УДК 519.6: 535.4

Л. П. Процах, П. О. Савенко, М. Д. Ткач

МЕТОД НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ З НЕЛІНІЙНИМ ДВОВИМІРНИМ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ

Нелінійна двовимірна спектральна задача на власні значення методом неявної функції зводиться до дослідження і чисельного розв'язування задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку.

1. Вступ. Нелінійні спектральні задачі виникають у різних областях аналізу й математичної фізики. Зокрема, така задача виникає при дослідженні галуження розв'язків нелінійних інтеґральних рівнянь типу Урисона або Гаммерштейна, якщо їх розв'язки залежать від декількох параметрів, що входять у ядра інтеґральних операторів. У роботі подається один із підходів до розв'язування двовимірної нелінійної спектральної задачі із застосуванням методу неявної функції, що, в свою чергу, приводить до розв'язування задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку.

2. Метод неявної функції. Розглянемо задачу про знаходження власних значень і власних елементів лінійного однорідного рівняння

$$T(\mathbf{c})\, u = u \tag{1}$$

у дійсному гільбертовому просторі, де $T(\mathbf{c})$ – лінійний неперервний оператор, який нелінійно залежить від двовимірного векторного спектрального параметра $\mathbf{c} = \{c_1, c_2\} \in \mathbb{R}^2$.

Означення. Ті значення параметра $\mathbf{c} = \mathbf{c}_*$, при яких рівняння (1) має відмінні від тотожного нуля розв'язки u_*, назвемо власними значеннями, а розв'язки u_* – власними елементами рівняння (1).

Поряд з рівнянням (1) при фіксованих значеннях параметра $\mathbf{c}$ розглядатимемо допоміжну лінійну задачу на власні значення

$$T(\mathbf{c})u = \lambda\, u\,, \tag{2}$$

де λ – лінійний спектральний параметр. Очевидно, що ті значення параметра $\mathbf{c} = \mathbf{c}_*$, при яких $\lambda = 1$ є власними значеннями рівняння (2), є власними значеннями рівняння (1).

Спочатку розглянемо частковий випадок задачі (1) у припущенні, що $T(\mathbf{c})$ є дійсною n-вимірною симетричною матрицею, тобто $T(\mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Нехай елементи матриці $t_{ij}(c_1, c_2)$ є неперервно диференційовними функціями від параметрів c_1, c_2. У цьому випадку задача (1) матиме розв'язок, якщо має розв'язок рівняння

$$P(c_1,c_2) = \det \begin{Vmatrix} t_{11}(c_1,c_2)-1 & t_{12}(c_1,c_2) & \dots & t_{1n}(c_1,c_2) \\ t_{21}(c_1,c_2) & t_{22}(c_1,c_2)-1 & \dots & t_{2n}(c_1,c_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1}(c_1,c_2) & t_{n2}(c_1,c_2) & \dots & t_{nn}(c_1,c_2)-1 \end{Vmatrix} = 0\,. \tag{3}$$

Рівняння $P(c_1, c_2) = 0$ розглядаємо як рівність для визначення неявної функції. Для визначеності покладемо $c_2 = c_2(c_1)$. Припустимо, що існує така точка $\{c_1^{(*)}, c_2^{(*)}\}$, що $P(c_1^{(*)}, c_2^{(*)}) = 0$. Тоді, якщо коефіцієнти $t_{nm}(c_1, c_2)$ є неперервно диференційовними функціями від c_1, c_2, задача визначення неявно заданої функції $c_2 = c_2(c_1)$ у деякому околі точки $\{c_1^{(*)}, c_2^{(*)}\}$ на підставі рівняння (3) зводиться до задачі Коші [1, 7][1]:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{P'_{c_1}(c_1, c_2)}{P'_{c_2}(c_1, c_2)}, \tag{4}$$

$$c_2(c_1^{(*)}) = c_2^{(*)}. \tag{5}$$

Для задачі (4), (5) виконується теорема про існування неявно заданої функції [7], яка в прийнятих припущеннях має таке формулювання:

