УДК 539.3

В. В. Пабирівський

ПРО ПОСТАНОВКУ ТА ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПРОСТОРОВОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ВІД ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

Запропоновано математичну постановку та формулювання крайових задач просторової теорії пружності з використанням голоморфних функцій від двох комплексних змінних. У викладеній методиці вихідним є подання вектора переміщень у формі Папковича – Нейбера через скалярну та векторну гармонічні функції, а також відповідне узагальнення умов Коші – Рімана для базової і спряженої крайових задач.

Методи теорії функцій комплексної змінної широко використовують, зокрема, для розв'язування крайових задач механіки деформівного твердого тіла. Наукові основи цього напрямку закладені у класичних працях Колосова – Мусхелішвілі [16] і знайшли широке застосування при розв'язуванні крайових задач плоскої теорії пружності [6, 10, 13, 21, 22].

Результати досліджень просторових осесиметричних задач теорії пружності наведено в роботах А. Я. Александрова, Ю. І. Соловйова [1–4, 19, 20]. Використання апарату p-аналітичних функцій комплексної змінної для побудови розв'язків осесиметричних крайових задач теорії пружності запропоновано Г. М. Положієм та О. О. Капшивим [12, 18]. У роботі [8] розглядається один із варіантів математичного підходу до розв'язування таких задач для циліндричних тіл, вихідним для якого є подання ключових функцій через відповідні аналітичні функції комплексної змінної.

Теорія і методи розв'язування крайових задач осесиметричної теорії пружності з використанням апарату узагальнених функцій подані в праці І. М. Векуа [11].

У роботі В. І. Моссаковського [15] при розв'язуванні задач теорії пружності для півпростору вводяться плоскі гармонічні функції, які виражаються через аналітичні функції комплексної змінної. Сформульовані задачі зводяться до відповідних задач спряження на аналітичні функції.

С. М. Бєлоносовим [7] для розв'язання задачі про кручення валів змінного перетину використовувались інтегральні подання функції напружень через голоморфну функцію.

Варіант введення комплексних змінних при формулюванні просторових крайових задач теорії пружності розглянуто в роботі [23]. При цьому вектор переміщення і тензор напруження виражаються як через функції комплексних змінних $\xi = x + iy$, $\overline{\xi} = x - iy$, так і дійсної змінної z, які задовольняють відповідні диференціальні рівняння другого, четвертого та шостого порядків. Отриманий розв'язок у частковому випадку задачі плоскої теорії пружності співпадає з поданням Колосова – Мусхелішвілі.

У праці [24] запропоновано підхід до побудови розв'язку задач просторової теорії пружності з використанням подання Папковича – Нейбера для вектора переміщення через просторові гармонічні функції $B_j(\xi, \overline{\xi}, z)$ комплексних аргументів $\xi = x + iy$, $\overline{\xi} = x - iy$ та дійсної змінної z і знаходження цих функцій за допомогою сформульованих відповідних інтегральних рівнянь.

Застосування теорії функцій двох комплексних змінних $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$ до розв'язання просторових задач теорії пружності викладено у праці [5]. У цьому випадку плоскі задачі теорії пружності розглядались як спеціальний клас тривимірних задач, що дало можливість трактувати тривимірні задачі як частковий клас чотиривимірних задач теорії пружності.

Методику побудови розв'язку для тривимірних крайових задач теорії пружності через голоморфні функції двох комплексних змінних запропоновано автором у роботі [9]. У цьому випадку за допомогою розвинення голоморфних функцій у ряд Тейлора комплексний тензор напружень подано у вигляді послідовності базових станів, кожен з яких є точним розв'язком відповідної крайової задачі.

Ця робота присвячена постановці та методиці розв'язування крайових задач просторової теорії пружності з використанням голоморфних функцій від двох комплексних змінних .

1. Формулювання крайових задач в гармонічних функціях. Розглядається однорідне пружне тверде тіло $K \cup \partial K$, яке в початковому ненавантаженому стані бієктивно відображається на область $X \cup \partial X$ евклідового простору. Тіло знаходиться під дією стаціонарного силового навантаження, яке прикладене до його поверхні ∂X.

