

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ІНВАРІАНТНОГО ЗАНУРЕННЯ
ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ**

У рамках узагальненої теорії анізотропних пластин ($\{1,1\}$ -апроксимація), що враховує деформації зсуву та поперечне стиснення, розглянуто контактну взаємодію жорстких штампів з пластинками в умовах геометрично нелінійного деформування. Розроблено методіку розв'язування контактних крайових задач шляхом зведення їх до початкових задач Коші методом інваріантного занурення. Отримана еквівалентна початкова задача розв'язується чисельно шляхом застосування відомих стійких методів чисельного інтегрування. На прикладі розв'язання граничної задачі про контактну взаємодію параболічного штампу з трансверсально ізотропною пластиною показано перевагу нелінійної постановки задачі порівняно з лінійною при врахуванні піддатливості матеріалу пластини зсувним деформаціям і стисненню, досліджено вплив параметрів ортотропії та параметра зсуву на зміну контактного тиску в зоні контакту.

Широке використання тонкостінних елементів конструкцій з нових композиційних матеріалів в сучасній техніці викликає необхідність застосування таких моделей розрахунку їх поведінки, які б враховували широкий спектр характерних особливостей їх деформування. Ці особливості суттєво проявляються, зокрема, в контактних задачах для анізотропних елементів конструкцій [1, 3] і вимагають застосування просторової теорії пружності для ортотропного тіла, що враховує деформації зсуву та стиснення, а також геометричну нелінійність. Отримати аналітичний розв'язок таких задач можна лише в окремих випадках, а тому питання, пов'язані з розробкою і використанням ефективних числових методів їх розв'язування, є актуальними.

Традиційний спосіб знаходження розв'язку контактних задач приводить до розв'язання системи інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь відносно невідомих контактних напружень і переміщень конструкцій ітераційними методами [5]. Для нелінійних задач використання цих методів не завжди є ефективним, оскільки залежить від вибору початкового наближення. Основні труднощі полягають у можливій нестійкості знаходження розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу і в проблемі підбору початкових значень шуканих параметрів для забезпечення його збіжності. Цього можна уникнути, якщо граничну задачу звести до еквівалентної початкової задачі Коші, для розв'язання якої вже можна безпосередньо застосувати відомі стійкі класичні методи чисельного інтегрування.

У роботі на прикладі розв'язання нелінійної граничної задачі про контактну взаємодію жорсткого штампу з ортотропною пластиною продемонстровано можливість та ефективність застосування методу інваріантного занурення [2, 4] до розв'язування нелінійних контактних задач шляхом зведення їх до еквівалентних задач Коші.

Для розв'язування контактної задачі використано систему рівнянь, отриману шляхом зведення тривимірних рівнянь геометрично нелінійної теорії пружності до двовимірних рівнянь теорії пластин з використанням апроксимацій переміщень і напружень поліномами Лежандра за умови виконання граничних умов на лицьових поверхнях [6].

1. Постановка задачі. Розглядається нескінченна ортотропна пластина ширини 2ℓ , товщини $2h$, певним чином закріплена по краях $x = \pm \ell$, під дією жорсткого штампу (рис. 1). На штамп діє вертикальна сила P , яка зумовлює вертикальні переміщення в пластині, співвимірні з її товщиною.

Поведінку пластини та контактний тиск будемо визначати в рамках геометрично нелінійного деформування з урахуванням піддатливості матеріалу трансверсальним зсувним деформаціям і стисненню. Для опису напружено-деформованого стану пластини використаємо нелінійні деформаційні співвідношення, лінійні співвідношення пружності та рівняння рівноваги узагальненої теорії анізотропних пластин [6], отримані з рівнянь нелінійної теорії пружності за допомогою $\{1,1\}$ -апроксимації переміщень і напружень поліномами Лежандра $P_k(z)$ від нормальної координати до серединної поверхні пластини з одночасним задоволенням граничних умов у зусиллях на лицьових її поверхнях.

