УДК 539.377

Б. С. Хапко

ПРО РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З ІМПУЛЬСНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

На основі методу скінченних інтегральних перетворень з використанням теорії узагальнених функцій наведено спосіб розв'язування крайової задачі для диференціального рівняння у частинних похідних другого порядку з імпульсними коефіцієнтами та сингулярною правою частиною.

Система взаємозв'язаних рівнянь, яка описує процес теплопровідності, що відбувається у тонких оболонках зі зламами під дією температури навколишнього середовища та джерел тепла, має вигляд диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку з імпульсними коефіцієнтами та сингулярною правою частиною [15, 16]. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими та імпульсними коефіцієнтами розв'язки будували в [3, 9, 10, 11], а для частково вироджених диференціальних рівнянь, які описують процес теплопровідності у кусково-однорідних тілах – у [2, 5, 6, 12, 13]. Умови існування розв'язку диференціальних рівнянь параболічного типу з кусково-неперервними коефіцієнтами досліджували в [4, 14].

Крайову задачу для диференціального рівняння другого порядку з неперервними коефіцієнтами методом інтегральних перетворень розв'язували багато дослідників, зокрема [1, 8].

Нижче запропоновано спосіб побудови узагальненого розв'язку початково-граничної задачі для диференціального рівняння у частинних похідних другого порядку зі змінними й імпульсними коефіцієнтами та сингулярною правою частиною, яка описує дію зосереджених факторів у точці, на кривій та в обмеженій області.

Згадане рівняння в загальному вигляді має вигляд

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{m,k=0}^{3} a_{mk} \frac{\partial^2 w}{\partial x_m \partial x_k} + \sum_{m=0}^{3} b_m \frac{\partial w}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^{p} p_i \delta(x_j - x_j^i) \frac{\partial w}{\partial x_j} +$$
$$+ \left[c + \sum_{i=1}^{p} d_i \delta(x_j - x_j^i) \right] w = \sum_{s=1}^{p} f^s \delta(x_j - x_j^s, x_\alpha - x_\alpha^s) +$$
$$+ \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell \delta(f_1^\ell(x_j, x_\alpha)) + \sum_{r=1}^{q} f^r \delta(f_2^r(x_j, x_\alpha)) + f(x,t)\,, \tag{1}$$

де $a_{mk} = a_{km}$, b_m, p_i, d_i, $c = c_1 + c_2$ – коефіцієнти рівняння; f, f^s, f^ℓ, f^r – функції від координат і часу; $f_1^\ell(x_j, x_\alpha) = 0$ і $f_2^r(x_j, x_\alpha) = 0$ – рівняння кривої і рівняння поверхні, на яких зосереджені джерела тепла; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – просторові координати; t – час; $\alpha = \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$.

У початковий момент часу $t = 0$ задано розподіл шуканої функції

$$w(x,t) = w(x,0)\,. \tag{2}$$

Граничні умови щодо координати x_j запишемо у вигляді

$$\left. \left(\psi_a \frac{\partial w}{\partial x_j} + \chi_a w \right) \right|_{x_j = a} = \varphi_a\,, \qquad \left. \left(\psi_b \frac{\partial w}{\partial x_j} + \chi_b w \right) \right|_{x_j = b} = \varphi_b\,. \tag{3}$$

Тут $\psi_a, \psi_b, \chi_a, \chi_b$ – коефіцієнти; φ_a, φ_b – задані функції; a і b – границі зміни x_j. За іншими змінними x_α приймаємо аналогічні граничні умови.

Сформульовану задачу будемо розв'язувати в класі узагальнених функцій K^0 [7, 15, 16] методом скінченних інтегральних перетворень з побудовою алгоритму формування функції ядра. При цьому враховуємо, що всі функції мають властивості, за яких такі перетворення є можливими.