Лінійна задача теорії пружності в стаціонарній ізотермічній ($T = T_0 = \mathrm{const}$, T – абсолютна температура) постановці зводиться до побудови розв'язку рівнянь рівноваги (рівнянь Ляме) [14]

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla} \otimes (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) = 0\,, \tag{1}$$

де $\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}_i$ – вектор переміщення, $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1,2,3$; x_i – декартові координати, $i = 1,2,3$, довільно вибраної матеріальної точки $k \in K$ в природному однорідному стані; $\mathbf{e}_i$ – базисні орти вибраної декартової системи координат (x_1, x_2, x_3); $\boldsymbol{\nabla} \equiv \dfrac{\partial}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{e}_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ – диференціальний оператор Гамільтона, $i = 1,2,3$; «$\otimes$» – діадний добуток; $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = x_i\mathbf{e}_i$ – радіус-вектор у початковій конфігурації, $\Delta \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$ – диференціальний оператор Лапласа; λ, μ – пружні сталі Ляме. Тут і надалі індекси, які повторюються, є індексами підсумовування.

Тензор напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ у межах лінійної симетричної теорії пружності подається через вектор переміщень $\mathbf{u}$ співвідношенням

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mu(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\nabla}) + \lambda(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})\hat{\boldsymbol{I}}\,, \tag{2}$$

і задовольняє на боковій поверхні ∂X граничну умову

$$(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\Big|_{\partial X} \equiv \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n} \cdot \left[\lambda(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u})\hat{\boldsymbol{I}} + \mu(\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \boldsymbol{\nabla})\right]\Big|_{\partial X} = \boldsymbol{\sigma}_n^+\,, \tag{3}$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль; $\boldsymbol{\sigma}_n$ – вектор напружень; $\boldsymbol{\sigma}_n^+$ – заданий вектор поверхневих зусиль, який задовольняє інтегральні умови самоврівноваженості зовнішнього навантаження на боковій поверхні ∂X:

$$\int\limits_{\partial X} \boldsymbol{\sigma}_n^+\, d\Sigma = 0, \qquad \int\limits_{\partial X} \left(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n^+\right) d\Sigma = 0\,. \tag{4}$$

Надалі використовується подання вектора переміщень $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_i(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_i$ у формі Папковича – Нейбера [17]

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}(\varphi_0 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varphi}) - 4(1 - \nu)\boldsymbol{\varphi}\,. \tag{5}$$

Тут $\varphi_0 = \varphi_0(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3)$ – скалярна та векторна гармонічні функції; ν – коефіцієнт Пуассона.

Тоді тензор напружень з урахуванням співвідношення (5) набуває вигляду

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu\left[\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\nabla}\varphi_0 + (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{r} - (1 - 2\nu)(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi} \otimes \boldsymbol{\nabla}) - 2\nu(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\varphi})\hat{\boldsymbol{I}}\right]. \tag{6}$$

Побудова розв'язків крайової задачі (1)–(3) зводиться до знаходження гармонічних функцій $\varphi_0 = \varphi_0(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3)$:

$$\Delta\varphi_0 = 0, \qquad \Delta\boldsymbol{\varphi} = 0\,, \tag{7}$$

які задовольняють відповідні до (3) граничні умови

$$(\mathbf{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})\big|_{\partial X} \equiv \mathbf{n}\cdot\big[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\varphi_0 + (\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{r} - (1-2\nu)(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}\otimes\boldsymbol{\nabla}) -$$

$$- 2\nu(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi})\hat{I}\big]\,\big|_{\partial X} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_n^+}{2\mu}\,. \tag{8}$$