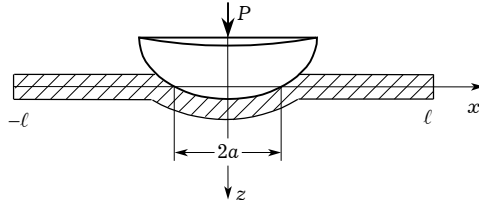


Рис. 1

Згідно з $\{1,1\}$ -апроксимацією компоненти вектора переміщень, несиметричного тензора напружень і деформацій будемо апроксимувати виразами

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u^{(0)}(x)P_0(z) + u^{(1)}(x)P_1(z), \\ w(x, z) &= w^{(0)}(x)P_0(z) + w^{(1)}(x)P_1(z); \\ S^{11}(x, z) &= S_0^{11}(x)P_0(z) + S_1^{11}(x)P_1(z), & S^{13}(x, z) &= \sum_{k=0}^4 S_k^{13}(x)P_k(z), \\ S^{31}(x, z) &= \sum_{k=0}^4 S_k^{31}(x)P_k(z), & S^{33}(x, z) &= \sum_{k=0}^2 S_k^{33}(x)P_k(z); \\ e_{11}(x, z) &= e_{11}^{(0)}(x)P_0(z) + e_{11}^{(1)}(x)P_1(z), \\ e_{13}(x, z) &= e_{13}^{(0)}(x)P_0(z) + e_{13}^{(1)}(x)P_1(z), & e_{33}(x, z) &= e_{33}^{(0)}(x)P_0(z), \end{aligned}$$

де $S^{ij} = \sigma^{ik} \left(\delta_k^j + \frac{\partial u^j}{\partial x_k} \right)$; $x_1 = x$, $x_3 = z$; σ^{ij} – симетричний тензор напружень, $|x| \leq 1$, $|z| \leq h$.

Відповідно рівняння рівноваги, деформаційні співвідношення та співвідношення пружності матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dS_0^{11}(x)}{dx} + \frac{1}{h} X_1^-(x) &= 0, & \frac{dS_1^{11}(x)}{dx} - \frac{3}{h} S_0^{31}(x) + \frac{3}{h} X_1^+(x) &= 0, \\ \frac{dS_0^{13}(x)}{dx} + \frac{1}{h} X_3^-(x) &= 0, & \frac{dS_1^{13}(x)}{dx} - \frac{3}{h} S_0^{33}(x) + \frac{3}{h} X_3^+(x) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} S_0^{11} &= \sigma_0^{11}(1 + \varepsilon_{11}^{(0)}) + \frac{1}{3} \sigma_1^{11} \varepsilon_{11}^{(1)} + \sigma_0^{13} \varepsilon_{13}^{(0)}, \\ S_1^{11} &= \sigma_1^{11}(1 + \varepsilon_{11}^{(0)}) + \sigma_0^{11} \varepsilon_{11}^{(1)} + \sigma_1^{13} \varepsilon_{13}^{(0)}, \\ S_0^{13} &= \sigma_0^{11} \varepsilon_{31}^{(0)} + \frac{1}{3} \sigma_1^{11} \varepsilon_{31}^{(1)} + \sigma_0^{13}(1 + \varepsilon_{33}^{(0)}), \\ S_1^{13} &= \sigma_1^{11} \varepsilon_{31}^{(0)} + \sigma_0^{11} \varepsilon_{31}^{(1)} + \sigma_1^{13}(1 + \varepsilon_{33}^{(0)}), \\ S_0^{31} &= \sigma_0^{31}(1 + \varepsilon_{11}^{(0)}) + \frac{1}{3} \sigma_1^{31} \varepsilon_{11}^{(1)} + \sigma_0^{33} \varepsilon_{13}^{(0)}, \\ S_0^{33} &= \sigma_0^{13} \varepsilon_{31}^{(0)} + \frac{1}{3} \sigma_1^{13} \varepsilon_{31}^{(1)} + \sigma_0^{33}(1 + \varepsilon_{33}^{(0)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{(k)} &= \frac{du^{(k)}(x)}{dx}, & \varepsilon_{31}^{(k)} &= \frac{dw^{(k)}(x)}{dx}, & k &= 0, 1, \\ \varepsilon_{13}^{(0)} &= \frac{1}{h} u^{(1)}(x), & \varepsilon_{33}^{(0)} &= w^{(1)}(x); \\ X_1^\pm(x) &= \frac{1}{2h} (S^{31}(x, +h) \pm S^{31}(x, -h)), \\ X_3^\pm(x) &= \frac{1}{2h} (S^{33}(x, +h) \pm S^{33}(x, -h));\end{aligned}$$

