УДК 539.3

Ю. Д. Ковалев, Е. Н. Стативка

ИЗГИБ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ЗАДЕЛКЕ ЕГО ТОРЦОВ

Исследуется электроупругое состояние неоднородного пьезокерамического слоя при скользящей заделке его торцов в случае изгиба. Граничная задача сведена к системе, состоящей из $12k$, $k = 1, 2, \ldots$, интегро-дифференциальных уравнений. Получены выражения для величин, характеризующих напряженное состояние неоднородного слоя. Приведены результаты расчетов напряжений.

Современные требования по энергосбережению, миниатюризации, адаптивности к компьютерным системам управления и контроля все чаще заставляют производителей техники и оборудования обращаться к производителям пьезокерамики с целью совместного поиска тех или иных технологических решений с помощью пьезокерамики. В результате появляются новые типы пьезокерамики, создаются новые и совершенствуются известные пьезокерамические элементы и компоненты. Таким образом, пьезокерамика благодаря своим уникальным свойствам находит все большее применение в различных областях техники и технологии.

Изучению напряженного состояния транстропного (изотропного) слоя, ослабленного сквозными туннельными отверстиями при скользящей заделке торцов (симметричный случай), посвящены работы [1, 3, 6]. В них решения краевых задач строятся с помощью полуобратного метода И. И. Воровича. Изгиб изотропного слоя (полуслоя), ослабленного сквозным некруговым отверстием, рассмотрен в [4]. Аналогичная задача для изотропного слоя с круговым отверстием иными методами решена в [8, 9]. В работе [5] рассмотрен ряд задач электроупругости для слоя при различных граничных условиях на его основаниях. Общий подход к решению смешанных задач теории упругости и электроупругости для слоя, ослабленного сквозными туннельными неоднородностями, отличный от [6], предложен в [10]. С использованием этого подхода в [11] рассмотрена смешанная кососимметричная задача электроупругости для пьезокерамического слоя, ослабленного сквозным отверстием. Исследованию КИН в окрестности концентраторов напряжений в трехмерной постановке посвящены монографии [2, 7].

В этой работе продолжены исследования сопряженных электромеханических полей в пьезоактивном неоднородном слое при скользящей заделке его торцов и отсутствии на них электростатического потенциала.

Постановка задачи. Рассмотрим неоднородный пьезокерамический слой $-h \le x_3 \le h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, в который без предварительного натяжения вклеено или впаяно цилиндрическое включение из другого пьезокерамического материала, ослабленный сквозным отверстием. При этом направляющие цилиндрических поверхностей представляют собой достаточно гладкие замкнутые контуры L_j, $j = 1, 2$. Для определенности под контуром L_1 будем понимать направляющий контур цилиндрической поверхности, ограничивающей отверстие, а под контуром L_2 – направляющий контур поверхности спая пьезокерамического слоя и включения. Пусть на поверхности отверстия действует поверхностная нагрузка (N, T, Z, D_n), где N, T, Z – нормальная и касательные компоненты вектора напряжения, D_n – нормальная компонента вектора электрической индукции, а на бесконечности нагрузка отсутствует. Будем считать, что компоненты заданной нагрузки раскладываются в ряды Фурье по координате x_3 на $[-h, h]$.

Основные соотношения. Полная система уравнений, определяющая решение рассматриваемой задачи (при отсутствии в теле объемных сил и зарядов), состоит из [5]:

– *уравнений равновесия (предполагается суммирование по повторяющемуся индексу)*

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad i, j = 1, 2, 3\,; \tag{1}$$

– *уравнений электростатики*

$$\operatorname{div} D = 0, \qquad E_i = -\partial_i \varphi, \qquad i = 1, 2, 3\,; \tag{2}$$

– *соотношения Коши*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \qquad i, j = 1, 2, 3\,; \tag{3}$$

– *уравнений состояния предварительно поляризованной в направлении оси Ox_3 пьезокерамики*

$$\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3, \qquad \tau_{23} = 2c_{44}\varepsilon_{23} - e_{15}E_2\,,$$

$$\sigma_{22} = c_{12}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} - e_{31}E_3, \qquad \tau_{13} = 2c_{44}\varepsilon_{13} - e_{15}E_1\,,$$

$$\sigma_{33} = c_{13}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + c_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}E_3, \qquad \tau_{12} = (c_{11} - c_{12})\varepsilon_{12}\,,$$

$$D_1 = \varepsilon_{11}^S E_1 + 2e_{15}\varepsilon_{13}, \qquad D_2 = \varepsilon_{11}^S E_2 + 2e_{15}\varepsilon_{23}\,,$$

$$D_3 = \varepsilon_{33}^S E_3 + e_{31}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + e_{33}\varepsilon_{33}\,. \tag{4}$$

Систему (1)–(4) нужно решать при граничных условиях на торцах слоя $x_3 = \pm h$:

$$u_3(x_1, x_2, \pm h) = \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h) = \varphi(x_1, x_2, \pm h) = 0 \tag{5}$$

и условиях контакта на границе раздела сред.

