

## КОНТАКТНА МОДЕЛЬ ЗОВНІШНЬОЇ ЕЛЕКТРОПРОНИКНОЇ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ В П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Розглянуто біматеріальну п'єзоелектричну площину з двома зовнішніми міжфазними тріщинами, навантаженими системою зосереджених сил. Для дослідження застосовано класичну модель для обох тріщин, а для правої – ще й контактну модель. В останньому випадку проблема зведена до комбінованої задачі лінійного спряження Діріхле – Рімана, яка розв'язана точно. Довжина зони контакту визначається з трансцендентного рівняння, а для відповідного коефіцієнта інтенсивності напружень одержано просту аналітичну формулу. Проведено дослідження залежності довжини ділянки контакту та коефіцієнта інтенсивності напружень від співвідношення зосереджених сил і від розташування точки їх прикладення.

**Вступ.** У зв'язку з активним використанням композитних матеріалів проблема тріщини на межі поділу двох матеріалів є досить актуальною. В літературі існує дві основні моделі тріщини – осцилююча (відкрита) та контактна. У першій моделі є недолік: біля вершини тріщини напруження і переміщення берегів тріщини мають осцилюючі особливості – це призводить до фізично нереальних взаємопроникнень матеріалів. Така модель почала вивчатися у роботах [7, 13].

Контактна модель тріщини вперше запропонована в роботі [8]. Далі вона з використанням точного аналітичного підходу розглядалась у роботах [3, 6, 11, 12] та інших. Урахування теплового потоку здійснювалось у роботах [2, 9].

У запропонованій роботі побудовано точний розв'язок для біматеріальної п'єзоелектричної площини з двома зовнішніми міжфазними тріщинами з урахуванням зони контакту в одній із них.

**Постановка проблеми і побудова основних співвідношень.** Розглядаємо дві різнорідні п'єзоелектричні півплощини  $x_3 \geq 0$  і  $x_3 \leq 0$  з характеристиками  $E_{ijkl}^{(1)}$  і  $E_{ijkl}^{(2)}$  відповідно, які жорстко зчеплені вздовж відрізка  $L_1 = (c, a)$  лінії поділу матеріалів (інтерфейсу). На частині інтерфейсу, що залишилась, утворились дві зовнішні тріщини  $x_1 < c$  і  $x_1 > a$  (рис. 1).

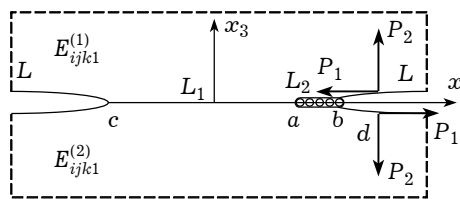


Рис. 1

Матриці електромеханічних характеристик матеріалів мають такий сенс:

$$E_{ijkl} = \begin{cases} C_{ijkl}, & j, k = 1, 2, 3, \\ e_{lij}, & j = 1, 2, 3, \quad k = 4, \\ e_{ikl}, & k = 1, 2, 3, \quad j = 4, \\ -\varepsilon_{il}, & j = k = 4, \end{cases}$$

де  $C_{ijkl}$ ,  $e_{lij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – пружні модулі, п'єзоелектричні та діелектричні константи відповідно. Позначимо відкриті частини тріщини через  $L = (x_1 < c, x_1 > b)$  і будемо вважати, що біля вершини  $x_1 = a$  правої тріщини має місце зона безфрикційного контакту її берегів  $L_2 = (a, b)$ . Слід відзначити, що подібну зону контакту треба було б врахувати і біля вершини лівої тріщини, але взаємний вплив зон контакту є малим аж до знехтування, тому з високим ступенем точності можна розглядати кожну зону окремо.,

Вважаємо, що весь інтерфейс електропроникний, тобто для потенціалу  $\phi$  електричного поля  $[\phi]=0$ ,  $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ . Тут і надалі квадратні дужки означають стрибок відповідної функції при переході через інтерфейс.