2. Формулювання крайових задач в комплексних змінних. Поставимо у відповідність декартовим координатам x_i, $i = 1,2,3$, три комплексні змінні:

$$z_1 = x^1 + ix^2, \qquad z_2 = x^2 + ix^3, \qquad z_3 = x^3 + ix^1.$$

Комплексним змінним z_1, z_2, z_3 поставимо у взаємно однозначну відповідність декартові координати x_i, $i = 1,2,3$:

$$x^1 = \frac{1+i}{2}(z_1 - iz_2 - z_3), \qquad x^2 = \frac{1+i}{2}(z_2 - iz_3 - z_1)\,,$$

$$x^3 = \frac{1+i}{2}(z_3 - iz_1 - z_2). \tag{9}$$

Введемо відповідні оператори похідних у просторі комплексних змінних z_1, z_2, z_3:

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1+i}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^2} - i\frac{\partial}{\partial x^3}\right], \qquad \frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{1+i}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^3} - i\frac{\partial}{\partial x^1}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial z_3} = \frac{1+i}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right],$$

$\boldsymbol{\nabla} \equiv \mathbf{e}_i\,\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{e}_1\left(\dfrac{\partial}{\partial z_1} + i\dfrac{\partial}{\partial z_3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\dfrac{\partial}{\partial z_2} + i\dfrac{\partial}{\partial z_1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\dfrac{\partial}{\partial z_3} + i\dfrac{\partial}{\partial z_2}\right)$ – диференціальний оператор Гамільтона; $\Delta \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = 2i\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z_2\partial z_3} + \dfrac{\partial^2}{\partial z_3\partial z_1}\right)$ – диференціальний оператор Лапласа.

У комплексних змінних z_1, z_2, z_3 сформульована задача (7), (8) виглядатиме так:

$$\Delta\varphi_0(z_1,z_2,z_3) = 0, \qquad \Delta\boldsymbol{\varphi}(z_1,z_2,z_3) = 0\,, \tag{10}$$

$$\mathbf{n}\cdot\big[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\varphi_0(z_1,z_2,z_3) + (\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\varphi}(z_1,z_2,z_3))\cdot\mathbf{r}(z_1,z_2,z_3) -$$

$$-(1-2\nu)\big(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\varphi}(z_1,z_2,z_3) + \boldsymbol{\varphi}\otimes\boldsymbol{\nabla}(z_1,z_2,z_3)\big) -$$

$$- 2\nu\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varphi}(z_1,z_2,z_3)\big)\hat{I}\big]\big|_{\partial X} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_n^+}{2\mu}\,, \tag{11}$$

де $\mathbf{r}(z_1,z_2,z_3) = \dfrac{1+i}{2}\big((z_1 - iz_2 - z_3)\,\mathbf{e}_1 + (z_2 - iz_3 - z_1)\,\mathbf{e}_2 + (z_3 - iz_1 - z_2)\,\mathbf{e}_3\big)$.

Для формулювання відповідної крайової задачі (10), (11) відносно голоморфних функцій розглянемо додатково іншу крайову задачу теорії пружності, сформульовану відносно вектора переміщень $\mathbf{u}^*$, який відповідно до (5) подамо через гармонічні функції $\psi_0(x^1,x^2,x^3)$, $\boldsymbol{\psi}(x^1,x^2,x^3)$:

$$\mathbf{u}^* = \nabla(\psi_0 + \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\psi}) - 4(1-\nu)\boldsymbol{\psi}\,, \tag{12}$$

$$\Delta\psi_0 = 0, \qquad \Delta\boldsymbol{\psi} = 0\,, \tag{13}$$

які задовольняють відповідні крайові умови

$$\mathbf{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*\big|_{\partial X} = \boldsymbol{\sigma}_n^{+(*)}. \tag{14}$$

Тут

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* = 2\mu\big[\nabla\otimes\nabla\psi_0 + (\nabla\otimes\nabla\otimes\boldsymbol{\psi})\cdot\mathbf{r} - (1-2\nu)(\nabla\otimes\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\psi}\otimes\nabla) - 2\nu(\nabla\cdot\boldsymbol{\psi})\hat{\boldsymbol{I}}\big] \tag{15}$$