коефіцієнти розкладу компонент тензора деформацій :

$$\begin{aligned}e_{11}^{(0)} &= \varepsilon_{11}^{(0)} + \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{11}^{(0)})^2 + (\varepsilon_{31}^{(0)})^2 \right) + \frac{1}{6} \left((\varepsilon_{11}^{(1)})^2 + (\varepsilon_{31}^{(1)})^2 \right), \\ e_{11}^{(1)} &= \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(0)} \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{31}^{(0)} \varepsilon_{31}^{(1)}, \\ e_{13}^{(0)} &= \varepsilon_{13}^{(0)} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{13}^{(0)} + \varepsilon_{31}^{(0)}) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{13}^{(0)} \varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{31}^{(0)} \varepsilon_{33}^{(0)}), \\ e_{13}^{(1)} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{13}^{(1)} + (\varepsilon_{13}^{(0)} \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{33}^{(0)} \varepsilon_{31}^{(1)}), & e_{33}^{(0)} &= \varepsilon_{33}^{(0)} + \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{13}^{(0)})^2 + (\varepsilon_{33}^{(0)})^2 \right)\end{aligned}$$

(для спрощення запису опущено координату x).

Граничні умови на лицьових поверхнях пластини мають вигляд

$$\begin{aligned}\sum_{k=0,2}^2 \frac{2k+1}{2} S_k^{31} &= \tau^+, & \sum_{k=1,3}^3 \frac{2k+1}{2} S_k^{31} &= \tau^-, \\ \sum_{k=0,2}^2 \frac{2k+1}{2} S_k^{33} &= \sigma^+, & \sum_{k=1,3}^3 \frac{2k+1}{2} S_k^{33} &= \sigma^-, \end{aligned}$$

де τ , σ – відповідно тангенціальне та нормальне напруження на лицьових поверхнях пластинки.

Компоненти тензора напружень мають вигляд

$$\sigma_k^{ij} = C^{ij\ell m} \varepsilon_{\ell m}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \quad i, j = 1, 3,$$

де відмінними від нуля компонентами матриці тензора жорсткості (відповідно пружним властивостям трансверсально ізотропного матеріалу пластинки) є :

$$\begin{aligned}C^{1111} &= \bar{E} + \lambda^2 E'_0, & C^{1133} &= \lambda E'_0, & C^{3333} &= E'_0, & C^{1313} &= k' G', & k' &= 5/6, \\ \bar{E} &= \frac{E}{1 - \nu^2}, & \lambda &= \frac{\nu' E}{(1 - \nu) E_z}, & E'_0 &= \frac{(1 - \nu) E_z}{1 - \nu - (\nu')^2 \frac{E}{E_z}}.\end{aligned}$$

Тут E , E_z , G' , ν , ν' – модулі Юнга, зсуву та коефіцієнти Пуассона в площинах ортотропії.

Умову контакту штамп з пластиною вибрали у вигляді $\alpha - f(x) = w + \lambda^* p(x)$, де $|x| \leq a$ – зона контакту при $z = +h$; α – осадка штамп; $f(x)$ – функція, яка описує форму штамп; λ^* – відомий множник.

Прийнявши за невідомі функції узагальнені переміщення $u^{(0)}(x)$, $u^{(1)}(x)$, $w^{(0)}(x)$, $w^{(1)}(x)$ і контактний тиск в зоні контакту пластини зі штампом $p(x)$ (поза зоною контакту $p(x) = 0$) і ввівши позначення

$$\begin{aligned}Z_1(x) &= u^{(0)}(x), & Z_2(x) &= u^{(1)}(x), & Z_3(x) &= w^{(0)}(x), & Z_4(x) &= w^{(1)}(x), \\ Z_5(x) &= \frac{du^{(0)}(x)}{dx}, & Z_6(x) &= \frac{du^{(1)}(x)}{dx}, & Z_7(x) &= \frac{dw^{(0)}(x)}{dx},\end{aligned}$$

$$Z_8(x) = \frac{dw^{(1)}(x)}{dx}, \quad Z_9(x) = p(x), \quad Z_{10}(x) = \frac{dp(x)}{dx}, \quad (2)$$