Базуємося на виразах для похідної від переміщень  $[\mathbf{v}'(x_1)]$  і вектора напружень  $\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0)$  роботи [10]:

$$[\mathbf{v}'(x_1)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (1)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (2)$$

де

$$[\mathbf{v}'(x_1)] = \{[u'_1(x_1)], [u'_3(x_1)], [\phi'(x_1)]\}^\top,$$

$$\mathbf{t}^{(1)} = \{\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0), \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), D_3^{(1)}(x_1, 0)\}^\top,$$

$\mathbf{W}(z) = \begin{Bmatrix} W_1(z) \\ W_3(z) \\ W_4(z) \end{Bmatrix}$  – аналітична у всій площині, включаючи жорстко зчеплені

ділянки інтерфейсу, вектор-функція комплексної змінної  $z = x_1 + ix_3$ ;  $D_3$  – компонента вектора електричної індукції. Біматеріальна матриця  $\mathbf{G}$  розміру  $3 \times 3$  визначається через електромеханічні характеристики півплощин і має таку структуру:

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} \end{Bmatrix},$$

причому всі  $g_{ij}$  дійсні.

Введемо нові вектори

$$\mathbf{S}(x_1) = \{[u'_1(x_1)], [u'_3(x_1)], D_3^{(1)}(x_1, 0)\}^\top,$$

$$\mathbf{P}(x_1) = \{\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0), \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), [\phi'(x_1)]\}^\top.$$

Тоді з огляду на (1), (2) маємо

$$\mathbf{S}(x_1) = \mathbf{M}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{M}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (3)$$

$$\mathbf{P}(x_1) = \mathbf{N}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{N}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (4)$$

де

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{Bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Вводячи нову вектор-функцію

$$\mathbf{R}(z) = \begin{cases} \mathbf{N}\mathbf{W}(z), & x_3 > 0, \\ \bar{\mathbf{N}}\mathbf{W}(z), & x_3 < 0, \end{cases} \quad \mathbf{R}(z) = \{R_1(z), R_3(z), R_4(z)\}^\top,$$

отримаємо

$$\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{R}^+(x_1), \quad \mathbf{W}^-(x_1) = \bar{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{R}^-(x_1).$$

Тоді з огляду на (3), (4) запишемо

$$\mathbf{P}(x_1) = \mathbf{R}^+(x_1) - \mathbf{R}^-(x_1), \quad (5)$$

$$\mathbf{S}(x_1) = \mathbf{Q}\mathbf{R}^+(x_1) - \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{R}^-(x_1), \quad (6)$$

де

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{N}^{-1}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} iq_{11} & q_{13} & q_{14} \\ q_{31} & iq_{33} & q_{34} \\ q_{41} & iq_{43} & iq_{44} \end{pmatrix},$$

причому всі  $q_{ij}$  – дійсні.

Зі співвідношення (5) випливає, що функція  $\mathbf{R}(z)$  аналітична на тих ділянках інтерфейсу, на яких  $\mathbf{P}(x_1) = 0$ .

З огляду на те, що  $[\varphi'] \equiv 0$ , зі співвідношення (5) маємо, що  $R_4^+(x_1) - R_4^-(x_1) \equiv 0$  для  $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ . Звідси випливає, що  $R_4(z) \equiv R_4^0 = \text{const}$ . Однак, оскільки на нескінченності усі чинники дорівнюють нулеві, то  $R_4^0 = 0$ .

Запишемо співвідношення (6) у розгорнутому вигляді з урахуванням того, що  $R_4(x) \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} [u_1'(x_1)] &= iq_{11}R_1^+(x_1) + q_{13}R_3^+(x_1) + iq_{11}R_1^-(x_1) - q_{13}R_3^-(x_1), \\ [u_3'(x_1)] &= q_{31}R_1^+(x_1) + iq_{33}R_3^+(x_1) - q_{31}R_1^-(x_1) + iq_{33}R_3^-(x_1), \\ [D_3^{(1)}(x_1, 0)] &= q_{41}R_1^+(x_1) + iq_{43}R_3^+(x_1) - q_{41}R_1^-(x_1) + iq_{43}R_3^-(x_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Комбінуючи перше та друге з рівнянь (7), маємо

$$[u_3'(x_1)] + im_j[u_1'(x_1)] = \vartheta_j[F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1)], \quad (8)$$