– тензор напружень. Вектор поверхневих зусиль $\boldsymbol{\sigma}_n^{+(*)}$ задовольняє умови самоврівноваженості зовнішнього навантаження на боковій поверхні ∂X:

$$\int_{\partial X} \boldsymbol{\sigma}_n^{+(*)}\, d\Sigma = 0, \qquad \int_{\partial X} \big(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma}_n^{+(*)}\big)\, d\Sigma = 0\,. \tag{16}$$

Введемо у відповідність вихідним гармонічним функціям $\varphi_0(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3)$ та $\psi_0(x^1, x^2, x^3)$, $\boldsymbol{\psi}(x^1, x^2, x^3)$ функції від комплексних змінних z_1, z_2, z_3:

$$F_0(z_1, z_2, z_3) = \varphi_0(x^1, x^2, x^3) + i\psi_0(x^1, x^2, x^3)\,, \tag{17}$$

$$\mathbf{F}(z_1, z_2, z_3) = \boldsymbol{\varphi}(x^1, x^2, x^3) + i\boldsymbol{\psi}(x^1, x^2, x^3)\,. \tag{18}$$

Розглянемо комплексний вектор переміщень

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{u}^* \tag{19}$$

та комплексний тензор напружень $\hat{\boldsymbol{P}}$:

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mu(\nabla\otimes\mathbf{w} + \mathbf{w}\otimes\nabla) + \lambda(\nabla\cdot\mathbf{w})\hat{\boldsymbol{I}}\,. \tag{20}$$

Відповідно до співвідношень (17), (18) сформулюємо граничну задачу на функції $F_0(z_1, z_2, z_3)$, $\mathbf{F}(z_1, z_2, z_3)$:

$$\Delta F_0(z_1, z_2, z_3) = 0, \qquad \Delta\mathbf{F}(z_1, z_2, z_3) = 0\,, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\cdot\big[\nabla\otimes\nabla F_0 + (\nabla\otimes\nabla\otimes\mathbf{F})\cdot\mathbf{r} - (1-2\nu)(\nabla\otimes\mathbf{F} + \mathbf{F}\otimes\nabla) -&\\ - 2\nu(\nabla\cdot\mathbf{F})\hat{\boldsymbol{I}}\big]\big|_{\partial X} = \frac{\mathbf{P}_n^+}{2\mu}\,,&\end{aligned} \tag{22}$$

де $\hat{\boldsymbol{P}} = 2\mu\big[\nabla\otimes\nabla F_0 + (\nabla\otimes\nabla\otimes\mathbf{F})\cdot\mathbf{r} - (1-2\nu)(\nabla\otimes\mathbf{F} + \mathbf{F}\otimes\nabla) - 2\nu(\nabla\cdot\mathbf{F})\hat{\boldsymbol{I}}\big]$ – комплексний тензор напружень; $\mathbf{P}_n^+ = \boldsymbol{\sigma}_n^+ + i\boldsymbol{\sigma}_n^{+(*)}$ – комплексний вектор поверхневих зусиль, який задовольняє умови самоврівноваженості зовнішнього навантаження на боковій поверхні ∂X:

$$\int_{\partial X} \mathbf{P}_n^+\, d\Sigma = 0, \qquad \int_{\partial X} \big(\mathbf{r}\times\mathbf{P}_n^+\big)\, d\Sigma = 0\,. \tag{23}$$

3. Формулювання крайових задач в голоморфних функціях. Постановка основної крайової задачі. Розглянемо клас функцій $F_0(z_1, z_2, z_3)$, $\mathbf{F}(z_1, z_2, z_3)$, які не залежать від комплексної змінної z_3, тобто для яких виконуються умови

$$\frac{\partial F_0(z_1, z_2, z_3)}{\partial z_3} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{F}(z_1, z_2, z_3)}{\partial z_3} = 0\,. \tag{24}$$

Ці умови накладають в'язі між гармонічними функціями $\varphi_0(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3)$ та $\psi_0(x^1, x^2, x^3)$, $\boldsymbol{\psi}(x^1, x^2, x^3)$:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x^1} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x^3} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x^3} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x^1},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x^1} - \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x^3} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x^2} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x^3} - \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial x^1}. \tag{25}$$

Співвідношення (25) є узагальненням відомих в літературі умов Коші – Рімана для двовимірних задач теорії пружності.