із системи рівнянь (1) та умови контакту (шляхом її диференціювання) отримуємо розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь для знаходження невідомих функцій $Z_i(x)$, $i = 1, \dots, 10$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Z_1(x) &= Z_5(x), & \frac{d}{dx} Z_2(x) &= Z_6(x), \\ \frac{d}{dx} Z_3(x) &= Z_7(x), & \frac{d}{dx} Z_4(x) &= Z_8(x), \\ \{C^{1111}h^2[9(2 + Z_5(x))Z_5(x) + 3Z_7^2(x) + Z_8^2(x) + 3Z_6^2(x) + 6] + \\ &+ 3C^{1313}[(2h + Z_4(x))Z_4(x) + Z_2^2(x)] + 6C^{1313}Z_2^2(x)\} \left(\frac{d}{dx} Z_5(x)\right) + \\ &+ 2C^{1111}h^2[3(1 + Z_5(x))Z_6(x) + Z_8Z_7(x)] \left(\frac{d}{dx} Z_6(x)\right) + \\ &+ \{2C^{1111}h^2[Z_6(x)Z_8(x) + 3(1 + Z_5(x))Z_7(x)] + \\ &+ 6C^{1313}(h + Z_4(x))Z_2(x)\} \left(\frac{d}{dx} Z_7(x)\right) + \\ &+ 2C^{1111}h^2[(1 + Z_5(x))Z_8(x) + Z_7Z_6(x)] \left(\frac{d}{dx} Z_8(x)\right) + \\ &+ 2\lambda h^2 Z_{10}(x) + 6C^{1133}(1 + Z_5(x))[Z_2(x)Z_6(x) + \\ &+ (h + Z_4(x))Z_8(x)] + 6C^{1313}[2(1 + Z_5(x))Z_2(x)Z_6(x) + \\ &+ Z_7(x)((h + Z_4(x))Z_6(x) + Z_2(x)Z_8(x))] = 0, \\ 6C^{1111}h^4[3(1 + Z_5(x))Z_6(x) + Z_8(x)Z_7(x)] \left(\frac{d}{dx} Z_5(x)\right) + \\ &+ \{C^{1111}h^4[9(2 + Z_5(x))Z_5(x) + 3Z_6^2(x) + 3Z_7^2(x) + Z_8^2(x) + 6] + \\ &+ 6C^{1313}h^2Z_2^2(x)\} \left(\frac{d}{dx} Z_6(x)\right) + \\ &+ 6C^{1111}h^4[(1 + Z_5(x))Z_8(x) + Z_6(x)Z_7(x)] \left(\frac{d}{dx} Z_7(x)\right) + \\ &+ \{2C^{1111}h^4[Z_8(x)Z_6(x) + 3(1 + Z_5(x))Z_7(x)] + \\ &+ 6C^{1313}h^2(h + Z_4(x))Z_2(x)\} \left(\frac{d}{dx} Z_8(x)\right) + 4\lambda h^4 Z_{10}(x) - \\ &- 6C^{1313}h^2([3(2 + Z_5(x))Z_5(x) - Z_8^2(x) - Z_6^2(x) + 3]Z_2(x) + \\ &+ 3(1 + Z_5(x))(h + Z_4(x))Z_7(x)) + 6C^{1133}h^2[(h + Z_4(x))Z_8(x) + \\ &+ Z_6(x)Z_2(x)]Z_6(x) + 9C^{3333}[(2h + Z_4(x))Z_4(x) + Z_2^2(x)]Z_2(x) = 0, \\ \{2C^{1111}h^2[Z_6(x)Z_8(x) + 3(1 + Z_5(x))Z_7(x)] + \\ &+ 6C^{1313}(h + Z_4(x))Z_2(x)\} \left(\frac{d}{dx} Z_5(x)\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2C^{1111}h^2[(1 + Z_5(x))Z_8(x) + Z_6(x)Z_7(x)]\left(\frac{d}{dx}Z_6(x)\right) + \\
& + \{C^{1111}h^2[3(2 + Z_5(x))Z_5(x) + 9Z_7^2(x) + Z_6^2(x) + 3Z_8^2(x)] + \\
& + 3C^{1133}[(2h + Z_4(x))Z_4(x) + Z_2^2(x)] + \\
& + 6C^{1313}[(2h + Z_4(x))Z_4(x) + h^2]\}\left(\frac{d}{dx}Z_7(x)\right) + \\
& + \{2C^{1111}h^2[3Z_7(x)Z_8(x) + (1 + Z_5(x))Z_6(x)]\}\left(\frac{d}{dx}Z_8(x)\right) + \\
& + 6hZ_9(x) + 6C^{1313}\{(1 + Z_5(x))[Z_2(x)Z_8(x) + \\
& + (h + Z_4(x))Z_6(x)] + 2(h + Z_4(x))Z_7(x)Z_8(x)\} + \\
& + 6C^{1133}[Z_2(x)Z_6(x) + (h + Z_4(x))Z_8(x)]Z_7(x) = 0, \\
6C^{1111}h^4[Z_7(x)Z_6(x) + Z_8(x)(1 + Z_5(x))]\left(\frac{d}{dx}Z_5(x)\right) + \\
& + 2\{3C^{1313}h^2(h + Z_4(x))Z_2(x) + C^{1111}h^4[3(1 + Z_5(x))Z_7(x) + \\
& + Z_8(x)Z_6(x)]\}\left(\frac{d}{dx}Z_6(x)\right) + \\
& + 6C^{1111}h^4[(1 + Z_5(x))Z_6(x) + 3Z_8(x)Z_7(x)]\left(\frac{d}{dx}Z_7(x)\right) + \\
& + \{C^{1111}h^4[3Z_8^2(x) + Z_6^2(x) + 9Z_7^2(x) + 3(2 + Z_5(x))Z_5(x)] + \\
& + 6C^{1313}h^2[(2h + Z_4(x))Z_4(x) + h^2] + \\
& + 3C^{1133}h^2[Z_2^2(x) + (2h + Z_4(x))Z_4(x)]\}\left(\frac{d}{dx}Z_8(x)\right) + \\
& + 18h^3Z_9(x) + \{6C^{1313}h^2[(h + Z_4(x))(Z_6^2(x) + Z_8^2(x) - 3Z_7^2(x)) - \\
& - 3(1 + Z_5(x))Z_7(x)Z_2(x)] - 9C^{3333}(h + Z_4(x))[(2h + \\
& + Z_4(x))Z_4(x) + Z_2^2(x)] + 6C^{1133}h^2[Z_2(x)Z_6(x) + \\
& + (h + Z_4(x))Z_8(x)]Z_8(x)\} = 0, \\
\frac{d}{dx}Z_9(x) = Z_{10}(x), \\
\frac{d}{dx}Z_{10}(x) = \frac{1}{\lambda^*}\left(\frac{d^2}{dx^2}(\alpha - f(x)) - \frac{d}{dx}(Z_7(x) + Z_8(x))\right). \tag{3}
\end{aligned}$$