де

$$F_j(z) = R_1(z) + iS_j R_3(z), \quad (9)$$

$$m_j = \pm \sqrt{-\frac{q_{31}q_{33}}{q_{11}q_{13}}}, \quad \gamma_j = -\frac{q_{31} + m_j q_{11}}{\vartheta_j}, \quad S_j = \frac{q_{33} + m_j q_{13}}{q_{31} - m_j q_{11}} \quad (S_j = -\gamma_j),$$

$$\vartheta_j = q_{31} - m_j q_{11}, \quad j = 1, 2.$$

Рівняння (5) і (9) дадуть

$$\sigma_{13}^{(1)}(x, 0) + iS_j \sigma_{33}^{(1)}(x, 0) = F_j^+(x) - F_j^-(x). \quad (10)$$

**Класична модель тріщини.** Розглянемо спочатку більш простий випадок класичної моделі правої тріщини. Він має місце, коли зона контакту відсутня, тобто  $L_2 = 0$  і  $b = a$ . Конфігурація області, яка примикає до зони зчеплення, показана для цього випадку на рис. 2.

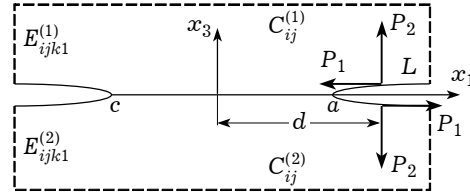


Рис. 2

Умови на інтерфейсі мають вигляд

$$\begin{aligned} u_1^+ &= u_1^-, & u_3^+ &= u_3^-, & \sigma_{13}^+ &= \sigma_{13}^-, & \sigma_{33}^+ &= \sigma_{33}^-, \\ \varphi^+ &= \varphi^-, & D_3^+ &= D_3^-, & x_1 &\in (c, a); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^\pm &= P_1 \delta(x_1 - d), & \sigma_{33}^\pm &= P_2 \delta(x_1 - d), \\ \varphi^+ &= \varphi^-, & D_3^+ &= D_3^-, & x_1 &\notin (c, a). \end{aligned} \quad (12)$$

Враховуючи те, що функції  $\mathbf{W}(z)$ ,  $\mathbf{R}(z)$  і  $F_j(z)$  побудовано з урахуванням неперервності напружень при переході через інтерфейс, і задовольняючи за допомогою співвідношень (8), (10) умови (11), (12), отримуємо задачу

лінійного спряження для функції  $F_1(z)$ :

$$\begin{aligned} F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) &= 0, & x_1 \in (c, a), \\ F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1) &= g(x_1), & x_1 \notin (c, a), \end{aligned} \quad (13)$$

де  $g_1(x) = (P_1 + iS_1P_2)\delta(x_1 - d)$ .

Зауважимо, що зі співвідношень (8), (10) тут використано лише рівняння з індексом  $j = 1$ , яких достатньо для проведення наступного аналізу.

На основі [3] розв'язок задачі (13) з урахуванням нульових умов для функції  $F_1(z)$  на нескінченності має вигляд

$$F_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{x \notin (c, a)} \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)} dt,$$

де  $X(z) = (z-c)^{-0.5+i\varepsilon} (z-a)^{-0.5-i\varepsilon}$ ,  $\varepsilon = \frac{\ln \gamma_1}{2\pi}$ .

Обчисливши останній інтеграл, отримаємо

$$F_1(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \frac{P_1 + iS_1P_2}{X^+(d)(d-z)}. \quad (14)$$

Використовуючи формулу (8) і враховуючи умови  $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = = F_1(x_1)$  для  $x_1 \notin (c, a)$ , отримуємо такий вираз для стрибка похідної від переміщень при переході через інтерфейс:

$$\begin{aligned} [u_3'(x_1)] + im_1[u_1'(x_1)] &= \vartheta_1(1 + \gamma_1)F_1(x) = \\ &= \vartheta_1(1 + \gamma_1) \frac{X(x_1)}{2\pi i} \frac{P_1 + iS_1P_2}{X^+(d)(d-x)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналіз цього співвідношення показує, що при  $x_1 \rightarrow a + 0$  права частина (15) змінює знак нескінченну кількість разів, тобто для такої моделі тріщини має місце добре відома осцилююча особливість [13], що характеризується фізично нереальним взаємопроникненням матеріалів.