Означення. Задачу (13)–(15) на гармонічні функції $\psi_0(x^1, x^2, x^3)$, $\boldsymbol{\psi}(x^1, x^2, x^3)$, будемо називати *спряженою* до задачі (7), (8), якщо функції $\psi_0(x^1, x^2, x^3)$, $\boldsymbol{\psi}(x^1, x^2, x^3)$ і $\varphi_0(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3)$ задовольняють умови (25).

Відповідно до співвідношень (17), (18) і за виконання умов (24) для функцій $F_0(z_1, z_2, z_3) \equiv \Phi_0(z_1, z_2)$, $\mathbf{F}(z_1, z_2, z_3) \equiv \boldsymbol{\Phi}(z_1, z_2)$ комплексний вектор переміщень $\mathbf{w}$ і тензор напружень $\hat{\boldsymbol{P}}$ подамо таким чином:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\nabla}^* \Phi_0 + (\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{r} + (4\nu - 3)\boldsymbol{\Phi}, \tag{26}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}} = 2\mu\big[\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{\nabla}^* \Phi_0 + (\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{r} - (1 - 2\nu)(\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}^*) - 2\nu(\boldsymbol{\nabla}^* \cdot \boldsymbol{\Phi})\hat{\boldsymbol{I}}\big], \tag{27}$$

де $\Phi_0(z_1, z_2)$, $\boldsymbol{\Phi}(z_1, z_2)$ – голоморфні функції від комплексних змінних z_1, z_2,

$$\nabla_1^* \nabla_1^* \equiv \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \qquad \nabla_2^* \nabla_2^* \equiv -\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + 2i \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}, \qquad \nabla_3^* \nabla_3^* \equiv -\frac{\partial^2}{\partial z_2^2},$$

$$\nabla_1^* \nabla_2^* = \nabla_2^* \nabla_1^* \equiv i \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}, \qquad \nabla_1^* \nabla_3^* = \nabla_3^* \nabla_1^* \equiv i \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2},$$

$$\nabla_2^* \nabla_3^* = \nabla_3^* \nabla_2^* \equiv -\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + i \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}, \qquad \Delta \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = 2i \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2},$$

$$\boldsymbol{\nabla}^* \equiv \mathbf{e}_i \nabla_i^* = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \mathbf{e}_2 \left(i \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + \mathbf{e}_3 \left(i \frac{\partial}{\partial z_2} \right),$$

$$\mathbf{r}(z_1, z_2, z_3) = r_k \mathbf{e}_k \equiv \frac{1+i}{2}\big((z_1 - iz_2 - z_3)\mathbf{e}_1 + (z_2 - iz_3 - z_1)\mathbf{e}_2 + (z_3 - iz_1 - z_2)\mathbf{e}_3\big).$$

Задачу про знаходження комплексного вектора переміщень $\mathbf{w}$ і тензора напружень $\hat{\boldsymbol{P}}$, який задовольняє граничні умови

$$(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{P}})\big|_{\partial X} \equiv \mathbf{n} \cdot \big[\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{\nabla}^* \Phi_0 + (\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{r} - (1 - 2\nu)(\boldsymbol{\nabla}^* \otimes \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\nabla}^*) - 2\nu(\boldsymbol{\nabla}^* \cdot \boldsymbol{\Phi})\hat{\boldsymbol{I}}\big]\big|_{\partial X} = \frac{\mathbf{P}_n^+}{2\mu}, \tag{28}$$

будемо трактувати надалі як *основну крайову задачу просторової теорії пружності.*