В дальнейшем в качестве исходной целесообразно использовать систему уравнений равновесия среды в перемещениях, которую можно получить из соотношений (1)–(4):

$$V\nabla^2 u_1 + c_{44}\partial_3^2 u_1 + \partial_1\theta = 0, \qquad V\nabla^2 u_2 + c_{44}\partial_3^2 u_2 + \partial_2\theta = 0\,,$$

$$c_{44}\nabla^2 u_3 + c_{33}\partial_3^2 u_3 + \partial_3\{c(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + e_{15}\nabla^2\varphi + e_{33}\partial_3^2\varphi\} = 0\,,$$

$$\varepsilon_{11}\nabla^2\varphi + \varepsilon_{33}\partial_3^2\varphi - e_{15}\nabla^2 u_3 - e_{33}\partial_3^2 u_3 - \partial_3\{e(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2)\} = 0\,, \tag{6}$$

где

$$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \qquad \theta = U(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + c\partial_3 u_3 + e\partial_3\varphi\,,$$

$$U = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}), \quad V = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \quad c = c_{13} + c_{44}, \quad e = e_{15} + e_{31}\,.$$

Будем определять кососимметричное относительно срединной плоскости слоя $x_3 = 0$ решение. Представим компоненты вектора перемещения и потенциал в виде

$$\{u_1, u_2\} = \sum_{k=0}^{\infty}\{u_{1k}, u_{2k}\}\sin\gamma_k x_3, \quad \{u_3, \varphi\} = \sum_{k=0}^{\infty}\{u_{3k}, \varphi_k\}\cos\gamma_k x_3\,, \tag{7}$$

здесь $\gamma_k = \dfrac{2k+1}{2h}\pi$.

Представления (7) компонентов вектора перемещения автоматически удовлетворяют условиям (5) на торцах слоя. С учетом этих соотношений из

(6) можно получить

$$V\varkappa_k u_{1k} + \partial_1\theta_k = 0, \qquad V\varkappa_k u_{2k} + \partial_2\theta_k = 0\,,$$

$$L_{13}u_{3k} + L_{14}\varphi_k + \frac{c}{U}\gamma_k\theta_k = 0, \qquad L_{23}u_{3k} + L_{24}\varphi_k + \frac{e}{U}\gamma_k\theta_k = 0\,, \tag{8}$$

где

$$\varkappa_k = \nabla^2 - \gamma_k^2\mu_0^2, \qquad L_{13} = c_{44}\nabla^2 - \gamma_k^2\delta_1, \qquad \mu_0^2 = \frac{c_{44}}{V}\,,$$

$$L_{14} = L_{23} = e_{15}\nabla^2 - \gamma_k^2\delta_2, \qquad L_{24} = \gamma_k^2\delta_3 - \varepsilon_{11}\nabla^2\,,$$

$$\theta_k = U(\partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k}) + \gamma_k c u_{3k} + \gamma_k e\varphi_k\,,$$

$$\delta_1 = c_{33} - \frac{c^2}{U}, \qquad \delta_2 = e_{33} - \frac{ce}{U}, \qquad \delta_3 = \varepsilon_{33} + \frac{e^2}{U}.$$

Интегрируя систему (8), находим

$$u_{1k} - iu_{2k} = 2\sum_{m=1}^{3} A_k^{(m)}\partial_z\Omega_k^{(m)} + 2i\partial_z\Omega_k^{(0)}\,,$$

$$u_{3k} = \sum_{m=1}^{3} B_k^{(m)}\Omega_k^{(m)}, \qquad \varphi_k = \sum_{m=1}^{3} D_k^{(m)}\Omega_k^{(m)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots. \tag{9}$$

Здесь

$$A_k^{(m)} = \frac{\gamma_k U p_4^*(\mu_m)}{V(\mu_m^2 - \mu_0^2)}, \qquad B_k^{(m)} = \gamma_k^2(d_2\mu_m^2 - \delta_5)\,,$$

$$D_k^{(m)} = \gamma_k^2(\delta_4 - d_1\mu_m^2), \qquad m = 1,2,3\,,$$

$$\delta_4 = \frac{\delta_1}{c} - \frac{\delta_2}{e}, \quad \delta_5 = \frac{\delta_2}{c} + \frac{\delta_3}{e}, \quad d_1 = \frac{c_{44}}{c} - \frac{e_{15}}{e}, \quad d_2 = \frac{e_{15}}{c} + \frac{\varepsilon_{11}^S}{e}.$$

Функции $\Omega_k^{(m)}$ – произвольное решение уравнения Гельмгольца $(\nabla^2 - \gamma_k^2\mu_m^2)\Omega_k^{(m)} = 0$, $m = 0,1,2,3$; μ_m, $m = 1,2,3$, – корни бикубического уравнения [11]. В дальнейшем индекс «1» придадим величинам, описывающим напряженно-деформируемое состояние слоя, а индекс «2» – включения.

Интегральные представления. Метагармонические функции, содержащиеся в (9), разыскиваем в виде

$$\Omega_{1k}^{(m)} = \int_{L_1} p_{1k}^{(m)}(\zeta_1)K_0(\gamma_k\mu_1^{(m)}r_{11})\,ds_1 + \int_{L_2} \tilde{p}_{1k}^{(m)}(\zeta_2)K_0(\gamma_k\mu_1^{(m)}r_{12})\,ds_2\,,$$

$$\Omega_{2k}^{(m)} = \int_{L_2} p_{2k}^{(m)}(\zeta_2)K_0(\gamma_k\mu_2^{(m)}r_{22})\,ds_2, \qquad m = 0,1,2,3. \tag{10}$$

Здесь

$$r_{11} = \left|\zeta_1 - z^{(1)}\right|, \qquad r_{12} = \left|\zeta_2 - z^{(1)}\right|, \qquad r_{22} = \left|\zeta_2 - z^{(2)}\right|,$$

$$z^{(1)} = x_{11} + ix_{12}, \qquad z^{(2)} = x_{21} + ix_{22}\,,$$

$$\zeta_1 = \xi_{11} + i\xi_{12} \in L_1, \qquad \zeta_2 = \xi_{21} + i\xi_{22} \in L_2\,,$$

$K_n(z)$ – функция Макдональда n-го порядка; ds_j – элемент дуги контура L_j, $j = 1,2$; $p_{1k}^{(m)}(\zeta_1)$, $\tilde{p}_{1k}^{(m)}(\zeta_2)$, $p_{2k}^{(m)}(\zeta_2)$, $m = 0,1,2,3$, – неизвестные плотности, причем $p_{1k}^{(3)} = \bar{p}_{1k}^{(2)}$, $\tilde{p}_{1k}^{(3)} = \bar{\tilde{p}}_{1k}^{(2)}$, $p_{2k}^{(3)} = \bar{p}_{2k}^{(2)}$.