Теорема. *Нехай* $\{c_1^{(*)}, c_2^{(*)}\}$ *– розв'язок рівняння* (3), *тобто* $P(c_1^{(*)}, c_2^{(*)}) = 0$, *функція* $P(c_1, c_2)$ *та її частинні похідні першого порядку при всіх* c_1, c_2, *достатньо близьких до* $\{c_1^{(*)}, c_2^{(*)}\}$, *є неперервними функціями, крім цього, частинна похідна* P'_{c_2} *відмінна від нуля при* $c_1 = c_1^{(*)}$, $c_2 = c_2^{(*)}$.

Тоді для всіх c_1, *достатньо близьких до* $c_1^{(*)}$, *існує одна визначена неперервна функція* $c_2 = c_2(c_1)$, *що задовольняє рівняння* (4), *умову* (5) *і має похідну* $c_2'(c_1)$.

Зазначимо, що якщо функція $P(c_1, c_2)$ задовольняє умови теореми 1, то із припущення існування одного власного значення випливає існування в деякому околі точки $\{c_1^{(*)}, c_2^{(*)}\}$ неперервного спектру двовимірної нелінійної спектральної задачі, тобто існує деяка спектральна лінія.

Чисельно задача (4), (5) досліджується і розв'язується відомими методами диференціальних рівнянь.

Розглянемо більш загальний випадок, коли $T(\mathbf{c})$ – цілком неперервний оператор, що діє в дійсному гільбертовому просторі $L_2(\Omega)$. Припустимо, що оператор $T(\mathbf{c})$ – неперервно диференційовний за Фреше за параметром $\mathbf{c}$, тобто при $\mathbf{c} \in \overline{\Lambda}$ існують лінійні неперервні оператори $\partial T(\mathbf{c})/\partial c_j$, $j = 1, 2$, що діють у просторі $L_2(\Omega)$. Нехай $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормований базис простору $L_2(\Omega)$. Подамо власний елемент задачі (1) у вигляді

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \tag{6}$$

де α_k – невідомі коефіцієнти. Підставляючи (6) в (1) і домножуючи скалярно отримані рівності на базисні функції, отримуємо нескінченновимірну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження розв'язків:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_{k\ell}(c_1, c_2)\alpha_k = \alpha_\ell, \qquad \ell = 1, 2, \ldots, n, \ldots, \tag{7}$$

де $t_{k\ell}(c_1, c_2) = (T(c_1, c_2)\varphi_k, \varphi_\ell)$. Для того щоб система (7) мала нетривіальний розв'язок, необхідно, щоб

---

[1] **Зауваження**. У деяких випадках зручніше розглядати еквівалентну до (4), (5) задачу на визначення функції $c_1 = c_1(c_2)$:

$$\frac{dc_1}{dc_2} = -\frac{P'_{c_2}(c_1, c_2)}{P'_{c_1}(c_1, c_2)}, \tag{4a}$$

$$c_1(c_2^{(*)}) = c_1^{(*)}. \tag{5a}$$

$$\tilde{P}(c_1, c_2) = \det \begin{Vmatrix} t_{11}(c_1,c_2)-1 & t_{12}(c_1,c_2) & \dots & t_{1n}(c_1,c_2) & \dots \\ t_{21}(c_1,c_2) & t_{22}(c_1,c_2)-1 & \dots & t_{2n}(c_1,c_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1}(c_1,c_2) & t_{n2}(c_1,c_2) & \dots & t_{nn}(c_1,c_2)-1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix} = 0 . \quad (8)$$

Отже, одержано рівняння $\tilde{P}(c_1, c_2) = 0$ для визначення неявної функції $c_2 = c_2(c_1)$.

При чисельному знаходженні розв’язків задачі (4), (5) необхідно від нескінченновимірного рівняння (8) перейти до близьких (у певному сенсі) матричних рівнянь типу (3) [2, 3].