Розглянемо випадок, коли голоморфні функції $\Phi_0(z_1, z_2)$, $\boldsymbol{\Phi}(z_1, z_2)$ залежать лише від однієї комплексної змінної z_1:

$$\Phi_0(z_1, z_2) \equiv \Phi_0(z_1), \qquad \boldsymbol{\Phi}(z_1, z_2) \equiv \boldsymbol{\Phi}(z_1).$$

Тоді компоненти тензора напружень $\hat{\boldsymbol{P}} = P_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ у декартовій системі координат набувають вигляду

$$P_{11} = 2\mu\left(\frac{d^2\Phi_0(z_1)}{dz_1^2} + \frac{d^2\Phi_k(z_1)}{dz_1^2} r_k(z_1, z_2, z_3) - \right.$$

$$\left. - 2\frac{d}{dz_1}\left[(1-\nu)\Phi_1(z_1) + i\nu\Phi_2(z_1)\right]\right),$$

$$P_{22} = 2\mu\left(- \frac{d^2\Phi_0(z_1)}{dz_1^2} - \frac{d^2\Phi_k(z_1)}{dz_1^2} r_k(z_1, z_2, z_3) - \right.$$

$$\left. - 2\frac{d}{dz_1}\left[\nu\Phi_1(z_1) + i(1-\nu)\Phi_2(z_1)\right]\right),$$

$$P_{33} = -4\mu\nu\frac{d}{dz_1}\left[\Phi_1(z_1) + i\Phi_2(z_1)\right],$$

$$P_{12} = P_{21} = 2\mu\left(i\frac{d^2\Phi_0(z_1)}{dz_1^2} + i\frac{d^2\Phi_k(z_1)}{dz_1^2} r_k(z_1, z_2, z_3) - \right.$$

$$\left. - (1-2\nu)\frac{d}{dz_1}\left[\Phi_1(z_1) + i\Phi_2(z_1)\right]\right),$$

$$P_{23} = P_{32} = -2i\mu(1-2\nu)\frac{d\Phi_3(z_1)}{dz_1},$$

$$P_{31} = P_{13} = 2\mu(1-2\nu)\frac{d\Phi_3(z_1)}{dz_1}, \qquad (29)$$

де $\Phi_0(z_1)$, $\mathbf{\Phi}(z_1)$ – аналітичні функції від комплексної змінної z_1.

Співвідношення (29) подамо таким чином:

$$P_{11} = 2\mu\left[G_0(z_1) + \frac{dG_k(z_1)}{dz_1} r_k(z_1, z_2, z_3) - 2\left[(1-\nu)G_1(z_1) + i\nu G_2(z_1)\right]\right],$$

$$P_{22} = 2\mu\left[-G_0(z_1) - \frac{dG_k(z_1)}{dz_1} r_k(z_1, z_2, z_3) - 2\left[\nu G_1(z_1) + i(1-\nu)G_2(z_1)\right]\right],$$

$$P_{33} = -4\mu\nu\left[G_1(z_1) + iG_2(z_1)\right],$$

$$P_{12} = 2\mu\left[iG_0(z_1) + i\frac{dG_k(z_1)}{dz_1} r_k(z_1, z_2, z_3) - (1-2\nu)\left[G_1(z_1) + iG_2(z_1)\right]\right],$$

$$P_{23} = -2i\mu(1-2\nu)G_3(z_1),$$

$$P_{31} = 2\mu(1-2\nu)G_3(z_1). \qquad (30)$$

Тут $G_0(z) \equiv \dfrac{d^2\Phi_0(z_1)}{dz_1^2}$, $\mathbf{G}(z) \equiv \dfrac{d\mathbf{\Phi}(z_1)}{dz_1}$ – аналітичні функції від комплексної змінної z_1.

Зауважимо, що

$$P_{33} = \nu(P_{11} + P_{22}) = -4\mu\nu\left[G_1(z_1) + iG_2(z_1)\right].$$

Тому одержаний розв'язок (30) відповідає умовам теорії плоскої деформації.