Будем предполагать, что для компонентов вектора напряжений и нормальной компоненты вектора электрической индукции, действующих на поверхности отверстия, справедливы разложения

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} N_k \sin \gamma_k x_3 , \qquad T = \sum_{k=0}^{\infty} T_k \sin \gamma_k x_3 ,$$

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \cos \gamma_k x_3 , \qquad D_n = \sum_{k=0}^{\infty} D_n^{(k)} \cos \gamma_k x_3 . \tag{11}$$

Граничные условия на L в комплексной форме имеют вид

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi}(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) = 2(N - iT) ,$$

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\psi}(\sigma_{13} + i\sigma_{23})\right\} = Z, \qquad D_n = 0 , \tag{12}$$

где ψ − угол между внешней нормалью к поверхности отверстия и осью Ox_1.

Условия сопряжения на границе раздела слоя и включения имеют вид

$$N_1 - iT_1 = N_2 - iT_2, \qquad u_{11} - iu_{21} = u_{12} - iu_{22} ,$$

$$u_{31} = u_{32}, \qquad Z_1 = Z_2, \qquad E_{1s} = E_{2s}, \qquad D_{1n} = D_{2n} . \tag{13}$$

Для компонентов вектора напряжения, нормальной компоненты вектора электрической индукции и касательной компоненты вектора электрической напряженности с учетом (2)−(4), (9) и (10)−(12) получаем выражения

$$2(N_k - iT_k) = \sum_{m=1}^{3} S_k^{(m)} \Omega_k^{(m)} + \sigma_0 \sum_{m=0}^{3} \tilde{A}_k^{(m)} \partial_{zz}^2 \Omega_k^{(m)} ,$$

$$Z_k = \operatorname{Re}\left\{ e^{i\psi_0} \sum_{m=0}^{3} \tilde{B}_k^{(m)} \partial_z \Omega_k^{(m)} \right\}, \qquad D_n^{(k)} = \operatorname{Re}\left\{ e^{i\psi_0} \sum_{m=0}^{3} F_k^{(m)} \partial_z \Omega_k^{(m)} \right\},$$

$$E_s^{(k)} = -2\operatorname{Re}\left\{ ie^{i\psi_0} \sum_{m=1}^{3} D_k^{(m)} \partial_z \Omega_k^{(m)} \right\}, \tag{14}$$

где

$$\tilde{A}_k^{(0)} = -8iV, \qquad \tilde{B}_k^{(0)} = 2ic_{44}\gamma_k , \qquad F_k^{(0)} = ie_{15}\gamma_k , \qquad \sigma_0 = -e^{2i\psi} ,$$

$$S_k^{(m)} = 2UA_k^{(m)} \mu_k^{(m)2} - 2c_{13}\gamma_k B_k^{(m)} - 2e_{31}\gamma_k D_k^{(m)} ,$$

$$\tilde{A}_k^{(m)} = -8VA_k^{(m)}, \qquad \tilde{B}_k^{(m)} = 2c_{44}\gamma_k A_k^{(m)} + 2c_{44} B_k^{(m)} + 2e_{15} D_k^{(m)} ,$$

$$F_k^{(m)} = -\varepsilon_{11}^S D_k^{(m)} + e_{15} B_k^{(m)} + e_{15}\gamma_k A_k^{(m)}, \qquad m = 1, 2, 3 .$$

Граничная задача (12), (13) с учетом представлений (10) и выражений (14) предельным переходом на L_1 и L_2 сводится к системе, состоящей из двенадцати сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (при каждом фиксированном k):

$$\sum_{n=0}^{3} \left[-q_{1k}^{(n)} g_{\ell 1k}^{(n)} + \sum_{j=1}^{2} \int_{L_j} q_{jk}^{(n)} G_{\ell jk}^{(n)} ds_j \right] = 0, \qquad \ell = 1, 2 ,$$

$$\sum_{n=0}^{3} \left[\sum_{j=1}^{2} \left(-q_{j+1,k}^{(n)} g_{\ell jk}^{(n)} + \int_{L_j} q_{jk}^{(n)} G_{\ell jk}^{(n)} ds_j \right) - \int_{L_2} q_{3k}^{(n)} G_{\ell 3k}^{(n)} ds_2 \right] = 0, \qquad \ell = 3, \ldots, 6 ,$$

$$\sum_{n=0}^{3} \left[-q_{1k}^{(n)} g_{7k}^{(n)} - \tilde{g}_{7k}^{(n)} \frac{dq_{1k}^{(n)}}{ds_{01}} + \sum_{j=1}^{2} \left(\int_{L_j} q_{jk}^{(n)} G_{7jk}^{(n)} \, ds_j + \int_{L_j} \frac{dq_{jk}^{(n)}}{ds_j} \tilde{G}_{7jk}^{(n)} \, ds_j \right) \right] =$$