Рівняння (1) перетворимо в диференціальне рівняння відносно інтегрального зображення

$$\bar{w}(x_1,\ldots,x_{j-1},\gamma,x_{j+1},\ldots,x_n,t) = \\ = \int_a^b w(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n,t)\mathcal{K}(x_j,\gamma)\rho(x_j)\,dx_j \tag{4}$$

шуканої функції w за змінною x_j, де змінна γ, взагалі кажучи, комплексна. Ядро інтегрального перетворення $\mathcal{K}(x_j,\gamma)$ на проміжку $a < x_j < b$ визначимо з задачі Штурма – Ліувілля, сформульованої у термінах збіжності в середньому [8, 17]:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial a_{mj}\mathcal{K}\rho}{\partial x_j}\right) + c_1\mathcal{K}\rho = \omega^2\mathcal{K}\rho\,, \tag{5}$$

$$\left.\left(\psi_a\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_j} + \chi_a\mathcal{K}\right)\right|_{x_j=a} = 0, \qquad \left.\left(\psi_b\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_j} + \chi_b\mathcal{K}\right)\right|_{x_j=b} = 0\,, \tag{6}$$

де величина ω^2 не залежить від змінної перетворення x_j; $\rho(x_j) = = \exp\left[-\int^{x_j}\frac{a'_{jj}-b_j}{a_{jj}}\,dx_j\right]$ – вагова функція, $a'_{jj} = \dfrac{\partial a_{jj}}{\partial x_j}$. Надалі вважатимемо, що границі a і b зміни x_j не залежать від параметрів x_α. Розв'язком рівняння (5) є функції, яка залежать від ω^2. Задовольнивши граничні умови (6), знаходимо нескінченно зростаючу послідовність додатних власних чисел $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \omega_3^2 < \ldots$ задачі (5), (6). Кожному власному числу ω_γ^2 відповідає одна власна функція $\mathcal{K}_\gamma(x_j) = \mathcal{K}(x_j,\gamma)$.

У випадку, коли за змінною перетворення x_j виконуються умови періодичності $\left.\left(\psi_a\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_j} + \chi_a\mathcal{K}\right)\right|_{x_j=a} = \left.\left(\psi_b\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_j} + \chi_b\mathcal{K}\right)\right|_{x_j=b}$, кожному власному числу відповідає не одна, а дві лінійно незалежні власні функції, які повинні задовольняти умови взаємної ортогональності [8].

Використовуючи властивості узагальнених функцій та застосовуючи інтегральне перетворення (4) за змінною x_j з визначеним ядром $\mathcal{K}_\gamma$ і ваговою функцією ρ до рівняння (1) і початкової умови (2), одержимо задачу

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial t} + L_3\bar{w} - \omega_\gamma^2\bar{w} = N_a - N_b - \sum_{i=1}^{p}\left[p_i\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x_j}\right|_{x_j=x_j^i} + \right. \\ \left. + d_i w(x,t)\big|_{x_j=x_j^i}\right]\mathcal{K}_\gamma(x_j^i)\rho(x_j^i) + \int_a^b\left[\sum_{s=1}^{p} f^s\delta(x_j - x_j^s, x_\alpha - x_\alpha^s) + \right. \\ \left. + \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell\delta(f_1^\ell(x_j,x_\alpha)) + \sum_{r=1}^{q} f^r\delta(f_2^r(x_j,x_\alpha))\right]\mathcal{K}_\gamma(x_j)\rho(x_j)\,dx_j + \bar{f}\,, \tag{7}$$

$$\bar{w}(x_1,\ldots,x_{j-1},\gamma,x_{j+1},\ldots,x_n,t) = \bar{w}(\gamma,x_\alpha,0)\,, \tag{8}$$

де $L_3 = \sum_{m,k\neq j}^{2} a_{mk}\,\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_k} + \sum_{m\neq j}^{2} b_m\,\frac{\partial}{\partial x_m} + c_2$; $h = a_{jj}\rho$; $\bar{f}$ – інтегральне зображення вільного члена, а величини N_a і N_b, які виникають при задоволенні граничних умов (3), відповідно визначаємо за однією із формул

$$N_a = \frac{\varphi_a}{\psi_a} h(a)\mathcal{K}_\gamma(a), \quad \psi_a \neq 0, \text{ або } N_a = -\frac{\varphi_a}{\chi_a} h(a)\frac{\partial \mathcal{K}_\gamma(a)}{\partial x_j}, \quad \chi_a \neq 0,$$

$$N_b = \frac{\varphi_b}{\psi_b} h(b)\mathcal{K}_\gamma(b), \quad \psi_b \neq 0, \text{ або } N_b = -\frac{\varphi_b}{\chi_b} h(b)\frac{\partial \mathcal{K}_\gamma(b)}{\partial x_j}, \quad \chi_b \neq 0.$$