Зі співвідношень (30) отримаємо такі результати:

$$P_{11} + P_{22} = -4\mu\left[G_1(z_1) + iG_2(z_1)\right],$$

$$P_{22} - P_{11} - 2iP_{12} = 4\mu(1-2\nu)(1+i)\left[G_1(z_1) - G_2(z_1)\right],$$

$$P_{23} = -iP_{31}. \qquad (31)$$

Зокрема, розв'язки для базової і комплексно-спряженої задач набувають вигляду

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = -\,4\mu\left[\operatorname{Re} G_1(z_1) - \operatorname{Im} G_2(z_1)\right],$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2\sigma_{12}^{*} = 4\mu(1-2\nu)\left[\operatorname{Re} G_1(z_1) - \operatorname{Re} G_2(z_1) - \operatorname{Im} G_1(z_1) + \operatorname{Im} G_2(z_1)\right],$$

$$\sigma_{33} = -\,4\mu\nu\left[\operatorname{Re} G_1(z_1) - \operatorname{Im} G_2(z_1)\right],$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\left[-\operatorname{Im} G_0(z_1) - \operatorname{Im}\left(\frac{dG_k(z_1)}{dz_1}\right)\operatorname{Re} r_k(z_1, z_2, z_3) - \right.$$

$$\left. -\,(1-2\nu)\left[\operatorname{Re} G_1(z_1) - \operatorname{Im} G_2(z_1)\right]\right],$$

$$\sigma_{23} = 2\mu(1-2\nu)\operatorname{Im} G_3(z_1),$$

$$\sigma_{31} = 2\mu(1-2\nu)\operatorname{Re} G_3(z_1); \qquad (32)$$

$$\sigma_{11}^{*} + \sigma_{22}^{*} = -\,4\mu\left[\operatorname{Im} G_1(z_1) + \operatorname{Re} G_2(z_1)\right],$$

$$\sigma_{22}^{*} - \sigma_{11}^{*} - 2\sigma_{12} = 4\mu(1-2\nu)\left[\operatorname{Re} G_1(z_1) - \operatorname{Re} G_2(z_1) + \operatorname{Im} G_1(z_1) - \operatorname{Im} G_2(z_1)\right],$$

$$\sigma_{33}^{*} = -\,4\mu\nu\left[\operatorname{Im} G_1(z_1) + \operatorname{Re} G_2(z_1)\right],$$

$$\sigma_{12}^{*} = 2\mu\left[\operatorname{Re} G_0(z_1) + \operatorname{Re}\left(\frac{dG_k(z_1)}{dz_1}\right)\operatorname{Re} r_k(z_1, z_2, z_3) - \right.$$

$$\left. -\,(1-2\nu)\left[\operatorname{Im} G_1(z_1) + \operatorname{Re} G_2(z_1)\right]\right],$$

$$\sigma_{31}^{*} = \sigma_{23}, \qquad \sigma_{23}^{*} = -\,\sigma_{31}. \qquad (33)$$

Висновки. У рамках лінійної просторової теорії пружності запропоновано розрахункову схему та методику розв’язування крайових задач тривимірної теорії пружності з використанням голоморфних функцій від двох комплексних змінних. Одержані результати дозволяють розробити методику побудови розв’язків як для базових, так і для відповідних комплексно-спряжених крайових задач теорії пружності в тривимірній і двовимірній постановках.