$$= N_{1k} - iT_{1k} ,$$

$$\sum_{n=0}^{3}\Bigg[\sum_{j=1}^{2}\Bigg(-q_{j+1,k}^{(n)}g_{8jk}^{(n)}-\tilde g_{8jk}^{(n)}\frac{dq_{j+1,k}^{(n)}}{ds_{02}}+\int\limits_{L_j}q_{jk}^{(n)}G_{8jk}^{(n)}\,ds_j+\int\limits_{L_j}\frac{dq_{jk}^{(n)}}{ds_j}\tilde G_{8jk}^{(n)}\,ds_j\Bigg)-$$

$$-\int\limits_{L_2}q_{3k}^{(n)}G_{83k}^{(n)}\,ds_2-\int\limits_{L_2}\frac{dq_{3k}^{(n)}}{ds_2}\tilde G_{83k}^{(n)}\,ds_2\Bigg]=0\,,$$

$$\sum_{n=1}^{3}\Bigg[\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{L_j}q_{jk}^{(n)}G_{9jk}^{(n)}\,ds_j+\int\limits_{L_2}q_{3k}^{(n)}G_{93k}^{(n)}\,ds_2\Bigg]=0\,, \tag{15}$$

где

$$g_{11k}^{(n)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{01}}l_4(\psi_{01})\tilde B_{1k}^{(n)}\},\qquad g_{21k}^{(n)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{01}}l_4(\psi_{01})F_{1k}^{(n)}\}\,,$$

$$g_{3jk}^{(n)}=2l_4(\psi_{02})A_{jk}^{(n)},\qquad g_{4jk}^{(n)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{02}}l_4(\psi_{02})\tilde B_{jk}^{(n)}\}\,,$$

$$g_{5jk}^{(n)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{02}}l_4(\psi_{02})F_{jk}^{(n)}\}\,,\qquad \{g_{7k}^{(n)},\tilde g_{7k}^{(n)}\}=\sigma_{01}\tilde A_{1k}^{(n)}\{l_6(\psi_{01})\ l_5(\psi_{01})\}\,,$$

$$\{g_{8jk}^{(n)},\tilde g_{8jk}^{(n)}\}=\sigma_{02}\tilde A_{jk}^{(n)}\{l_6(\psi_{01}),l_5(\psi_{01})\},\qquad n=0,1\,,$$

$$g_{11k}^{(2)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{01}}l_4(\psi_{01})(\tilde B_{1k}^{(2)}+\tilde B_{1k}^{(3)})\}\,,$$

$$g_{11k}^{(3)}=\mathrm{Re}\{ie^{i\psi_{01}}l_4(\psi_{01})(\tilde B_{1k}^{(2)}-\tilde B_{1k}^{(3)})\}\,,$$

$$g_{21k}^{(2)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{01}}l_4(\psi_{01})(F_{1k}^{(2)}+F_{1k}^{(3)})\}\,,$$

$$g_{21k}^{(3)}=\mathrm{Re}\{ie^{i\psi_{01}}l_4(\psi_{01})(F_{1k}^{(2)}-F_{1k}^{(3)})\}\,,$$

$$\{g_{7k}^{(2)},\tilde g_{7k}^{(2)}\}=\sigma_{01}(\tilde A_{1k}^{(2)}+\tilde A_{1k}^{(3)})\{l_6(\psi_{01}),l_5(\psi_{01})\}\,,$$

$$\{g_{7k}^{(3)},\tilde g_{7k}^{(3)}\}=i\sigma_{01}(\tilde A_{1k}^{(2)}-\tilde A_{1k}^{(3)})\{l_6(\psi_{01}),l_5(\psi_{01})\}\,,$$

$$g_{3jk}^{(2)}=2l_4(\psi_{02})(A_{jk}^{(2)}+A_{jk}^{(3)}),\qquad g_{4jk}^{(2)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{02}}l_4(\psi_{02})(\tilde B_{jk}^{(2)}+\tilde B_{jk}^{(3)})\}\,,$$

$$g_{3jk}^{(3)}=2il_4(\psi_{02})(A_{jk}^{(2)}-A_{jk}^{(3)}),\qquad g_{4jk}^{(3)}=\mathrm{Re}\{ie^{i\psi_{02}}l_4(\psi_{02})(\tilde B_{jk}^{(2)}-\tilde B_{jk}^{(3)})\}\,,$$

$$g_{5jk}^{(2)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{02}}l_4(\psi_{02})(F_{jk}^{(2)}+F_{jk}^{(3)})\}\,,$$

$$g_{5jk}^{(3)}=\mathrm{Re}\{ie^{i\psi_{02}}l_4(\psi_{02})(F_{jk}^{(2)}-F_{jk}^{(3)})\}\,,$$

$$g_{6jk}^{(1)}=\mathrm{Re}\{ie^{i\psi_{02}}l_4(\psi_{02})D_{jk}^{(1)}\},\qquad g_{6jk}^{(2)}=\mathrm{Re}\{ie^{i\psi_{02}}l_4(\psi_{02})(D_{jk}^{(2)}+D_{jk}^{(3)})\}\,,$$

$$g_{6jk}^{(3)}=-\,\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{02}}l_4(\psi_{02})(D_{jk}^{(2)}-D_{jk}^{(3)})\}\,,$$

$$\{g_{8jk}^{(2)},\tilde g_{8jk}^{(2)}\}=\sigma_{02}(\tilde A_{jk}^{(2)}+\tilde A_{jk}^{(3)})\{l_6(\psi_{01}),l_5(\psi_{01})\}\,,$$

$$\{g_{8jk}^{(3)},\tilde g_{8jk}^{(3)}\}=i\sigma_{02}(\tilde A_{jk}^{(2)}-\tilde A_{jk}^{(3)})\{l_6(\psi_{01}),l_5(\psi_{01})\}\,,$$

