані співвідношенням

$$G_{m1}(\eta) + \frac{1 + \tilde{\alpha}}{(1 + \alpha)(1 + \nu)} Y_{m2}(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1], \quad m = 1, 2. \quad (35)$$

Контактне зусилля  $N_m$  між берегами  $m$ -ї тріщини можна обчислити за формулою

$$\frac{hN_m(\xi)}{M_y^\infty} = - \frac{2h^2 \sigma_{y_m y_m}}{M_y^\infty} =$$

$$= -2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ R_{mm}(\xi, \eta) G_m(\eta) + S_{mm}(\xi, \eta) \overline{G_m(\eta)} \right\} d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\xi, \eta) G_j(\eta) + S_{mj}(\xi, \eta) \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta \right\},$$

$$\xi \in [-1, 1], \quad m = 1, 2, \quad j = 3 - m.$$

Отже, для визначення невідомих функції  $Y_m(\eta)$  і  $G_m(\eta)$  отримали систему сингулярних інтегральних рівнянь (21), (22), (31)–(35).

**Числовий аналіз задачі.** Систему сингулярних інтегральних рівнянь розв'язували чисельно за допомогою методу механічних квадратур [16].

Числовий аналіз проведено для пластинки з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0.3$ . Якщо вважати, що отвір і одна тріщина відсутні ( $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ ), то приходимо до результатів роботи [25]. Якщо отвір відсутній ( $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ), то отримуємо результати роботи [23]. Якщо одна тріщина відсутня ( $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ ), то матимемо результати [14].

На рис. 2 зображено залежності зведеного контактного тиску  $N^* = hN/M_y^\infty$  між берегами першої тріщини від безрозмірної координати  $\xi = x_1/\ell$  при  $R = \ell$ ,  $d_1 = d_2 = d$  та  $M_x^\infty = 0$ , причому суцільними лініями позначено контактний тиск для отвору та двох тріщин, а штриховими – для отвору та однієї тріщини. Кривим 1–5 відповідає контактний тиск  $N^*$  при значеннях параметрів

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1/1.1, 1/1.5, 1/2, 1/5, 0$ . Як бачимо на рисунку, величина контактного тиску  $N^*$  у ближчій до отвору вершині  $a$  ( $\xi = -1$ ) є більшою, ніж

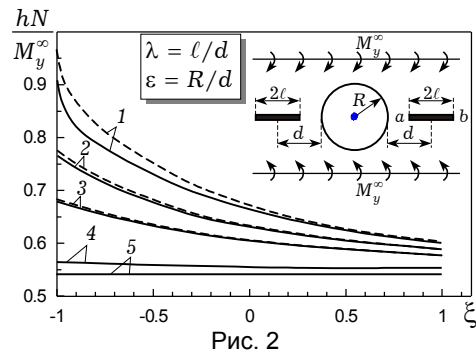


Рис. 2

у дальшій від отвору вершині  $b$  ( $\xi = 1$ ). Також на основі рис. 2 можна стверджувати, що величина контактного тиску у випадку отвору та двох тріщин є меншою, ніж у випадку отвору та однієї тріщини.

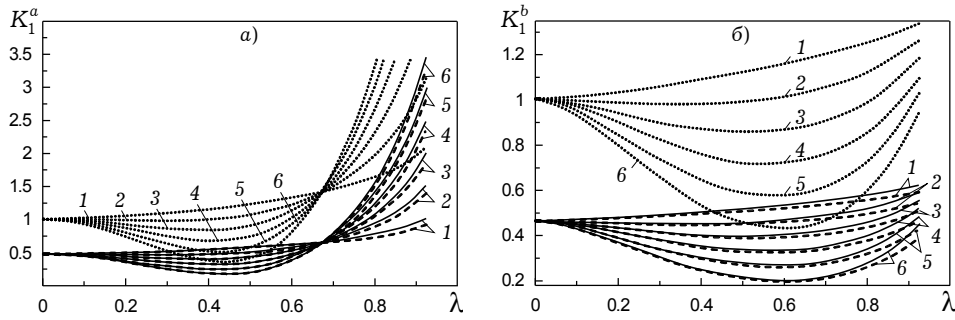


Рис. 3

На рис. 3 зображено графіки залежностей зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів (КІМ)  $K_M^* = K_M / (M_y^\infty \sqrt{\ell}) = K_1$  у вершині  $a$  (рис. 3а) і вершині  $b$  (рис. 3б) при  $R = \ell$ ,  $d_1 = d_2 = d$  від величини  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ . Криві 1–6 відповідають значенням  $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty = 0, 20, 40, 60, 80, 100$ . Суцільними лініями позначено КІМ для отвору та двох тріщин з врахуванням контакту берегів тріщин, штриховими лініями – для отвору та однієї тріщини з врахуванням контакту її берегів, точковими лініями – для отвору і двох тріщин без врахування контакту їх берегів. Як бачимо, КІМ для отвору та двох тріщин є більшими, ніж для отвору та однієї тріщини з врахуванням контакту її берегів, і є меншими, ніж для отвору та двох тріщин без врахування контакту берегів тріщин. Крім того, при наближенні тріщин до отвору КІМ у вершині  $a$  зростають, а у вершині  $b$  спочатку спадають, а потім починають зростати.