**Контактна модель тріщини.** Повернемось тепер до контактної моделі, яка сформульована на початку статті і зображена на рис. 1. Ця модель дозволяє усунути осциляцію біля правої вершини та визначити реальне положення точки  $b$ .

Умови на інтерфейсі у цьому випадку, крім співвідношень (11), включають:

$$\sigma_{13}^\pm = 0, \quad [u_3] = 0, \quad x_1 \in L_2, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^\pm &= P_1\delta(x_1 - d), & \sigma_{33}^\pm &= P_2\delta(x_1 - d), \\ \varphi^+ &= \varphi^-, & D^+ &= D^-, & x_1 &\in L. \end{aligned} \quad (17)$$

Задовольняючи за допомогою співвідношень (7), (10) усі необхідні граничні умови з (11), (16), (17), одержуємо

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (18)$$

$$\operatorname{Re} F_1^\pm(x_1) = 0, \quad x_1 \in L_2, \quad (19)$$

$$F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1) = g(x_1), \quad x_1 \in L. \quad (20)$$

Отримана задача лінійного спряження є комбінованою крайовою задачею Діріхле – Рімана. Такого роду задачі розглядалися у роботах [1, 5] (в останній роботі – стосовно до проблем взаємодії штамп з пружною півпло-

щиною). Застосовуючи методику, викладену в цих роботах, маємо такий розв'язок задачі:

$$F_1(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i(d-z)} G(z), \quad (21)$$

де

$$G(z) = \operatorname{Re} \left[ \frac{P_1 + iS_1P_2}{X_0^+(d)} \right] \frac{Y(z)}{Y(d)} + i \operatorname{Im} \left[ \frac{P_1 + iS_1P_2}{X_0^+(d)} \right],$$

$$Y(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}, \quad X_0(z) = \frac{ie^{i\psi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-a)}},$$

$$\psi(z) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{(b-c)(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma.$$

З урахуванням того, що  $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$  для  $x_1 \notin (c, b)$ , на основі формули (8) одержуємо

$$[u_3'(x_1)] + im_1[u_1'(x_1)] = \vartheta_1(1 + \gamma_1) \frac{X_0(x_1)}{2\pi i(d-x_1)} G(x_1). \quad (22)$$

Нескладний аналітичний аналіз показує, що при  $b \rightarrow a$  співвідношення (21), (22) зводяться до формул (14), (15) осциляційної моделі, що свідчить про правильність результатів, отриманих для контактної моделі.

Розглянемо далі визначення реальної довжини зони контакту, а також коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Розв'язок (21) математично правильний для будь-якого положення точки  $b$ . Однак він буде фізично коректним, якщо будуть виконані такі додаткові умови:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \leq 0, \quad x_1 \in L_2,$$

$$[u_3(x_1)] \geq 0, \quad x_1 \geq b.$$

З аналізу розв'язку (21) випливає, що ці умови будуть виконані, якщо трищина в точці  $b$  закривається плавно, тобто, коли  $\sqrt{x_1 - b} [u_3'(x_1)] \Big|_{x \rightarrow b+0} \rightarrow 0$ . Беручи до уваги, що  $\psi(b) = 0$ , та використовуючи формулу (22), отримуємо таке рівняння:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{P_1 + iS_1P_2}{X_0^+(d)} \right] = 0.$$

Використовуючи вирази для  $X_0^+(d)$  і відокремлюючи дійсну частину, останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$\operatorname{tg} \{ \psi(d) \} = S_1 \frac{P_2}{P_1}, \quad (23)$$

де

$$\psi(d) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1+\lambda)\sqrt{1-\chi} + \sqrt{1-(1+\lambda)\chi}}}, \quad (24)$$

причому  $\chi = \frac{a-c}{d-c}$ ,  $\lambda = \frac{b-a}{a-c}$ .