$$G_{1jk}^{(n)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{01}}\tilde B_{1k}^{(n)}L_6(\mu_{1k}^{(n)}r_{j10})\}\,,$$

$$G_{2jk}^{(n)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{01}}F_{1k}^{(n)}L_6(\mu_{1k}^{(n)}r_{j10})\},\qquad n=0,1\,,$$

$$G_{1jk}^{(2)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{01}}[\tilde B_{1k}^{(2)}L_6(\mu_{1k}^{(2)}r_{j10})+\tilde B_{1k}^{(3)}L_6(\mu_{1k}^{(3)}r_{j10})]\}\,,$$

$$G_{1jk}^{(3)}=\mathrm{Re}\{ie^{i\psi_{01}}[\tilde B_{1k}^{(2)}L_6(\mu_{1k}^{(2)}r_{j10})-\tilde B_{1k}^{(3)}L_6(\mu_{1k}^{(3)}r_{j10})]\}\,,$$

$$G_{2jk}^{(2)}=\mathrm{Re}\{e^{i\psi_{01}}[F_{1k}^{(2)}L_6(\mu_{1k}^{(2)}r_{j10})+F_{1k}^{(3)}L_6(\mu_{1k}^{(3)}r_{j10})]\}\,,$$

$$G_{2jk}^{(3)}=\mathrm{Re}\{ie^{i\psi_{01}}[F_{1k}^{(2)}L_6(\mu_{1k}^{(2)}r_{j10})-F_{1k}^{(3)}L_6(\mu_{1k}^{(3)}r_{j10})]\}\,,$$

$$H_{3j}^{(n)}=2A_{1k}^{(n)}L_6(\mu_{1k}^{(n)}r_{j20}),\qquad H_{33}^{(n)}=2A_{2k}^{(n)}L_6(\mu_{2k}^{(n)}r_{220})\,,$$

$$H_{4j}^{(n)}=e^{i\psi_{02}}\tilde B_{1k}^{(n)}L_6(\mu_{1k}^{(n)}r_{j20}),\qquad H_{43}^{(n)}=e^{i\psi_{02}}\tilde B_{2k}^{(n)}L_6(\mu_{2k}^{(n)}r_{220})\,,$$

$$H_{5j}^{(n)} = e^{i\psi_{02}} F_{1k}^{(n)} L_6(\mu_{1k}^{(n)} r_{j20}), \qquad H_{53}^{(n)} = e^{i\psi_{02}} F_{2k}^{(n)} L_6(\mu_{2k}^{(n)} r_{220}),$$

$$H_{7j}^{(n)} = \sigma_{01} \tilde{A}_{1k}^{(n)} L_7(\mu_{1k}^{(n)} r_{j10}) + S_{1k}^{(n)} K_0(\mu_{1k}^{(n)} r_{j10}), \qquad \tilde{H}_{7j}^{(n)} = \sigma_{01} \tilde{A}_{1k}^{(n)} L_8(\mu_{1k}^{(n)} r_{j10}),$$

$$H_{8j}^{(n)} = \sigma_{02} \tilde{A}_{1k}^{(n)} L_7(\mu_{1k}^{(n)} r_{j20}) + S_{1k}^{(n)} K_0(\mu_{1k}^{(n)} r_{j20}),$$

$$H_{83}^{(n)} = \sigma_{02} \tilde{A}_{2k}^{(n)} L_7(\mu_{2k}^{(n)} r_{220}) + S_{2k}^{(n)} K_0(\mu_{2k}^{(n)} r_{220}),$$

$$\tilde{H}_{8j}^{(n)} = \sigma_{02} \tilde{A}_{1k}^{(n)} L_8(\mu_{1k}^{(n)} r_{j20}), \qquad \tilde{H}_{83}^{(n)} = \sigma_{02} \tilde{A}_{2k}^{(n)} L_8(\mu_{2k}^{(n)} r_{220}), \quad n = 0,1,2,3,$$

$$H_{6j}^{(n)} = ie^{i\psi_{02}} D_{1k}^{(n)} L_6(\mu_{1k}^{(n)} r_{j20}), \qquad H_{9j}^{(n)} = B_{1k}^{(n)} K_0(\mu_{1k}^{(n)} r_{j20}), \quad j = 1,2,$$

$$H_{63}^{(n)} = ie^{i\psi_{02}} D_{2k}^{(n)} L_6(\mu_{2k}^{(n)} r_{220}), \qquad H_{93}^{(n)} = B_{2k}^{(n)} K_0(\mu_{2k}^{(n)} r_{220}), \quad n = 1,2,3,$$

$$G_{\ell tk}^{(n)} = H_{\ell t}^{(n)}, \qquad G_{\ell tk}^{(2)} = \operatorname{Re}\{H_{\ell t}^{(2)} + H_{\ell t}^{(3)}\},$$

$$G_{\ell tk}^{(3)} = \operatorname{Re}\{i(H_{\ell t}^{(2)} - H_{\ell t}^{(3)})\}, \qquad \ell = 4,5,6,$$

$$G_{\ell tk}^{(n)} = H_{\ell t}^{(n)}, \quad G_{\ell tk}^{(2)} = H_{\ell t}^{(2)} + H_{\ell t}^{(3)}, \quad G_{\ell tk}^{(3)} = i(H_{\ell t}^{(2)} - H_{\ell t}^{(3)}), \quad \ell = 3,7,8,9,$$

$$\tilde{G}_{\ell tk}^{(n)} = \tilde{H}_{\ell t}^{(n)}, \ \tilde{G}_{\ell tk}^{(2)} = \tilde{H}_{\ell t}^{(2)} + \tilde{H}_{\ell t}^{(3)},$$