Питання такого переходу для цілком неперервного оператора $T(\mathbf{c})$ при фіксованому значенні параметра $\mathbf{c}$ досліджуються, зокрема, в [5]. Згідно з означенням цілком неперервного оператора подамо $T(\mathbf{c})$ у вигляді

$$T(\mathbf{c})\, u = T_n(\mathbf{c})\, u + T'_\varepsilon(\mathbf{c})\, u , \quad (9)$$

де $T_n(\mathbf{c})$ – вироджений оператор, а норму оператора $T'_\varepsilon(\mathbf{c})$ можна зробити меншою від будь-якого малого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$. Тоді згідно з [5] при фіксованому значенні $\mathbf{c}_*$, якщо $\| T(\mathbf{c}) - T_n(\mathbf{c}) \| \to 0$ при $n \to \infty$, де $T(\mathbf{c})$, $T_n(\mathbf{c})$ – цілком неперервні оператори, характеристичні числа рівняння $u - \mu\, T(\mathbf{c})\, u = 0$ отримуються граничним переходом з характеристичних чисел рівняння $u_n - \mu\, T_n(\mathbf{c})\, u_n = 0$. Оскільки $\mu = 1$ є одночасно характеристичним і власним числом задачі (2), то при фіксованому значенні c_* згідно з теоремою 3 [5, с. 60] характеристичне число $\mu = 1$ задачі (2) може бути отримане при $n \to \infty$ граничним переходом на підставі послідовності для характеристичного числа $\mu_n \to 1$, що відповідає рівнянню

$$u_n - \mu\, T_n(\mathbf{c}_*) u_n \equiv u_n - \frac{1}{\lambda} T_n(\mathbf{c}_*) u_n = 0 .$$

Якщо при деякому $n > N$ нерівність $\| T(\mathbf{c}) - T_n(\mathbf{c}) \| < \varepsilon$ виконується рівномірно в деякому околі точки $\mathbf{c}_* = \{c_1^{(*)}, c_2^{(*)}\}$, то знаходження наближеного розв’язку задачі (8) можна звести до знаходження розв’язків задачі (3) з наступним переходом до задачі (4), (5).

Зазначимо, що за прийнятих вище припущень стосовно властивостей оператора $T(\mathbf{c})$ залишаються відкритими питання збіжності наближених розв’язків $\mathbf{c}_*^{(n)}$ послідовності наближених задач до точного розв’язку $\mathbf{c}_*$ задачі (1).

3. Наведемо одну з достатніх ознак існування одного з розв’язків нелінійної векторної спектральної задачі (1).

Лема. *Нехай існує таке значення параметра $\mathbf{c}_*$ і така замкнена компактна множина $\mathfrak{M} \subset L_2(\Omega)$, яку оператор $T(\mathbf{c}_*)$ відображає в себе і при цьому задовольняє умову*

$$\| T(\mathbf{c}_*)\, u_1 - T(\mathbf{c}_*) u_2 \|_{L_2} < \| u_1 - u_2 \|_{L_2} , \quad u_1,\ u_2 \in \mathfrak{M}, \quad u_1 \neq u_2 . \quad (10)$$

Тоді в $\mathfrak{M}$ існує точка u_* така, що $T(\mathbf{c}_*)\, u_* = u_*$.

Д о в е д е н н я. При доведенні леми використовуємо ідею, викладену в [4, с. 18]. Для цього розглянемо функціонал $\varphi(\mathbf{c}_*, u) = \| T(\mathbf{c}_*) u - u \|^2_{L_2}$ при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_*$ на множині $\mathfrak{M}$. Цей функціонал неперервний, оскільки неперервним є оператор $T(\mathbf{c}_*)$. Тому в точці u_* компактної множини він набуває мінімального значення. Це значення дорівнює нулеві. У протилежному випадку з умови (10) випливає нерівність, яка містить суперечність:

$$\varphi\big(T(\mathbf{c}_*)u_*\big) = \left\| T(\mathbf{c}_*)u_* - T^2(\mathbf{c}_*)u_* \right\|_{L_2} < \| u_* - T(\mathbf{c}_*)u_* \|_{L_2} =$$

$$= \min_{u \in \mathfrak{M}} \varphi\big(T(\mathbf{c}_*)u\big).$$

Звідси випливає, що точка $\mathbf{c}_*$ є власним значенням оператора $T(\mathbf{c}_*)$, а u_* – його власним елементом. Лему доведено. ◊