Рівняння (23) є трансцендентним рівнянням для визначення відносної довжини області контакту  $\lambda$ . У випадку малих  $\lambda$ , вважаючи, що  $1 + \lambda \approx 1$ , одержуємо  $\psi(d) \approx \varepsilon \ln \frac{\lambda}{4(1-\chi)}$  і рівняння (23) допускає такий наближений розв'язок:

$$\lambda_0 \approx \tilde{\lambda}_0 = 4(1 - \chi) \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[ \operatorname{arctg} \left( S_1 \frac{P_2}{P_1} \right) + \pi n \right] \right\}, \quad (25)$$

де  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , причому  $n$  потрібно вибрати так, щоб  $\tilde{\lambda}_0$  було найбільшим коренем рівняння (23) із проміжку  $(0, 1)$ .

Знайдемо тепер коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), котрі визначають можливість розвитку тріщини. У випадку контактної моделі таким КІН є

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow a-0} \sqrt{2\pi(a-x_1)} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0). \quad (26)$$

Маючи на увазі, що  $F_1^-(x_1) = -\gamma_1^{-1} F_1^+(x_1)$  для  $x_1 \in L_1$ , з формули (10) отримаємо

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \operatorname{Re} \{ F_1^+(x_1) \}, \quad x_1 \in L_1.$$

Використовуючи формулу (21), а також враховуючи, що

$$e^{i\psi(x_1)} = \sqrt{\gamma} e^{i\psi^*(x_1)}, \quad x_1 \in L_1,$$

приходимо до виразу

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\psi^*(x_1)}}{2\pi i (d-x_1) \sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}} G^+(x_1) \right\}, \quad x_1 \in L_1,$$

де

$$\psi^*(x_1) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(x_1-c)}}{\sqrt{(b-c)(a-x_1)} + \sqrt{(a-c)(b-x_1)}}.$$

Підставляючи останню формулу для  $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$  у (26) і враховуючи, що  $\psi^*(a) = 0$ , маємо

$$k_2 = \frac{1 + \gamma_1}{\sqrt{2\pi\gamma_1(a-c)(d-a)}} \operatorname{Im} \left[ \frac{P_1 + iS_1P_2}{X_0^+(d)} \right]. \quad (27)$$

Звідси з урахуванням рівняння (23) після нескладних перетворень отримаємо

$$k_2 = -\frac{1 + \gamma_1}{\sqrt{2\pi\gamma_1}} \sqrt{\frac{d-c}{(a-c)(d-a)}} \sqrt{P_1^2 + S_1^2 P_2^2}.$$

**Аналіз результатів.** З метою порівняння результатів, отриманих за допомогою двох моделей міжфазної тріщини, на рис. 3 наведено графіки  $[u_3'(x_1)]$ , отримані для осциляційної моделі на підставі формули (15) (крива 1) і для контактної моделі при  $\lambda = \lambda_0 = 0.0291194$  на підставі формули (22) (крива 2). Розрахунки виконано для випадку, коли верхній матеріал PZT-4, а нижній – PZT-5 (характеристики матеріалів наведено у табл. 1) при  $c = -1$ ,  $a = 1$ ,  $d = 2$ ,  $P_1 = 50$  Н/м,  $P_2 = -1$  Н/м.