При виведенні розв'язувальних рівнянь прийнято до уваги, що на поверхнях пластини $z = \pm h$ виконуються умови

$$\sigma^- = 0, \quad \tau^\pm = 0, \quad \sigma^+ = \begin{cases} p(x), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Розглядали штамп з заокругленими краями ($f(x) = \beta x^2$), тому контактний тиск повинен задовольняти умову Герца $p(a) = 0$.

Граничні умови задачі задавали з урахуванням симетрії поведінки пластини відносно осі штампу та умови жорсткого закріплення на краях $x = \pm l$:

$$\begin{aligned} \frac{du^{(0)}(0)}{dx} = 0, \quad \frac{du^{(1)}(0)}{dx} = 0, \quad \frac{dw^{(0)}(0)}{dx} = 0, \quad \frac{dw^{(1)}(0)}{dx} = 0, \quad \frac{dp(0)}{dx} = 0, \\ u^{(0)}(\ell) = 0, \quad u^{(1)}(\ell) = 0, \quad w^{(0)}(\ell) = 0, \quad w^{(1)}(\ell) = 0, \\ p(\ell) = 0 \quad (p(x) = 0, \quad |x| \geq a), \end{aligned}$$

або у введених позначеннях:

$$\begin{aligned} Z_5(0) = 0, \quad Z_6(0) = 0, \quad Z_7(0) = 0, \quad Z_8(0) = 0, \quad Z_{10}(0) = 0, \\ Z_1(\ell) = 0, \quad Z_2(\ell) = 0, \quad Z_3(\ell) = 0, \quad Z_4(\ell) = 0, \quad Z_9(\ell) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Метод розв'язування. Розв'язування нелінійної граничної задачі (3), (4) проводимо шляхом зведення її до задач Коші методом інваріантного занурення, а вже отримані початкові задачі розв'язуємо за допомогою застосування стійких схем чисельного інтегрування.