4. Числовий приклад. Розглянемо застосування викладеного вище підходу до знаходження спектральної лінії для однорідного лінійного інтеґрального рівняння

$$u(s_1,s_2) = T(c_1,c_2)\,u \equiv$$

$$\equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(s_1',s_2')\mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)\,\frac{u(s_1',s_2')}{f_0(s_1',s_2',c_1,c_2)}\,ds_1'\,ds_2',$$

де $F(s_1',s_2')$ – неперервна в області $\bar{\Omega} = \{|s_1'| \le 1,\ |s_2'| \le 1\}$ дійсна додатна функція,

$$\mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2) = \mathcal{K}_1(s_1,s_1',c_1)\mathcal{K}_2(s_2,s_2',c_2) \equiv$$

$$\equiv \frac{\sin\big(c_1(s_1-s_1')\big)}{\pi(s_1-s_1')}\cdot\frac{\sin\big(c_2(s_2-s_2')\big)}{\pi(s_2-s_2')},$$

$$f_0(s_1,s_2,c_1,c_2) = AF \equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)F(s_1',s_2')\,ds_1'\,ds_2',$$

$\mathbf{c} = \{c_1,c_2\}$ – двовимірний спектральний параметр, який нелінійно входить у ядро оператора. Із фізичних властивостей параметра $\mathbf{c} = \{c_1,c_2\}$ випливає [6], що $c_1 > 0,\ c_2 > 0$.

Оскільки $f_0(s_1,s_2,c_1,c_2)$ при довільних обмежених значеннях $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ є власною функцією рівняння (9), то оператор має неперервний спектр, що співпадає з першим квадрантом площини $\mathbb{R}^2$. Розглянемо задачу про знаходження інших власних значень рівняння (9), яким відповідають власні функції, що відмінні від функції $f_0(s_1,s_2,c_1,c_2)$.

Виконаємо в рівнянні (9) заміну

$$\varphi(s_1,s_2) = \sqrt{\frac{F(s_1,s_2)}{f_0(s_1,s_2,c_1,c_2)}}\,u(s_1,s_2) \tag{11}$$

і перейдемо до рівняння

$$\varphi(s_1,s_2) = \tilde{T}(c_1,c_2)\varphi \equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathfrak{R}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2)\varphi(s_1',s_2')\,ds_1'\,ds_2' \tag{12}$$

з симетричним додатним ядром

$$\mathfrak{R}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2) =$$

$$= \sqrt{\frac{F(s_1,s_2)}{f_0(s_1,s_2,c_1,c_2)}\cdot\frac{F(s_1',s_2')}{f_0(s_1',s_2',c_1,c_2)}}\,\mathcal{K}(s_1,s_2,s_1',s_2';c_1,c_2). \tag{13}$$

Тоді з урахуванням (11) власною функцією рівняння (12) при довільних обмежених значеннях $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ буде функція $\varphi_0(s_1, s_2, c_1, c_2) = \sqrt{F(s_1, s_2) f_0(s_1, s_2, c_1, c_2)}$. Виключимо цю функцію з ядра (13):

$$\tilde{\tilde{\Re}}(s_1, s_2, s_1', s_2'; c_1, c_2) =$$

$$= \Re(s_1, s_2, s_1', s_2'; c_1, c_2) - \frac{\varphi_0(s_1, s_2, c_1, c_2)\varphi_0(s_1', s_2', c_1, c_2)}{\| \varphi_0(s_1', s_2', c_1, c_2) \|^2}$$

і розглянемо рівняння

$$\varphi(s_1, s_2) = \tilde{\tilde{T}}(c_1, c_2)\varphi \equiv \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tilde{\tilde{\Re}}(s_1, s_2, s_1', s_2'; c_1, c_2)\varphi(s_1', s_2')\, ds_1'\, ds_2' . \qquad (14)$$

Інтеґральний оператор $\tilde{\tilde{T}}(c_1, c_2)$ є фредгольмовим, цілком неперервним, а також неперервно диференційовним за параметрами c_1 і c_2.