Для того щоб перетворити рівняння (7) у звичайне диференціальне рівняння стосовно змінної t, можна застосовувати різні методи за змінними x_α (наприклад, Фур'є, функцій Ґріна). Надалі до (7) за кожною змінною x_α застосуємо скінченне інтегральне перетворення за аналогією, як для x_j, попередньо визначивши функції ядер, які задовольняли би граничні умови за цими змінними. В результаті застосування таких перетворень одержимо звичайне диференціальне рівняння за часом

$$\frac{d\bar{w}^*}{dt} + \left(-P_1 - \omega_\gamma^2\right)\bar{w}^* = L_4 \left\{ N_a - N_b - \sum_{i=1}^{p}\left[p_i\,\frac{\partial w(x,t)}{\partial x_j}\bigg|_{x_j = x_j^i} + \right.\right.$$
$$\left. + d_i w(x,t)\big|_{x_j = x_j^i}\right]\mathcal{K}_\gamma(x_j^i)\rho(x_j^i) + \int_a^b \left[\sum_{s=1}^{p} f^s \delta(x_j - x_j^s, x_\alpha - x_\alpha^s) + \right.$$
$$\left.\left. + \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell \delta(f_1^\ell(x_j, x_\alpha)) + \sum_{r=1}^{q} f^r \delta(f_2^r(x_j, x_\alpha))\right]\mathcal{K}_\gamma(x_j)\rho(x_j)\,dx_j + \bar{f} \right\}, \quad (9)$$

де $\bar{w}^*$ – зображення шуканої функції w після інтегральних перетворень за змінними x_j та x_α; P_1 – поліном, що складається із суми $n-1$ власних значень інтегрального перетворення за кожною із змінних x_α; L_4 – оператор інтегральних перетворень за змінними x_α.

Розв'язавши рівняння (9) відносно часу та задовольнивши початкову умову (8), одержимо

$$\bar{w}^* = \int_0^t L_4 \left\{ N_a - N_b - \sum_{i=1}^{p} p_i\,\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial x_j}\bigg|_{x_j = x_j^i} + \right.$$
$$+ d_i w(x,\tau)\big|_{x_j = x_j^i}\Big]\mathcal{K}_\gamma(x_j^i)\rho(x_j^i) + \int_a^b \left[\sum_{s=1}^{p} f^s \delta(x_j - x_j^s, x_\alpha - x_\alpha^s) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell \delta(f_1^\ell(x_j, x_\alpha)) + \sum_{r=1}^{q} f^r \delta(f_2^r(x_j, x_\alpha))\right]\mathcal{K}_\gamma(x_j)\rho(x_j)\,dx_j +$$
$$\left. + \bar{f} \right\} \exp\left(P_2(\tau - t)\right) d\tau + \bar{w}^{*0} \exp(-P_2 t), \quad (10)$$

де

$$P_2 = P_1 + \omega_\gamma^2, \qquad \bar{w}^{*0} = L_4 \bar{w}(\gamma, x_\alpha, 0).$$

Для знаходження розв'язку задачі необхідно виконати обернені інтегральні перетворення за просторовими координатами.

Якщо функція $w(x,t)$ така, що інтеграл

$$\int_a^b w^2(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n, t)\rho(x_j)\,dx_j$$

існує і рівномірно обмежений відносно сукупності всіх значень параметрів x_α, то вона може бути подана рядом

$$w(x,t)=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\bar{w}(x_1,\ldots,x_{j-1},\gamma,x_{j+1},\ldots,x_n,t)\,\mathcal{K}_\gamma(x_j)\,, \tag{11}$$

де $\bar{w}$ визначається за формулою (4). Тут рівність розуміємо в сенсі збіжності в середньому.