$$\tilde{G}_{\ell tk}^{(3)} = i(\tilde{H}_{\ell t}^{(2)} - \tilde{H}_{\ell t}^{(3)}), \quad t = 1,2,3, \ \ell = 7,8,$$

$$l_4(\psi_0) = -\frac{\pi e^{-i\psi_0}}{2}, \ l_5(\psi_0) = -\frac{\pi i e^{-2i\psi_0}}{2}, \ l_6(\psi_0) = -\frac{\pi e^{-2i\psi_0} \tilde{k}_0}{2}, \ n = 0,1,$$

$$L_6(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{-i\alpha_0} K_1(\gamma r), \qquad L_7(\gamma r) = \frac{\gamma^2}{4} e^{-2i\alpha_0} K_2^*(\gamma r) - \frac{e^{-i\psi}\tilde{k}}{2(\zeta - \zeta_0)},$$

$$L_8 = -\frac{ie^{-i\psi}}{2(\zeta - \zeta_0)}, \qquad \tilde{k}_0 = \frac{d\psi_0}{ds_0}, \qquad \tilde{k} = \frac{d\psi}{ds}.$$

Неизвестные плотности в системе (15) связаны с плотностями интегральных представлений (10) следующими соотношениями:

$$q_{1k}^{(n)} = p_{1k}^{(n)}, \qquad q_{2k}^{(n)} = \tilde{p}_{1k}^{(n)}, \qquad q_{3k}^{(n)} = p_{2k}^{(n)}, \qquad n = 0,1,$$

$$p_{1k}^{(2)} = q_{1k}^{(2)} + iq_{1k}^{(3)}, \qquad \tilde{p}_{1k}^{(2)} = q_{2k}^{(2)} + iq_{2k}^{(3)}, \qquad p_{2k}^{(2)} = q_{3k}^{(2)} + iq_{3k}^{(3)}.$$

Результаты численного исследования. В качестве примера рассмотрим неоднородный пьезокерамический слой, изготовленный из материала PZT-4, включение которого изготовлено из материала PXE-5.

Направляющие цилиндрических поверхностей могут быть выбраны в виде эллипса (круга):

– для сквозного отверстия

$$L_1: \quad \xi_{11} = R_{11}\cos\varphi_1 + d_{11}, \quad \xi_{12} = R_{12}\cos\varphi_1 + d_{12}, \quad 0 \le \varphi_1 \le 2\pi;$$

– для включения

$$L_2: \quad \xi_{21} = R_{21}\cos\varphi_2 + d_{21}, \quad \xi_{22} = R_{22}\cos\varphi_2 + d_{22}, \quad 0 \le \varphi_2 \le 2\pi.$$

Пусть на поверхности отверстия действует нагрузка $N_1 = -Px_3$, $P = \text{const}$.

При численной реализации алгоритма система интегро-дифференциальных уравнений методом механических квадратур сводена к системе линейных алгебраических уравнений.

Для характеристики напряженного состояния на границе раздела материалов и на контуре отверстия производили расчет напряжения

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - 2\sigma_{12}\cos\theta\sin\theta, \tag{16}$$

причем со стороны пьезокерамического слоя $\theta = \psi - \pi$, а со стороны включения $\theta = \psi$.

Последовательность вычислений такова: сначала численно решали систему интегро-дифференциальных уравнений (15), после чего определяли коэффициенты Фурье компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$, а затем по формулам (16) рассчитывали искомые напряжения на границе раздела материалов со стороны включения и со стороны пьезокерамического слоя, а также на поверхности сквозного отверстия.

Пусть для определенности контур L_1 находится справа от оси Ox_1, а контур L_2 – слева. Обозначим через l_x расстояние между центрами отверстия и включения в случае, когда их центры расположены на оси Ox_1: $l_x = |d_{11}| + |d_{21}|$ $(d_{12} = d_{22} = 0)$.

На рис. 1–8 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ в случае, когда радиусы сквозного отверстия и включения равны единице ($R_{11} = R_{12} = R_{21} = R_{22} = R = 1$) при $h = 2$ (рис. 1–4) и при $h = 4$ (рис. 5–8).

На рис. 1, 5 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ вдоль «толщинной» координаты для отверстия в точке $\varphi_1 = \pi$. Кривые *1–4* соответствуют значениям $l_x/R = 2.25, 2.75, 3.5, 5.0$. Точками вдоль кривой *4* нанесены результаты точного решения, полученного методом рядов для слоя, ослабленного одним сквозным круговым отверстием.

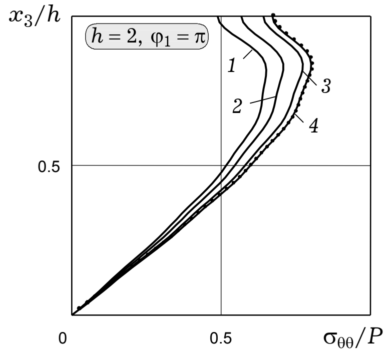

Рис. 1

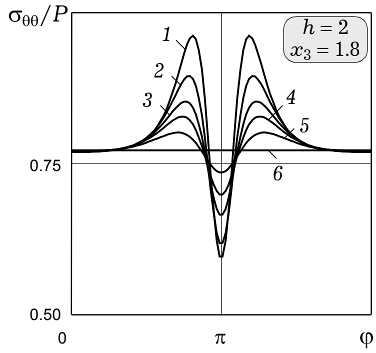

Рис. 2

На рис. 2, 6 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ по контуру, ограничивающему отверстие в плоскости $x_3 = 1.8$ (рис. 2) и $x_3 = 3.8$ (рис. 6). Кривые *1–6* соответствуют значениям $l_x/R = 2.25, 2.5, 2.75, 3.00, 3.50\ 12.00$.