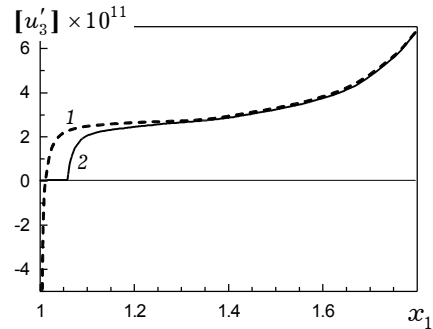


Рис. 3

Таблиця 1

	PZT 4	PZT 5	Ортотропний матеріал
$C_{11}, \text{Н/м}^2$	$13.9 \cdot 10^{10}$	$12.1 \cdot 10^{10}$	$5.88 \cdot 10^{10}$
$C_{13}, \text{Н/м}^2$	$7.43 \cdot 10^{10}$	$7.52 \cdot 10^{10}$	$1.47 \cdot 10^{10}$
$C_{33}, \text{Н/м}^2$	$11.3 \cdot 10^{10}$	$11.1 \cdot 10^{10}$	$5.88 \cdot 10^{10}$
$C_{44}, \text{Н/м}^2$	$2.56 \cdot 10^{10}$	$2.11 \cdot 10^{10}$	$2.21 \cdot 10^{10}$
$e_{31}, \text{см/м}^2$	-6.98	-5.4	0
$e_{33}, \text{см/м}^2$	13.84	15.8	0
$e_{15}, \text{см/м}^2$	13.44	12.3	0
$\varepsilon_{11}, \Phi/\text{м}$	$60.1 \cdot 10^{-10}$	$81.07 \cdot 10^{-10}$	$0.885 \cdot 10^{-10}$
$\varepsilon_{33}, \Phi/\text{м}$	$54.7 \cdot 10^{-10}$	$73.46 \cdot 10^{-10}$	$0.8856 \cdot 10^{-10}$

Надалі числовий аналіз виконано для контактної моделі міжфазної тріщини. У табл. 2–5 для  $c = -1$ ,  $a = 1$ ,  $P_2 = -1$  і різних  $d$  наведено значення відносних довжин області контакту  $\lambda_0$  залежно від величини  $P_1$ . Тут і надалі значення всіх величин наведено в міжнародній системі одиниць СІ.

Вибирали біматеріали, складені з компонент, характеристики яких наведено в табл. 1. Результати обчислень для біматеріалу PZT-4/PZT-5, для якого  $\gamma = 1.0328$ ,  $\varepsilon = 0.0051$ , містять табл. 2 і 3, а для біматеріалу PZT-4/ортотропний матеріал, для якого  $\gamma = 0.7986$ ,  $\varepsilon = -0.0358$ , – табл. 4 і 5.

Таблиця 2

$\lambda_0$ (для біматеріалу PZT-4/PZT-5)						
$\frac{P_1}{P_2}$ $\frac{d-a}{a-c}$	100	10	5	2	1	0
0.25	$8.51 \cdot 10^{-266}$	$2.23 \cdot 10^{-258}$	$2.76 \cdot 10^{-250}$	$3.73 \cdot 10^{-228}$	$3.96 \cdot 10^{-201}$	$1.01 \cdot 10^{-133}$
0.5	$1.42 \cdot 10^{-265}$	$3.72 \cdot 10^{-258}$	$4.59 \cdot 10^{-250}$	$6.22 \cdot 10^{-228}$	$6.61 \cdot 10^{-201}$	$1.67 \cdot 10^{-133}$
1	$2.13 \cdot 10^{-265}$	$5.57 \cdot 10^{-258}$	$6.89 \cdot 10^{-250}$	$9.33 \cdot 10^{-228}$	$9.91 \cdot 10^{-201}$	$2.52 \cdot 10^{-133}$
2	$2.84 \cdot 10^{-265}$	$7.43 \cdot 10^{-258}$	$9.19 \cdot 10^{-250}$	$1.24 \cdot 10^{-227}$	$1.32 \cdot 10^{-200}$	$3.36 \cdot 10^{-133}$

Таблиця 3

$\lambda_0$ (для біматеріалу PZT-4/PZT-5)					
$\frac{P_1}{P_2}$ $\frac{d-a}{a-c}$	-1	-2	-5	-10	-100
0.25	$2.56 \cdot 10^{-66}$	$2.72 \cdot 10^{-39}$	$3.68 \cdot 10^{-17}$	$4.54 \cdot 10^{-9}$	$9.9 \cdot 10^{-2}$
0.5	$4.26 \cdot 10^{-66}$	$4.53 \cdot 10^{-39}$	$6.13 \cdot 10^{-17}$	$7.57 \cdot 10^{-9}$	$1.77 \cdot 10^{-1}$
1	$6.39 \cdot 10^{-66}$	$6.79 \cdot 10^{-39}$	$9.19 \cdot 10^{-17}$	$1.14 \cdot 10^{-8}$	$2.91 \cdot 10^{-1}$
2	$8.52 \cdot 10^{-66}$	$9.05 \cdot 10^{-39}$	$1.23 \cdot 10^{-16}$	$1.51 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-1}$