Застосуємо до виразу (10) обернені інтегральні перетворення з оператором L_5 (оберненим до L_4) за всіма параметрами перетворень, що утворилися внаслідок прямого інтегрального перетворення L_4 за координатами x_α. В результаті одержимо

$$\begin{aligned}\bar{w}=L_5\Bigg\{\int_0^t L_4\Bigg\{N_a-N_b-\sum_{i=1}^{p}\Bigg[p_i\,\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial x_j}\Bigg|_{x_j=x_j^i}+\\
+d_i w(x,\tau)\Big|_{x_j=x_j^i}\Bigg]\mathcal{K}_\gamma(x_j^i)\rho(x_j^i)+\int_a^b\Bigg[\sum_{s=1}^{p}f^s\delta(x_j-x_j^s,x_\alpha-x_\alpha^s)+\\
+\sum_{\ell=1}^{d}f^\ell\delta(f_1^\ell(x_j,x_\alpha))+\sum_{r=1}^{q}f^r\delta(f_2^r(x_j,x_\alpha))\Bigg]\mathcal{K}_\gamma(x_j)\rho(x_j)\,dx_j+\\
+\bar{f}\Bigg\}\exp\big(P_2(\tau-t)\big)\,d\tau+\bar{w}^{*0}\exp(-P_2t)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Застосувавши до співвідношення (12) обернене перетворення (11), одержимо розв'язок задачі (1)–(3) у вигляді

$$\begin{aligned}w(x,t)=\sum_{\gamma=0}^{\infty}L_5\Bigg\{\int_0^t L_4\Bigg\{N_a-N_b-\sum_{i=1}^{p}\Bigg[p_i\,\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial x_j}\Bigg|_{x_j=x_j^i}+\\
+d_i w(x,\tau)\Big|_{x_j=x_j^i}\Bigg]\mathcal{K}_\gamma(x_j^i)\rho(x_j^i)+\int_a^b\Bigg[\sum_{s=1}^{p}f^s\delta(x_j-x_j^s,x_\alpha-x_\alpha^s)+\\
+\sum_{\ell=1}^{d}f^\ell\delta(f_1^\ell(x_j,x_\alpha))+\sum_{r=1}^{q}f^r\delta(f_2^r(x_j,x_\alpha))\Bigg]\mathcal{K}_\gamma(x_j)\rho(x_j)\,dx_j+\\
+\bar{f}\Bigg\}\exp\big(P_2(\tau-t)\big)\,d\tau+\bar{w}^{*0}\exp(-P_2t)\Bigg\}\mathcal{K}_\gamma(x_j)\,.\end{aligned} \tag{13}$$

У праву частину розв'язку (13) входять невідомі значення функції $w(x,t)$ і її похідної $\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x_j}$ на лініях $x_j=x_j^i$. Щоб визначити їх, запишемо функцію w з рівності (13) і її похідну $\dfrac{\partial w}{\partial x_j}$ в узагальненому сенсі на лініях $x_j=x_j^i$. В результаті одержимо систему $2p$ інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду для знаходження $2p$ невідомих значень функцій $w(x,t)\big|_{x_j=x_j^i}$ та їх похідних $\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x_j}\Bigg|_{x_j=x_j^i}$, $i=1,\ldots,p$, яка має вигляд

$$w(x,t)\Big|_{x_j=x_j^i}=\sum_{\gamma=0}^{\infty}L_5\Bigg\{\int_0^t L_4\Bigg\{N_a-N_b-\sum_{i=1}^{p}\Bigg[\,p_i\,\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial x_j}\Bigg|_{x_j=x_j^i}+$$

$$+ d_i\, w(x,\tau)\big|_{x_j=x_j^i}\Big]\mathcal{K}_\gamma(x_j^i)\rho(x_j^i) + \int_a^b \Big[\sum_{s=1}^{p} f^s\delta(x_j - x_j^s, x_\alpha - x_\alpha^s) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell \delta(f_1^\ell(x_j, x_\alpha)) + \sum_{r=1}^{q} f^r\delta(f_2^r(x_j, x_\alpha))\Big]\mathcal{K}_\gamma(x_j)\rho(x_j)\,dx_j +$$