Як видно на рис. 3, при  $\lambda = 0$  ( $d \rightarrow \infty$ ) та  $\lambda = \lambda^*$  у точці  $a$ , а при  $\lambda = 0$  – у точці  $b$  КІМ не залежить від згинального моменту  $M_x^\infty$  (при цьому  $\lambda^* = 0.6718$  для отвору та двох тріщин з врахуванням контакту їх берегів,  $\lambda^* = 0.6713$  для отвору та двох тріщин без врахування контакту їх берегів,  $\lambda^* = 0.6679$  для отвору та однієї тріщини з врахуванням контакту її берегів). Зауважимо, що КІМ та коефіцієнти інтенсивності зусиль (КІЗ)  $K_N^* = hK_N / (M_y^\infty \sqrt{\ell})$  зв'язані залежністю  $K_N^* / K_M^* = 3(1 + \nu) / (3 + \nu)$ , тому графічні залежності для  $K_N^*$  не наводимо.

На рис. 4 зображено залежності КІМ  $K_1$  у вершині  $a$  (рис. 4а) і вершині  $b$  (рис. 4б) при  $d_1 = d_2 = d$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$  від величини  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Кривим 1–6 відповідають значення  $\rho = 0, 20, 40, 60, 80, 100$ , причому суцільними лініями позначено КІМ для отвору та двох тріщин з врахуванням контакту берегів тріщин, а точковими лініями – для отвору і двох тріщин без врахування контакту їх берегів. Як бачимо на рис. 4, КІМ для отвору та двох тріщин з врахуванням контакту берегів є меншими, ніж для отвору та двох тріщин без врахування контакту берегів тріщин. На основі рис. 4 можна зробити висновок, що при  $\varepsilon = 0$  і  $\varepsilon = \varepsilon_a^*$  у точці  $a$  та при  $\varepsilon = 0$  і  $\varepsilon = \varepsilon_b^*$  у точці  $b$  КІМ не залежить від  $M_x^\infty$  (при цьому  $\varepsilon_a^* = 0.6301$  і  $\varepsilon_b^* = 1.5184$  для отвору та двох тріщин з врахуванням контакту їх берегів і  $\varepsilon_a^* = 0.6288$  і  $\varepsilon_b^* = 1.5240$  для отвору та двох тріщин без врахування контакту берегів тріщин).

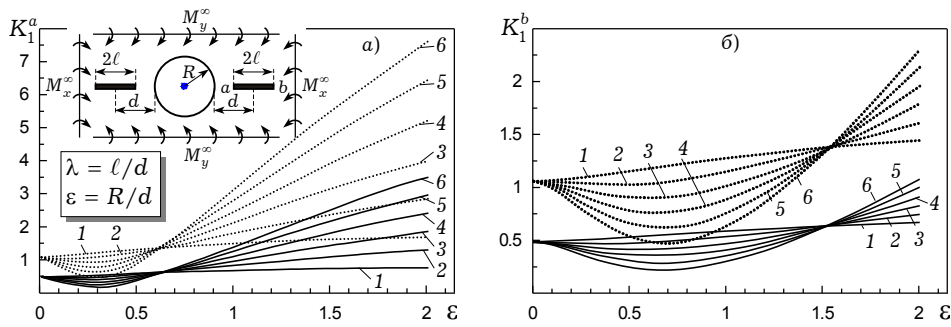


Рис. 4

Визначимо критичне значення навантаження, коли пластина почне руйнуватися. Скористаємося енергетичним критерієм руйнування [4, 9]

$$G = 2\gamma_*, \quad G = \frac{\pi}{4h^2E} \left\{ K_N^2 + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu} \left( \frac{K_M}{h} \right)^2 \right\}, \quad (36)$$

де  $G$  – потік енергії у вершині тріщини;  $\gamma_*$  – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

На основі (36) можемо записати

$$\tilde{M} = \frac{M_y^\infty}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi\ell}{2\gamma_*E}} = \frac{3+\nu}{\sqrt{6(1+\nu)(3+2\nu)}} K_M^*. \quad (37)$$

На рис. 5 наведено залежність критичного моменту  $\tilde{M}$  при  $M_x^\infty/M_y^\infty = 1$ ,  $\epsilon_1 = \lambda_1 = 0.9$ ,  $\epsilon_2 = \lambda_2$ ,  $R = \ell$  від  $\lambda_2$  – відносної відстані другої тріщини до отвору, причому суцільним лініям відповідає  $\tilde{M}$  для отвору та двох тріщин з урахуванням контакту берегів тріщин, а точковим лініям –  $\tilde{M}$  для отвору та двох тріщин без урахування контакту берегів тріщин. Кривим 1-4 відповідно пов'язані з точками  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ . З цього рисунка бачимо, що врахування контакту берегів тріщин приводить до збільшення значення критичного моменту  $\tilde{M}$ . Крім того, бачимо, що при наближенні другої тріщини до отвору його значення спадає.