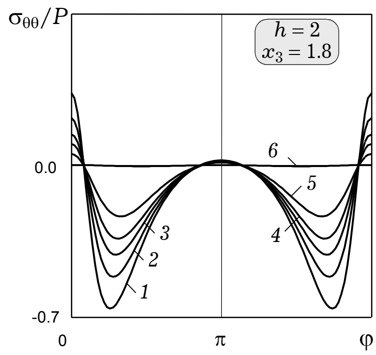

Рис. 3

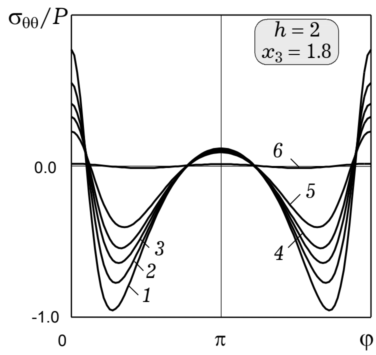

Рис. 4

На рис. 3, 4, 7, 8 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ по контуру, ограничивающему включение в плоскости $x_3 = 1.8$ (рис. 3, 4) и $x_3 = 3.8$ (рис. 7, 8) со стороны включения (рис. 3, 7) и со стороны слоя (рис. 4, 8). Кривые *1–6* на рис. 3, 4, 7, 8 соответствуют значениям $l_x/R = 2.25,\ 2.5,\ 2.75,\ 3.00,\ 3.50,\ 17.00$.

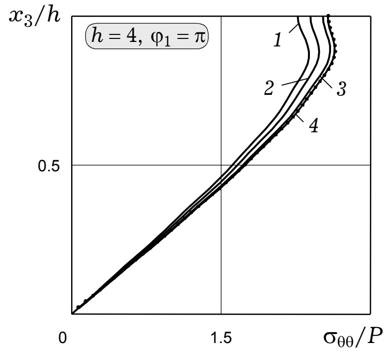

Рис. 5

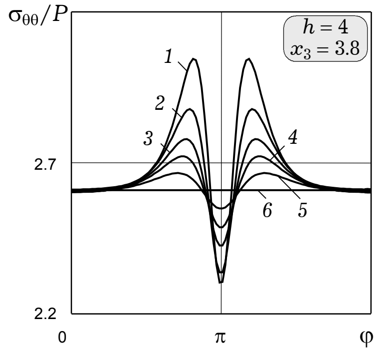

Рис. 6

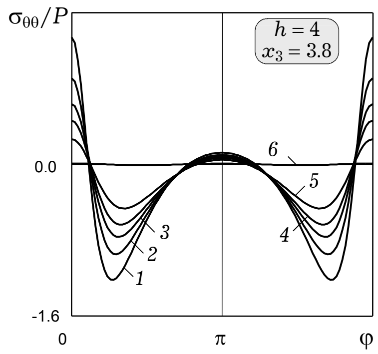

Рис. 7

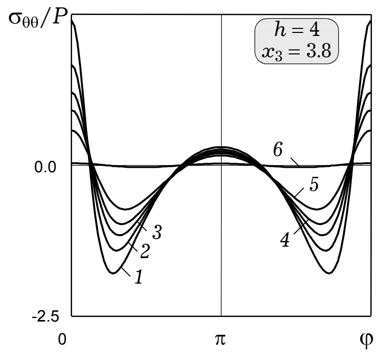

Рис. 8

На рис. 9–14 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ в случае, когда радиус сквозного отверстия равен единице ($R_{11} = R_{12} = R = 1$), а включение представляет собой эллипс ($R_{21} = 1$, $R_{22} = 0.5$) при $h = 2$ (рис. 9, 11, 12) и $h = 4$ (рис. 10, 13, 14).

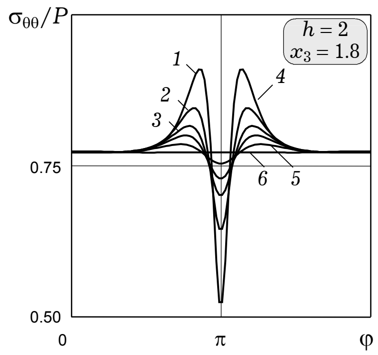

Рис. 9

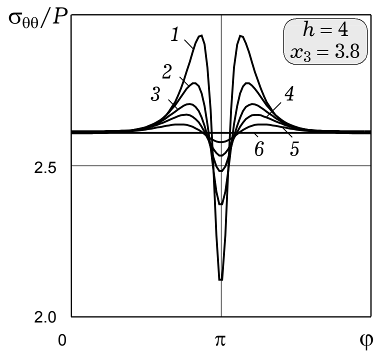

Рис. 10

На рис. 9, 10 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ по контуру, ограничивающему отверстие в плоскости $x_3 = 1.8$ (рис. 9) и $x_3 = 3.8$ (рис. 10). Кривые *1–6* на рис. 9, 10 соответствуют значениям $l_x/R = 2.25,\ 2.5,\ 2.75,\ 3.00,\ 3.50,\ 12.00$.