$$+ \overline{f}\Big\}\exp\left(P_2(\tau - t)\right)d\tau + \overline{w}^{*0}\exp(-P_2 t)\Big\}\mathcal{K}_\gamma(x_j^i),$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x_j}\bigg|_{x_j=x_j^i} = \sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\{L_5\Big\{\int_0^t L_4\Big\{-\sum_{i=1}^{p}\Big[p_i\,\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial x_j}\bigg|_{x_j=x_j^i} +$$

$$+ d_i\, w(x,\tau)\big|_{x_j=x_j^i}\Big]\mathcal{K}_\gamma(x_j^i)\rho(x_j^i) + \int_a^b\Big[\sum_{s=1}^{p} f^s\delta(x_j - x_j^s, x_\alpha - x_\alpha^s) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell\delta(f_1^\ell(x_j, x_\alpha)) + \sum_{r=1}^{q} f^r\delta(f_2^r(x_j, x_\alpha))\Big]\mathcal{K}_\gamma(x_j)\rho(x_j)\,dx_j + N_a -$$

$$- N_b + \overline{f}\Big\}\exp\left(P_2(\tau - t)\right)d\tau + \overline{w}^{*0}\exp(-P_2 t)\Big\}\mathcal{K}_\gamma(x_j)\Big\}\bigg|_{x_j=x_j^i}. \quad (14)$$

Підставивши знайдені значення $w(x,t)\big|_{x_j=x_j^i}$ та $\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x_j}\bigg|_{x_j=x_j^i}$ з системи інтегральних рівнянь (14) у вираз (13), одержимо узагальнений розв'язок задачі (1)–(3).

Аналогічно можна побудувати розв'язок у випадку стаціонарної крайової задачі, але тоді для визначення невідомих функцій і їхніх похідних на лініях $x_j = x_j^i$ отримаємо систему алгебричних рівнянь

$$w(x)\big|_{x_j=x_j^i} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} L_5\Big\{L_4\Big\{N_a - N_b - \sum_{i=1}^{p}\Big[p_i\,\frac{\partial w(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x_j=x_j^i} +$$

$$+ d_i\, w(x)\big|_{x_j=x_j^i}\Big]\mathcal{K}_\gamma(x_j^i)\rho(x_j^i) + \int_a^b\Big[\sum_{s=1}^{p} f^s\delta(x_j - x_j^s, x_\alpha - x_\alpha^s) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell\delta(f_1^\ell(x_j, x_\alpha)) + \sum_{r=1}^{q} f^r\delta(f_2^r(x_j, x_\alpha))\Big]\times$$

$$\times\mathcal{K}_\gamma(x_j)\rho(x_j)\,dx_j + \overline{f}\Big\}\Big\}\mathcal{K}_\gamma(x_j^i),$$

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x_j=x_j^i} = \sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\{L_5\Big\{L_4\Big\{-\sum_{i=1}^{p}\Big[p_i\,\frac{\partial w(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x_j=x_j^i} +$$

$$+ d_i\, w(x)\big|_{x_j=x_j^i}\Big]\mathcal{K}_\gamma(x_j^i)\rho(x_j^i) + \int_a^b\Big[\sum_{s=1}^{p} f^s\delta(x_j - x_j^s, x_\alpha - x_\alpha^s) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{d} f^\ell\delta(f_1^\ell(x_j, x_\alpha)) + \sum_{r=1}^{q} f^r\delta(f_2^r(x_j, x_\alpha))\Big]\mathcal{K}_\gamma(x_j)\rho(x_j)\,dx_j +$$

$$+ N_a - N_b + \overline{f}\Big\}\mathcal{K}_\gamma(x_j)\Big\}\bigg|_{x_j=x_j^i},$$

причому їх кількість співпадатиме з кількістю ліній $x_j = x_j^i$ для кожної із функцій.