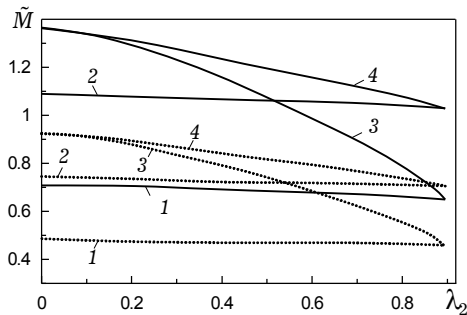


Рис. 5

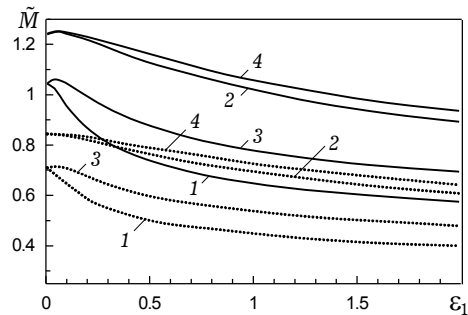


Рис. 6

На рис. 6 зображено залежність  $\tilde{M}$  від параметра  $\epsilon_1$  при  $M_x^\infty/M_y^\infty = 1$ ,  $\lambda_1 = 0.9$ ,  $\lambda_2 = 0.8$ ,  $\epsilon_2 = 8\epsilon_1/9$ . Причому суцільним лініям відповідає  $\tilde{M}$  для отвору та двох тріщин з урахуванням контакту берегів тріщин, а точковим – для отвору та двох тріщин без урахування контакту берегів тріщин. Криві 1-4 відповідно пов'язані з точками  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ . На основі рис. 6 можна зробити висновок, що при збільшенні радіуса кругового отвору значення  $\tilde{M}$  зменшується.

**Висновки.** У статті досліджено задачу про згин пластини з круговим отвором та двома радіальними тріщинами за умови, що береги тріщин контактують по всій їх довжині вздовж лінії на верхній основі пластини. Запропоновано процедуру розв'язання поставленої задачі.

На основі числового аналізу встановлено такі закономірності:

- величина контактної тиску є більшою у ближчих до отвору вершинах тріщин. Наявність другої тріщини призводить до зменшення величини контактної тиску на першій тріщині;
- урахування контакту берегів тріщин призводить до зменшення КІМ та збільшення критичного навантаження;
- величина радіуса кругового отвору впливає на значення КІМ та критичного навантаження.

1. *Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. *Божидарнік В., Опанасович В., Герасимчук П.* Двосторонній згин ізотропної пластини з наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів. // *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка.* – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2004. – С. 213–218.
3. *Божидарнік В. В., Опанасович В. К., Герасимчук П. В.* Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з врахуванням контакту її берегів // *Міжнар. наук.-техн. конф. «Динаміка, міцність і ресурс машин та конструкцій», Київ, 1–4 лист. 2005: Тези доп.* – Т. 1. – С. 49–50.
4. *Герасимчук П. В.* Згин зосередженим моментом ізотропної пластини з наскрізною тріщиною по дузі кола з врахуванням контакту її берегів // *Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи.* – Львів, 2005. – С. 237–240.
5. *Далаяк Т., Перепічка В., Шацький І.* Періодичні задачі контакту берегів тріщин при згині пластин // *Машинознавство.* – 2000. – № 4/5 (34/35). – С. 20–24.
6. *Далаяк Т. М.* Згин пластини з періодичною системою паралельних взаємозміщених тріщин, береги яких контактують // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2004. – № 1. – С. 115–117.
7. *Кальтгоф Дж. Ф., Шацький І. П., Бюргель А.* Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини // *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (випуск 2) / Під ред. В. В. Панасюка: В 3 т.* – Львів: Каменяр, 1999. – Т. 1. – С. 72–74.
8. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
9. *Опанасович В. К., Слободян М. С.* Двосторонній згин пластини з круговим отвором та тріщиною з врахуванням контакту її берегів // *Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А.* – 2005. – Вип. 1. – С. 85–89.
10. *Опанасович В. К., Звізло І. С.* Изгиб кусочно-однородной изотропной пластини с прямолинейной трещиной, параллельной линии сая, с учетом контакта ее берегов // *Теорет. и прикл. механика.* – 2001. – № 34. – С. 88–93.
11. *Опанасович В. К., Звізло І. С.* Згин кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною, перпендикулярною до лінії поділу матеріалів, з врахуванням контакту берегів // *Системні технології.* – 2002. – № 4 (21) – С. 124–129.
12. *Опанасович В. К., Слободян Б. С.* Двосторонній згин кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на межі поділу матеріалів з урахуванням контакту її берегів // *Тези доп. конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача (Львів, 24–27 тр. 2005).* – Львів, 2005. – С. 86–87.
13. *Опанасович В. К., Новосад В. П., Селіверстов Р. Г.* Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини // *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів і конструкцій.* – 2002. – Вип. 5. – С. 148–153.
14. *Опанасович В., Слободян М.* Двосторонній згин пластин з круговим отвором та радіальною тріщиною з врахуванням контакту її берегів // *Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки» (Львів, 2–5 лист. 2004): Тези доп.* – Львів, 2004. – С. 42–43.
15. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
16. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацькишин А. П.* Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.