Побудовані алгоритми чисельного розв'язування крайових задач реалізовано у вигляді комплексу програм. Попередню систему рівнянь (3) за допомогою комп'ютерної системи «Maple» перетворено в систему звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку з відповідними граничними умовами

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}(t)}{dt} = F(\bar{W}(t), t), \\ G^{(1)}(\bar{W}(0)) = 0, \\ G^{(2)}(\bar{W}(\ell)) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\bar{W} = \{Z_i/\ell, i = 1, \dots, 10\}$ – невідомий вектор; $F, G^{(1)}, G^{(2)}$ – вектор-функції розмірностей 10, 5, 5 відповідно; $t = x/\ell$.

Методом інваріантного занурення граничну задачу (5) зведено до задач Коші [2]:

$$\begin{aligned} r'_T(T, \gamma) = F(r(T, \gamma), T) - \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^n G_{k, W_i}^{(2)}(r(T, \gamma)) \cdot F_i(r(T, \gamma), T) \right\} r'_{\gamma_k}(T, \gamma), \\ G^{(1)}(r(0, \gamma)) = 0, \quad G^{(2)}(r(0, \gamma)) = \gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} W'_T(t, T, \gamma) = - \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^n G_{k, W_i}^{(2)}(r(T, \gamma)) F_i(r(T, \gamma), T) W'_{\gamma_k}(t, T, \gamma) \right\}, \\ W(t, t, \gamma) = r(t, \gamma), \end{aligned} \quad (7)$$

де $n = 10, m = 5, \gamma = \{\gamma_k, k = 1, \dots, m\}$ (припускали, що кожне γ_k приймає n_k ($n_k = 5$) значень на проміжку $[0, 1]$). За параметр занурення у розглянутій задачі приймали половину ширини пластини $T = \ell$.

Комплекс програм складається зі стандартних і нестандартних блоків. До стандартних відносяться: формування правих частин систем (6), (7); керування обчислювальним процесом розв'язання задач Коші; саме чисельне розв'язання задач Коші методом Адамса – Мулттона. Нестандартну частину складають підпрограми обчислення або задання компонент векторів $F(t), G^{(1)}(t), G^{(2)}(t)$. Програми написано на мові Фортран.

3. Числові результати. За допомогою створеного комплексу програм проведено розрахунки розподілу прогину пластини по всій її ширині та контактному тиску в зоні контакту, виявлено переваги нелінійної постановки задачі порівняно з лінійною та $\{1, 1\}$ -апроксимації порівняно з $\{1, 0\}$ -апроксимацією [5] при врахуванні піддатливості матеріалу пластини транс-

версально зсувним деформаціям і стисненню, досліджено вплив ступеня ортотропії і параметра зсуву на зміну контактного тиску в зоні контакту. Обчислення проводились для безрозмірних величин $x' = \frac{x}{\ell}$, $w' = \frac{w}{\ell}$, $p' = \frac{2\ell}{P} p$. Результати розрахунків (для $x = 0.0$, $a = 0.3 \ell$, $h/\ell = 0.1$, $\nu = \nu' = 0.3$) наведено в табл. 1, 2 (штрихи для спрощення запису опущено).