Застосовуючи кубатурну формулу Ґаусса, інтеґральне рівняння (14) зводимо до матричного рівняння. Розмірність матриці в задачі (3) покладали при розрахунках рівною 256. Використовуючи метод Рунґе – Кутта до чисельного розв'язування задачі типу (4), (5), одержуємо спектральні лінії рівняння (14) для двох заданих функцій $F(s_1, s_2) = 1$ і $F(s_1, s_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{s_1^2 + s_2^2} \right)$, які подано відповідно на рис. 1 і рис. 2. Спектральні лінії, наведені на рис. 1, є прямими, які описуються такими функціями: $c_1^{(1)}(c_2) \equiv \pi$, $c_1^{(2)}(c_2) \cong 5.347$, $c_1^{(3)}(c_2) \equiv 2\pi$, $c_2^{(1)}(c_1) \equiv \pi$, $c_2^{(2)}(c_1) \equiv 5.347$, $c_2^{(1)}(c_1) \equiv 2\pi$. Для визначення початкової умови (5) використовуємо варіаційний підхід [6].

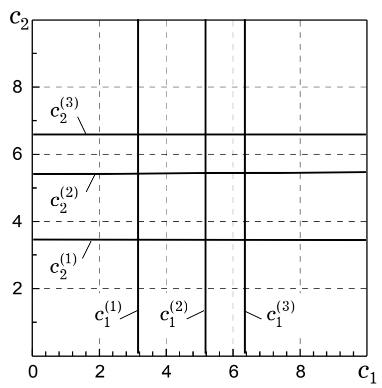

Рис. 1

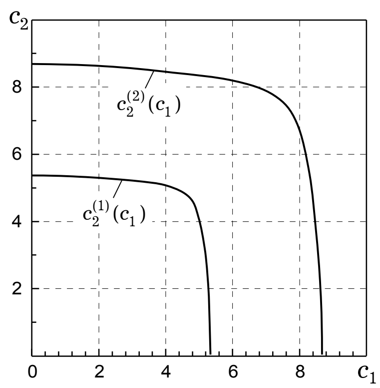

Рис. 2

5. Висновки. Метод неявної функції є ефективним при дослідженні питання існування розв'язку нелінійної спектральної задачі (1), оскільки за умови існування розв'язку в одній точці він дозволяє встановити існування спектральної лінії, тобто множини розв'язків. При цьому дослідження розв'язків зводиться до розгляду відповідних розв'язків задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Це дає можливість знаходити і досліджувати (у тому числі й особливі) розв'язки цього рівняння.

1. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 527 с.
2. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. – Тарту: Тартуск. гос. ун-т., 1976. – 161 с.

3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1984. – 752 с.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – Москва: Наука, 1970. – 512 с.
6. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: ІППММ НАН України, 2002. – 320 с.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – Москва: Наука, 1965. – Т. 1. – 479 с.

МЕТОД НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДВУМЕРНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Нелинейная двумерная спектральная задача на собственные значения методом неявной функции приводится к исследованию и числовому решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

METHOD OF IMPLICIT FUNCTION FOR SOLVING EIGEN-VALUE PROBLEM WITH NONLINEAR TWO-DIMENSIONAL SPECTRAL PARAMETER

The nonlinear two-dimensional spectral eigen-value problem by the method of implicit function is reduced to investigation and numerical solving the Cauchy problem for the first-order linear differential equation.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.09.05