Як приклад розглянемо нестаціонарну задачу теплопровідності для скінченної циліндричної оболонки довжини l і радіуса R зі зламом уздовж екваторіального перетину $x_1 = x_{10}$, яка знаходиться в тепловому контакті з навколишнім середовищем температури $t_c^+(x_1, x_2, t)$. Введемо безрозмірні координати $x = \frac{x_1}{R}$, $\beta = x_2$, $\tau = \frac{at}{R^2}$. Тоді маємо [12, 15, 16]

– *рівняння теплопровідності*:

$$\Delta T_1(x,\beta,\tau) - æ_1 T_1(x,\beta,\tau) + \eta T_2(x,\beta,\tau)\delta(x - x_0) - \frac{\partial T_1(x,\beta,\tau)}{\partial \tau} = - æ_1 t_c^+(x,\beta,\tau),$$

$$\Delta T_2(x,\beta,\tau) - æ_2 T_2(x,\beta,\tau) + 3\eta T_1(x,\beta,\tau)\delta(x - x_0) - \frac{\partial T_2(x,\beta,\tau)}{\partial \tau} = 0; \tag{15}$$

– *крайові умови*:

$$\frac{\partial T_i(0,\beta,\tau)}{\partial x} - b_1 T_i(0,\beta,\tau) = 0, \qquad \frac{\partial T_i(\ell,\beta,\tau)}{\partial x} + b_2 T_i(\ell,\beta,\tau) = 0,$$

$$T_i(x,\beta,\tau) = T_i(x,\beta + 2n\pi,\tau), \qquad i = 1,2,$$

$$T_i(x,\beta,0) = T_{i0}(x,\beta). \tag{16}$$

Тут $æ_i$, b_i, η, a – теплофізичні характеристики матеріалу; $x_0 = \frac{x_{10}}{R}$; $\ell = \frac{l}{R}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$.

Згідно з запропонованим способом для розв'язання цієї задачі застосуємо скінченне інтегральне перетворення (4) спочатку за координатою x, а потім – за β. Ядро $\mathcal{K}(p_n x) = \frac{1}{c_n}\left[\cos p_n x + \frac{b_1}{p_n}\sin p_n x\right]$ інтегрального перетворення

$$T_i^*(p_n,\beta,\tau) = \int_0^\ell T_i(x,\beta,\tau)\mathcal{K}(p_n x)\,dx \tag{17}$$

за змінною x визначимо з задачі Штурма – Ліувілля (5), (6), яка в цьому випадку набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial x^2} + p\mathcal{K} = 0, \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} - b_1 \mathcal{K}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} - b_2 \mathcal{K}\right|_{x=\ell} = 0, \tag{19}$$

де $c_n = \sqrt{(p_n^2 + b_1^2)\left[\ell + \frac{b_2}{p_n^2 + b_2^2} + b_1\right]}$ – нормуючий множник, а p_n – додатні корені рівняння $\operatorname{tg} p\ell = \frac{1}{p^2 - b_2 b_2} p(b_1 + b_2)$.

За змінною β виконуються умови періодичності. Тому розв'язками відповідної задачі Штурма – Ліувілля будуть дві системи лінійно незалежних власних функцій $\mathcal{K}_{2m} = \frac{1}{\pi}\cos m\beta$, $\mathcal{K}_{2m-1} = \frac{1}{\pi}\sin m\beta$, які задовольняють умови взаємної ортогональності та відповідають одному й тому ж власному числу m^2, а інтегральне перетворення матиме вигляд

$$\bar{T}^*_{i,\gamma}(p_n, m, \tau) = \int_0^{2\pi} T^*_i(p_n, \beta, \tau)\mathcal{K}_\gamma(\beta)\,d\beta, \qquad \gamma = \begin{cases} 2m, \\ 2m-1. \end{cases} \tag{20}$$

Після застосування перетворень (17), (20) до задачі (15), (16) одержимо задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь за часом:

$$\frac{d\bar{T}^*_{1,\gamma}(p_n, m, \tau)}{d\tau} + \sigma^2_{nm1}\bar{T}^*_{1,\gamma}(p_n, m, \tau) = \eta T^*_{2,\gamma}(x_0, m, \tau)\mathcal{K}(p_n x_0) + \text{æ}_1 \bar{t}^{+*}_{c,\gamma},$$

$$\frac{d\bar{T}^*_{2,\gamma}(p_n, m, \tau)}{d\tau} + \sigma^2_{nm2}\bar{T}^*_{2,\gamma}(p_n, m, \tau) = 3\eta T^*_{1,\gamma}(x_0, m, \tau)\mathcal{K}(p_n x_0), \tag{21}$$

$$\bar{T}^*_{i,\gamma}(p_n, m, 0) = T_{i0,\gamma}(p_n, m), \qquad \sigma^2_{nmi} = p_n^2 + m^2 + \text{æ}_i.$$