Таблиця 4

$\lambda_0$ (для біматеріалу PZT-4/ортотропний матеріал)						
$\frac{P_1}{P_2}$	100	10	5	2	1	0
$\frac{d-a}{a-c}$						
0.25	$1.55 \cdot 10^{-1}$	$4.62 \cdot 10^{-2}$	$3.25 \cdot 10^{-3}$	$1.95 \cdot 10^{-6}$	$2.49 \cdot 10^{-10}$	$6.91 \cdot 10^{-20}$
0.5	$4.81 \cdot 10^{-1}$	$7.94 \cdot 10^{-2}$	$5.43 \cdot 10^{-3}$	$3.25 \cdot 10^{-6}$	$4.08 \cdot 10^{-10}$	$1.15 \cdot 10^{-19}$
1	$9.62 \cdot 10^{-1}$	$1.24 \cdot 10^{-1}$	$8.17 \cdot 10^{-3}$	$4.88 \cdot 10^{-6}$	$6.12 \cdot 10^{-10}$	$1.73 \cdot 10^{-19}$
2	$1.89 \cdot 10^{-1}$	$1.73 \cdot 10^{-1}$	$1.09 \cdot 10^{-2}$	$6.51 \cdot 10^{-6}$	$8.16 \cdot 10^{-10}$	$2.31 \cdot 10^{-19}$

Таблиця 5

$\lambda_0$ (для біматеріалу PZT-4/ортотропний матеріал)					
$\frac{P_1}{P_2}$	-1	-2	-5	-10	-100
$\frac{d-a}{a-c}$					
0.25	$1.94 \cdot 10^{-29}$	$2.44 \cdot 10^{-33}$	$1.46 \cdot 10^{-36}$	$9.59 \cdot 10^{-38}$	$7.88 \cdot 10^{-39}$
0.5	$3.23 \cdot 10^{-29}$	$4.06 \cdot 10^{-33}$	$2.43 \cdot 10^{-36}$	$1.6 \cdot 10^{-37}$	$1.31 \cdot 10^{-38}$
1	$4.85 \cdot 10^{-29}$	$6.09 \cdot 10^{-33}$	$3.65 \cdot 10^{-36}$	$2.4 \cdot 10^{-37}$	$1.97 \cdot 10^{-38}$
2	$6.46 \cdot 10^{-29}$	$8.12 \cdot 10^{-33}$	$4.86 \cdot 10^{-36}$	$3.2 \cdot 10^{-37}$	$2.63 \cdot 10^{-38}$

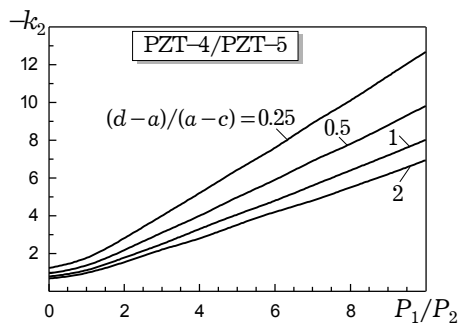


Рис. 4

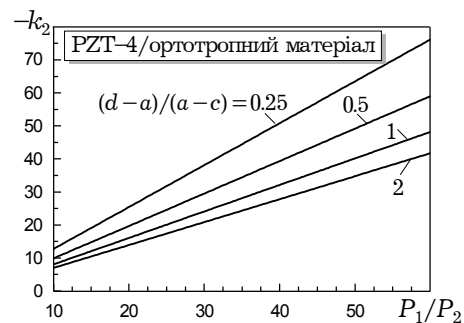


Рис. 5

На рис. 4, 5 зображено значення КІН  $k_2$  для біматеріалів PZT-4/PZT-5 і PZT-4/ортотропний матеріал відповідно.