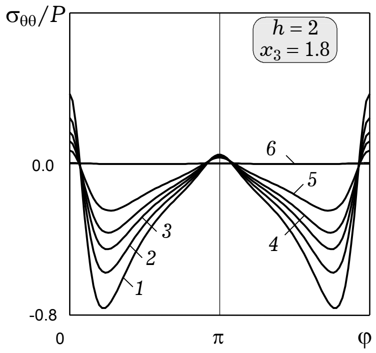

Рис. 11

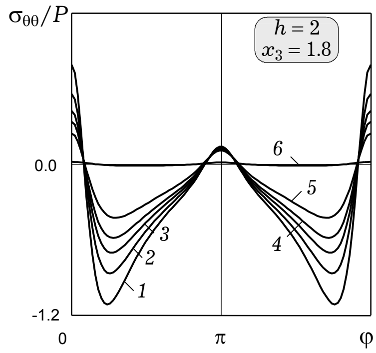

Рис. 12

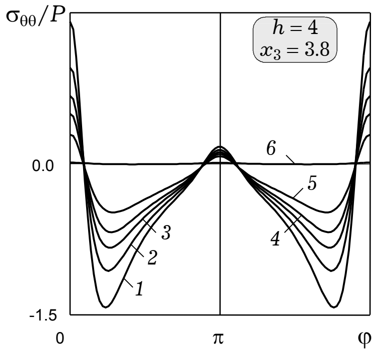

Рис. 13

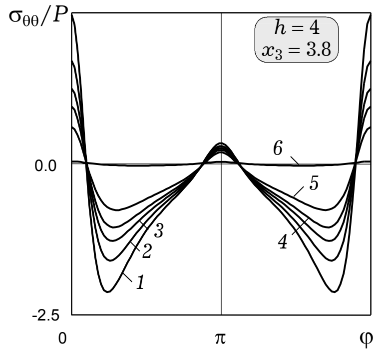

Рис. 14

На рис. 11−14 приведены эпюры распределения относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ по контуру, ограничивающему включение в плоскости $x_3 = 1.8$ (рис. 11, 12) и $x_3 = 3.8$ (рис. 13, 14) со стороны включения (рис. 11, 13) и со стороны слоя (рис. 12, 14). Кривые *1*−*6* на рис. 11−14 соответствуют значениям $l_x/R = 2.25,\ 2.5,\ 2.75,\ 3.00,\ 3.50,\ 17.00$.

Выводы. По результатам численного исследования можно сделать следующие выводы:

− относительное окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}/P$ на контуре сквозного отверстия принимает минимальное значение в точке $\varphi_1 = \pi$. Таким образом, за счет присутствия в слое включения из другого пьезокерамического материала наблюдается эффект упрочнения в ближайшей к включению точке контура сквозного отверстия. Эффект присутствия в слое включения перестает сказываться при $l_x/R = 12.00$. Относительное окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}/P$ на контуре сквозного отверстия в этом случае становится постоянным;

− при увеличении толщины слоя происходит рост относительного окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}/P$ на контуре сквозного отверстия;

− относительное окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}/P$ на контуре включения принимает максимальное значение в точке $\varphi_2 = 0$ как со стороны включения, так и со стороны слоя;

− эффект присутствия в слое сквозного отверстия перестает сказываться при $l_x/R = 17.00$, в этом случае относительное окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}/P$ на контуре включения как со стороны слоя, так и со стороны включения становится равным нулю.

Таким образом, с уменьшением расстояния между центрами отверстия и включения происходит рост взаимного влияния двух концентраторов напряжений друг на друга.

1. *Алтухов Е. В., Косова В. В.* Смешанная краевая задача для транстропного слоя с полостью // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 8–15.
2. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 345 с.
3. *Буланов Г. С., Шалдырван В. А.* Решение смешанной задачи о концентрации напряжений в толстой пластине // Теорет. и прикл. механика. – 1984. – Вып. 15. С. 5–9.
4. *Григолюк Э. И., Ковалев Ю. Д., Фильштинский Л. А.* Изгиб полуслоя, ослабленного сквозным отверстием // Докл. РАН. – 1995. – **345**, № 1. – С. 54–56.
5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5).
6. *Жиров В. Е., Устинов Ю. А.* Некоторые задачи теории плит из электроупругого материала // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1977. – Вып. 17. – С. 62–67.
7. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 288 с.
8. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 237 с.
9. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 261 с.
10. *Фильштинский Л. А.* Периодические решения теории упругости для цилиндра в $\mathbb{R}^3$ // Теорет. и прикл. механика. – 1990. – Вып. 21. – С. 13–20.
11. *Фильштинский Л. А., Ковалев Ю. Д.* Концентрация механических напряжений у отверстия в пьезокерамическом слое // Механика композитных материалов. – 2002. – **38**, № 2. – С. 183–188.

ЗГИН П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО НЕОДНОРІДНОГО ШАРУ ПРИ КОВЗНОМУ ЗАЩЕМЛЕННІ ЙОГО ТОРЦІВ

Досліджується електропружний стан неоднорідного п'єзокерамічного шару при ковзному защемленні його торців у випадку згину. Крайова задача зведена до системи, яка складається з $12k$, $k = 1, 2, \ldots$, *інтегро-диференціальних рівнянь. Отримано вирази для величин, що характеризують напружений стан неоднорідного шару. Наведено результати розрахунків напружень.*

BEND OF INHOMOGENEOUS LAYER WITH SLIDING SEAL OF ITS ENDS

The electroelastic state of inhomogeneous piezoceramic layer with sliding seal of its ends in the case of bend is studied. The boundary-value problem is reduced to a system, which consists of $12k$, $k = 1, 2, \ldots$, *integral and differential equations. The expressions for stresses, which characterize the stress state of inhomogeneous layer, are found. The results of calculations of characteristic stresses are presented.*

Сумск. гос. ун-т, Сумы

Получено
04.10.05