Розв'язавши систему (21) та застосувавши до знайденого розв'язку обернене перетворення (11) за змінною x, одержимо

$$\bar{T}_{1,\gamma}(x, m, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{ T_{10,\gamma}(p_n, m)\exp\left(-\sigma^2_{nm1}\tau\right) + \eta\int_0^{\tau}\big[\bar{T}_{2,\gamma}(x_0, m, \xi)\mathcal{K}(p_n x_0) +$$

$$+ \text{æ}_1 \bar{t}^{+*}_{c,\gamma}(p_n, m, \tau)\big]\exp\left[-\sigma^2_{nm1}(\tau - \xi)\right]d\xi\Big\}\left[\cos p_n x + \frac{b_1}{p_n}\sin p_n x\right],$$

$$\bar{T}_{2,\gamma}(x, m, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{ T_{20,\gamma}(p_n, m)\exp\left(-\sigma^2_{nm2}\tau\right) + 3\eta\int_0^{\tau}\bar{T}_{1,\gamma}(x_0, m, \xi)\mathcal{K}(p_n x_0) \times$$

$$\times \exp\left[-\sigma^2_{nm2}(\tau - \xi)\right]d\xi\Big\}\left[\cos p_n x + \frac{b_1}{p_n}\sin p_n x\right]. \tag{22}$$

Підставивши в рівності (22) значення $x = x_0$, одержуємо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $\bar{T}_{i,\gamma}(x_0, m, \tau)$:

$$\bar{T}_{1,\gamma}(x_0, m, \tau) - \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\int_0^{\tau}\big[\eta \bar{T}_{2,\gamma}(x_0, m, \xi)\mathcal{K}(p_n x_0) +$$

$$+ \text{æ}_1 \bar{t}^{+*}_{c,\gamma}(p_n, m, \tau)\big]\exp\left[-\sigma^2_{nm1}(\tau - \xi)\right]d\xi +$$

$$+ T_{10,\gamma}(p_n, m)\exp\left(-\sigma^2_{nm1}\tau\right)\Big\}\left[\cos p_n x_0 + \frac{b_1}{p_n}\sin p_n x_0\right] = 0,$$

$$\bar{T}_{2,\gamma}(x_0, m, \tau) - \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\int_0^{\tau} 3\eta \bar{T}_{1,\gamma}(x_0, m, \xi)\mathcal{K}(p_n x_0)\exp\left[-\sigma^2_{nm2}(\tau - \xi)\right]d\xi +$$

$$+ T_{20,\gamma}(p_n, m)\exp\left(-\sigma^2_{nm2}\tau\right)\Big\}\left[\cos p_n x_0 + \frac{b_1}{p_n}\sin p_n x_0\right] = 0.$$

Підставивши знайдені величини $\bar{T}_{i,\gamma}(x_0, m, \tau)$ в підінтегральні вирази правої частини (22) та застосувавши обернене перетворення (11) за змінною β, одержимо розв'язок задачі (15), (16) у вигляді

$$T_i(x, \beta, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\bar{T}_{i,2m}(x, m, \tau)\cos m\beta + \bar{T}_{i,2m-1}(x, m, \tau)\sin m\beta\right].$$