Таблиця 1

$E/E_z = 1$	Лінійна теорія			Нелінійна теорія		
E/G'	$w^{(0)}$	$w^{(1)}$	w	$w^{(0)}$	$w^{(1)}$	w
2.6	0.00049	0.00108	0.00158	0.00049	0.00133	0.00182
5.0	0.00095	0.00167	0.00262	0.00095	0.00246	0.00341
20.0	0.00373	0.00321	0.00694	0.00370	0.00899	0.01269
40.0	0.00765	0.01450	0.02215	0.00726	0.01735	0.02461

Таблиця 2

E/E_z	$w^{(0)}$	$w^{(1)}$	w
0.1	0.00372	0.00375	0.00748
0.5	0.00371	0.00765	0.01136
1.0	0.00370	0.00899	0.01269
2.0	0.00372	0.00998	0.01370

У табл. 1 наведено результати досліджень величини прогину пластини за лінійною та геометрично нелінійною теоріями. Як бачимо, значення першої компоненти $w^{(0)}$ розкладу прогину за поліномами Лежандра, отримані з використанням співвідношень різних теорій, співпадають, зате значення другої компоненти $w^{(1)}$ суттєво відмінні та значно зростають зі збільшенням відношення E/G' , що підтверджує необхідність вибору {1,1}-апроксимації характеристик пружного стану пластини за поліномами Лежандра. У табл. 2 відображено залежність компонент розкладу прогину пластини від зміни параметра E/E_z (нелінійна теорія, $E/G' = 20$). Легко бачити, що перша компонента залишається постійною при зміні цієї анізотропії, але величина другої компоненти різна й зростає зі збільшенням відношення E/E_z .

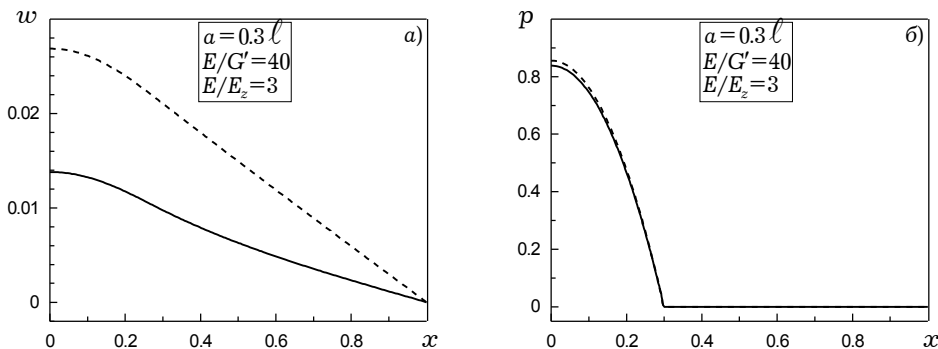


Рис. 2

На рис. 2 показано прогин пластини w при відповідному розподілі контактного тиску p . Розрахунок виконано за лінійною та нелінійною теоріями (на графіках відповідно пунктирна та суцільна лінії). Як бачимо на рисунку, врахування геометричної нелінійності суттєво впливає на розрахунок величини прогину пластини.

Рис. 3 ілюструє залежність величину прогину w і контактного тиску p від фізико-механічних параметрів матеріалу пластинки. Криві 1–5 відповідають значенням $E/G' = 5, 10, 20, 60, 80$. Як бачимо на графіках, ортотропія матеріалу впливає на прогин пластини.

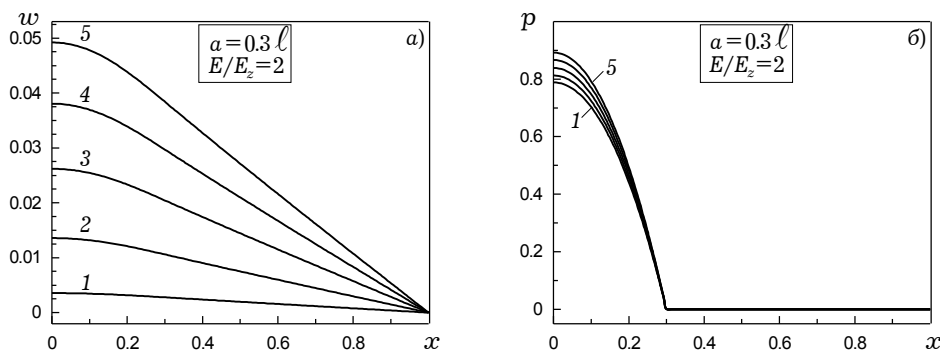


Рис. 3

На рис. 4 наведено прогин пластини та розподіл контактної тиску для різних величин зони контакту a пластини зі штампом. Криві 1–5 відповідають значенням $a = 0.1 l, 0.2 l, 0.4 l, 0.5 l$.