1. *Александров А. Я.* Решение некоторых классов трехмерных задач теории упругости при помощи аналитических функций // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (К 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили). – Москва: Наука, 1972. – С. 13–29.
2. *Александров А. Я.* Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций // Докл. АН СССР. – 1961. – **139**, № 2. – С. 337–340.
3. *Александров А. Я.* Решение пространственных задач теории упругости для тел вращения при помощи аналитических и обобщенных аналитических функций // Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. тр-та: Механика деформируемого тела и расчет сооружений. – 1970. – Вып. 96. – С. 5–35.
4. *Александров А. Я., Соловьев Ю. И.* Пространственные задачи теории упругости. – Москва: Наука, 1978. – 462 с.
5. *Александрович А. И.* Применение теории функций двух комплексных переменных к теории упругости //Докл. АН СССР. – 1977. – **232**, № 3. – С. 542–545.
6. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. – Москва: Высш. шк., 1976. – 272 с.
7. *Белоносов С. М.* Применение интегральных уравнений к задаче о кручении валов переменного сечения // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**, № 6. – С. 1042–1046.
8. *Бурак Я. Й., Пабирівський В. В.* Про використання методу аналітичних функцій в задачах осесиметричної теорії пружності // Доп. АН України. – 1993. – № 3. – С. 55–59.
9. *Бурак Я. Й., Пабирівський В. В.* Метод аналітичних функцій в розв’язуванні тривимірних крайових задач теорії пружності // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. – 2001. – № 4. – С. 9–16.
10. *Бурак Я. Й., Пабирівський В. В.* Формулювання плоскої задачі теорії пружності в переміщеннях через аналітичні функції комплексної змінної // Машинознавство – 2004. – № 6. – С. 115–123.

11. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959. – 628 с.
12. *Капшивый А. А.* Применение p-аналитических функций к решению одной задачи осесимметричной теории упругости для слоистого конечного цилиндра // Вычисл. математика. – 1966. – **2.** – С. 115–123.
13. *Космодамианский А. С.* Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Выща шк., 1975. – 228 с.
14. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
15. *Моссаковский В. И.* Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий // Прикл. математика и механика – 1954. – **18**, № 2. – С. 187–196.
16. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
17. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. – Ленинград – Москва: Оборонгиз, 1939. – 639 с.
18. *Положий Г. Н.* О краевых задачах осесимметричной теории упругости. Метод p-аналитических функций комплексного переменного // Укр. мат. журн. – 1963. – **15**, № 1. – С. 25–45.
19. *Соловьев Ю. И.* Представление общего решения осесимметричной задачи теории упругости для многосвязных тел вращения при помощи аналитических функций комплексного переменного // Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. тр-та: Механика деформируемого тела и расчет сооружений. – 1970. – Вып. 96. – С. 42–41.
20. *Соловьев Ю. И.* О приведении пространственных осесимметричных задач теории упругости к граничным задачам для аналитических функций комплексного переменного // Прикл. математика и механика. – 1971. – **35**, № 5. – С. 918–925.
21. *Шерман Д. И.* К решению плоской статистической задачи теории упругости при заданых внешних силах // Докл. АН СССР. – 1940. – **27**, №1. – С. 25–28.
22. *Шерман Д. И.* Смешанная задача статической теории упругости для плоских многосвязных областей // Докл. АН СССР. – 1940. – **28**, №1. – С. 29–32.
23. *Szelagowski F.* Solution of three-dimensional problem of the theory of elasticity in functions of complex variables // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. – 1962. – **10**, No. 7. – P. 253–260.
24. *Tang Lin-min, Sun Hwan-chun* Three-dimensional elasticity problems solved by variable method // Sci. Sinica. – 1963. – **12**, No. 11. – P. 1627–1649.

О ПОСТАНОВКЕ И ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Предложена математическая постановка и формулирование краевых задач пространственной теории упругости с использованием голоморфных функций двух комплексных переменных. В изложенной методике исходным является представление вектора перемещений в форме Папковича – Нейбера через скалярную и векторную гармонические функции и соответствующее обобщение условий Коши – Римана для базовой и сопряженной краевых задач .

ON STATEMENT AND APPROACH TO SOLUTION OF SPACE ELASTICITY THEORY BOUNDARY-VALUE PROBLEMS USING HOLOMORPHIC TWO COMPLEX VARIABLES FUNCTIONS

A mathematical statement and formulation of space elasticity theory boundary-value problems using holomorphic functions of two complex variables is proposed. In the present technique the representation of displacements vector in the Papkovich – Neuber form in terms of scalar and vectorial potential functions and corresponding generalization of Cauchy – Riman conditions for the base and conjugate boundary value problems are initial.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
22.05.06