У випадку стаціонарної крайової задачі для визначення невідомих функцій $\bar{T}_{i,\gamma}(x_0, m)$ отримаємо систему алгебричних рівнянь

$$\bar{T}_{1,\gamma}(x_0, m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{nm1}} \left[\eta \bar{T}_{2,\gamma}(x_0, m) \mathcal{K}(p_n x_0) + \right.$$

$$\left. + æ_1 \bar{t}_{c,\gamma}^{+*}(p_n, m)\right] \left[\cos p_n x_0 + \frac{b_1}{p_n} \sin p_n x_0\right],$$

$$\bar{T}_{2,\gamma}(x_0, m) = 3\eta \bar{T}_{1,\gamma}(x_0, m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{K}(p_n x_0)}{\sigma_{nm2}} \left[\cos p_n x_0 + \frac{b_1}{p_n} \sin p_n x_0\right].$$

Нехтуючи проміжними формулами, наведемо розв'язок задачі

$$T_i(x, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\bar{T}_{i,2m}(x, m) \cos m\beta + \bar{T}_{i,2m-1}(x, m) \sin m\beta\right],$$

де

$$\bar{T}_{1,\gamma}(x, m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{nm1}} \left[\eta \bar{T}_{2,\gamma}(x_0, m) \mathcal{K}(p_n x_0) + \right.$$

$$\left. + æ_1 \bar{t}_{c,\gamma}^{+*}(p_n, m)\right] \left[\cos p_n x + \frac{b_1}{p_n} \sin p_n x\right],$$

$$\bar{T}_{2,\gamma}(x, m) = 3\eta \bar{T}_{1,\gamma}(x_0, m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{nm2}} \mathcal{K}(p_n x_0) \left[\cos p_n x + \frac{b_1}{p_n} \sin p_n x\right].$$

Отже, розроблено аналітичний спосіб розв'язування початково-граничної задачі для частково вироджених диференціальних рівнянь параболічного типу. Спосіб базується на використанні теорії узагальнених функцій і скінченних інтегральних перетворень з алгоритмом формування функції ядра та дозволяє нестаціонарну задачу звести до розв'язування системи інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду за часом, а стаціонарну – до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь. Про ефективність запропонованого способу свідчить розв'язання задачі теплопровідності для скінченної циліндричної оболонки зі зламом.

1. *Галицин А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1976. – 282 с.
2. *Вигак В. М.* О построении решения уравнения теплопроводности для кусочно-однородного тела // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 1. – С. 30–32.
3. *Зорий Л. М.* К применению обобщенных функций в аналитических методах исследования сложных упругих систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 11. – С. 991–994.
4. *Камынин Л. И.* О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1964. – **28**, № 4. – С. 721–744.
5. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
6. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой // Физ.-хим. механика материалов. – 1976. – **12**, № 2. – С. 108–112.
7. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – Москва: Мир, 1978. – 518 с.
8. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. – Москва: Физматгиз, 1962. – 768 с.
9. *Кушнір Р. М.* Про побудову розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 9. – С. 54–57.
10. *Лазарян В. А., Конашенко С. И.* Обобщенные функции в задачах механики. – Киев: Наук. думка, 1974. – 190 с.
11. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – Москва: Машиностроение, 1973. – 659 с.

12. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
13. *Процюк Б. В.* Побудова фундаментальної системи розв'язків звичайного лінійного диференціального рівняння з розривними і сингулярними коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 4. – С. 116–122.
14. *Самарский А. А.* Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1958. – **121**, № 2. – С. 225–228.
15. *Швец Р. Н., Хапко Б. С.* Нестационарная задача теплопроводности и термоупругости для цилиндрической оболочки с источниками тепла // Мат. физика и нелинейная механика. – 1984. – Вып. 1 (35). – С. 86–91.
16. *Швецъ Р. М., Хапко Б. С.* Про рівняння термопружності тонких оболонок зі зломами серединної поверхні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 1. – С. 135–139.
17. *Швецъ Р. М., Хапко Б. С.* Температурні поля і напруження у пологій оболонці зі зломами серединної поверхні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 2. – С. 62–69.

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИМПУЛЬСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

На основе метода конечных интегральных преобразований с использованием теории обобщенных функций приведен способ построения решения краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с импульсными коэффициентами и сингулярной правой частью.

SOLUTION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE COEFFICIENTS

On the base of finite integral transforms method using the generalized functions the approach to solving the boundary-value problem for the second order partial differential equation with impulse coefficients and singular right part is proposed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
16.05.05