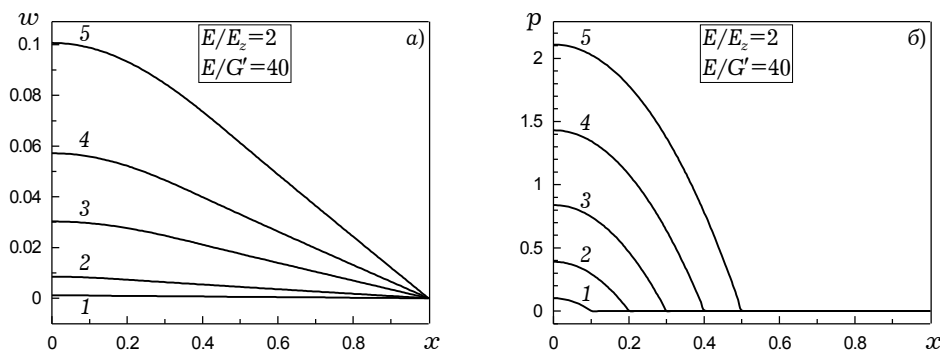


Рис. 4

Висновки. Проведені дослідження свідчать про те, що застосування узагальненої теорії анізотропних пластин ($\{1,1\}$ -апроксимації), що враховує деформації зсуву і поперечне стиснення при одночасному врахуванні геометричної нелінійності деформування пластин, дозволяє отримати якісно нову картину поведінки пластини під дією жорстких штампів та розподілу контактної тиску в зоні контакту.

Слід зазначити, що розв'язання поставленої контактної задачі запропонованим способом є досить простим, а застосування методу інваріантного занурення дозволяє уникнути проблеми нестійкості знаходження розв'язку розглянутих нелінійних контактних задач. Розроблену методику можна використати і для дослідження динамічної поведінки ортотропних пластин під дією рухомих штампів при розв'язуванні сумісно рівняння руху штампів і пластин.

1. Кагадій Т. С., Павленко А. В. Контактная задача для упругой ортотропной полуполосы // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 10. – С. 75–84.
2. Калита Г. І. Чисельне розв'язання нелінійних граничних задач методом інваріантного занурення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 120–125.
3. Кантор Б. Я., Богатиренко Т. Л. Метод розв'язування контактних задач нелінійної теорії оболонок // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – № 1. – С. 17–19.
4. Касті Д., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. – Москва: Мир, 1976. – 223 с.

5. Кит Г. С., Максимук А. В. Метод интегральных уравнений Вольтерра в контактных задачах для тонкостенных элементов конструкций // Теорет. и прикл. механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 29–35.
6. Марчук М. В. Узагальнена теорія пружного нелінійного динамічного деформування композитних оболонок // Матеріали III Міжнар. симп. «Некласичні проблеми теорії тонкостінних елементів конструкцій та фізико-хімічної механіки композиційних матеріалів». – Ів.-Франківськ, 1997. – Т. 1. – С. 132–138.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

В рамках обобщенной теории анизотропных пластин ($\{1,1\}$ -аппроксимация), учитывающей деформации сдвига и поперечное обжатие, рассмотрена задача контактного взаимодействия жестких штампов с пластинами в условиях геометрически нелинейного деформирования. Разработана методика решения контактных краевых задач путем сведения их к начальным задачам Коши методом инвариантного погружения. Получена эквивалентная начальная задача Коши, которая решена численно с использованием известных устойчивых методов численного интегрирования. На примере решения граничной задачи о контактном взаимодействии параболического штампа с трансверсально-изотропной пластинкой показано преимущество нелинейной постановки задачи по сравнению с линейной с учетом податливости материала пластины деформациям сдвига и обжатия, исследовано влияние параметров ортотропии и сдвига на изменение контактного давления в зоне контакта.

ON APPLICATION OF INVARIANT IMBEDDING METHOD TO SOLUTION OF NONLINEAR CONTACT PROBLEMS

A numerical procedure is proposed to investigate the nonlinear deformation of anisotropic plate with regard for compression interacting with a hard stamp by reducing the boundary-value problem to the equivalent Cauchy problem using the invariant imbedding method. The geometric and nonlinear theory is used for describing the stress-strain state. This theory considers the deformations of displacement and pressure. The obtained results of computations are presented in the form of graphs.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
20.07.05