17. *Перепічка В. В., Шацький І. П.* Згин напівнескінченної пластини з періодичною системою розрізів з урахуванням контакту берегів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1999. – **42**, № 1. – С. 114–117.
18. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
19. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1962. – 200 с.
20. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
21. *Слободян М.* Двусторонній згин пластини з круговим отвором та тріщиною, яка розміщена паралельно до діаметра, з врахуванням контакту її берегів // *Машинознавство.* – 2005. – № 5 (95). – С. 41–47.
22. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т.* // Под ред. Ю. Мураками. – Москва: Мир, 1990. – 1016 с.
23. *Шацький І. П.* Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1990. – **26**, № 3. – С. 70–75.
24. *Шацький І. П.* Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине // *Теорет. и прикл. механика.* – 2000. – № 31. – С. 91–97.
25. *Шацький І. П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1988. – № 7. – С. 49–51.
26. *Шацький І., Далак Т.* Взаємовплив паралельних тріщин з берегами, які контактують, при згині пластин // *Машинознавство.* – 2000. – № 1. – С. 27–30.
27. *Шацький І., Далак Т.* Циклічно-симетрична задача згину пластини з системою тріщин, береги яких контактують // *Машинознавство.* – 2003. – № 3 (69). – С. 7–12.
28. *Шацький І. П., Перепічка В. В.* Граничний стан напівнескінченної пластини в крайовою тріщиною за згину з розтягом // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2004. – **40**, № 2. – С. 73–77.
29. *Alwar R. S., Ramachandran Nambissan* Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – a 3-D finite element analysis // *Eng. Fract. Mech.* – 1983. – **17**, No. 4. – P. 323–333.
30. *Dempsey J. P., Shekhtman I. I., Slepian L. I.* Closure of a through crack in a plate under bending // *Int. J. Solids Struct.* – 1998. – **35**, No. 31–32. – P. 4077–4089.
31. *Heming E. S. (Jr.)* Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate // *Int. J. Fract.* – 1980. – No. 16. – P. 289–303.
32. *Jones D. P., Swedlow J. L.* The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate // *Int. J. Fract.* – 1975. – No. 11. – P. 897–914.
33. *Kwon Y. W.* Finite element analysis of crack closure in plate bending // *Comput. and Struct.* – 1989. – **32**, No. 6. – P. 1439–1445.
34. *Williams M. L.* The bending stress distribution at the base of a stationary crack // *J. Appl. Mech.* – 1961. – **28**. – P. 78–82.
35. *Young M. J., Sun C. T.* Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – a classical plate solution // *Int. J. Fract.* – 1992. – **55**. – P. 81–93.

#### **ДВУХОСНЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ДВУМЯ РАДИАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ, БЕРЕГА КОТОРЫХ КОНТАКТИРУЮТ**

*Исследован двухосный изгиб изотропной пластины с круговым отверстием и двумя радиальными трещинами с учетом контакта берегов. Используя методы теории функций комплексного переменного и комплексные потенциалы задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которой получено методом механических квадратур. Приведен численный анализ контактного давления между берегами трещин и коэффициентов интенсивности усилий и моментов.*

#### **BIAxIAL BENDING OF PLATE WITH CIRCULAR HOLE AND TWO RADIAL CRACKS CONSIDERING CONTACT OF IT'S EDGES**

*The biaxial bending of an isotropic plate with a circular hole and two radial cracks considering contact of it's edges is investigated. Applying the methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials, the solution of the problem is reduced to a system of integral equations, which is solved by numerical method of mechanical quadratures. The numerical analysis of the problem is made. The graphic dependence of contact pressure, intensity factors of moments and efforts is shown.*