З отриманих результатів випливає, що зсувне навантаження  $P_1$  істотно впливає як на довжину зони контакту, так і на КІН  $k_2$ . При цьому видно, що для деяких значень  $P_1/P_2$  довжини зон контакту стають порівнянними з довжиною ділянки зчеплення  $[c, a]$ . Цікаво, що виникнення такої ситуації визначається знаком біматеріальної константи  $\epsilon$  і, якщо для  $\epsilon > 0$  (табл. 2, 3) велика зона контакту виникає при  $P_1/P_2 < 0$ , то для  $\epsilon < 0$ , навпаки, при  $P_1/P_2 > 0$ . Слід також відмітити, що довжина зони контакту та величина  $k_2$  залежать також від точки прикладання зосереджених сил, але ця залежність не є суттєвою.



1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1963. – 639 с.
2. Kim G. S., Martinyak P. M. Термопружність кусково-однорідного тіла із закритою міжфазною тріщиною при наявності контактної термоопору між її берегами // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 84–88.
3. Лобода В. В., Чернецкая О. С. О контактной модели краевой межфазной трещины в анизотропном биматериале под действием сосредоточенных сил // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2002. – 2, вип. 6. – С. 75–84.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
5. Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М. Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом // Прикл. математика и механика. – 1986. – 50, № 4. – С. 663–673.
6. Симонов И. В. Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Механика композитных материалов. – 1985. – 21, № 6. – С. 969–976.
7. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – 131 с.
8. Cottingou M. The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – 44. – P. 631–636.
9. Herrmann K. P., Loboda V. V. Contact zone models for an interface crack in a thermomechanically loaded anisotropic bimaterial // J. Therm. Stresses. – 2001. – 24. – P. 479–506.
10. Herrmann K. P., Loboda V. V. Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models // Arch. Appl. Mech. – 2000. – 70. – P. 127–143.
11. Herrmann K. P., Loboda V. V. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – 69. – P. 311–335.
12. Loboda V. V. The quasi-invariant in the theory of interface crack // Eng. Fract. Mech. – 1993. – 44. – P. 573–580.
13. Williams M. L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media // Bull. Seismol. Soc. Amer. – 1959. – 49. – P. 199–204.

#### КОНТАКТНАЯ МОДЕЛЬ ВНЕШНЕЙ ЭЛЕКТРОПРОНИКАЮЩЕЙ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ БИМАТЕРИАЛЕ

*Рассмотрена биматериальная пьезоэлектрическая плоскость с двумя краевыми межфазными трещинами, нагруженными системой сосредоточенных сил. Рассмотрена классическая модель для обеих трещин, а для краевой – еще и контактная модель. В последнем случае проблема сведена к комбинированной задаче линейного сопряжения Дирихле – Римана и решена точно. Длина зоны контакта определяется из трансцендентного уравнения, а для соответствующего коэффициента интенсивности напряжений получена простая аналитическая формула. Проведены исследования зависимости длины зоны контакта и коэффициента интенсивности напряжений от отношения сосредоточенных сил и от расположения точки их приложения.*

#### CONTACT MODEL FOR EXTERNAL ELECTRO-PERMEABLE INTERFACE CRACK IN PIEZOELECTRIC BIMATERIAL

*The piezoelectric bimaterial plane with two external interface cracks loaded by a system of concentrated forces is considered. The classical model is considered for both cracks, and for the right one – also a contact model. In the last case the problem was reduced to the combined problem of the linear relationship of Dirichlet – Riemann, which was solved exactly. The length of contact zone can be determined from the transcendental equation, and the simple formula for the corresponding stress intensity factor was obtained. Analysis of the dependence of the length of a contact zone and stress intensity factor upon a ratio of the concentrated forces and a point of their application was carried out.*

Дніпропетр. нац. ун-т, Дніпропетровськ

Одержано  
29.09.05