УДК 517.95

Н. В. Пабирівська, В. А. Власов

ВИЗНАЧЕННЯ СТАРШОГО КОЕФІЦІЄНТА У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

Встановлено умови існування розв'язку оберненої задачі визначення старшого коефіцієнта у вигляді квадратичної за просторовою змінною функції з трьома невідомими параметрами, що залежать від часу. Окремо визначено умови єдиності розв'язку цієї задачі.

Питання повного визначення старшого коефіцієнта, тобто коефіцієнта, що залежить від усіх незалежних змінних, залишається відкритим. Перші кроки щодо вирішення цієї проблеми були запропоновані у [7], де старший коефіцієнт шукали у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежала від часу, а інша – від просторової змінної, причому залежність від x була відома. У праці [3] розглянуто можливість визначення обох множників $a_0(x)$ й $a_1(t)$ у старшому коефіцієнті. У [4] вивчалась обернена задача визначення старшого коефіцієнта, який мав вигляд лінійної за змінною x функції з двома невідомими параметрами, які залежали від часу, коли одна з умов перевизначення була інтегральною.

У цій роботі досліджується задача визначення старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні, який має вигляд квадратичної за просторовою змінною функції з трьома невідомими параметрами, що залежать від часу.

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = \left(a(t)x^2 + b(t)x + c(t)\right)u_{xx}(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомими коефіцієнтами $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le h\,, \tag{2}$$

крайовими умовами та умовами перевизначення

$$u_x(0,t) = \nu_1(t), \qquad u_x(h,t) = \nu_2(t), \qquad 0 \le t \le T\,, \tag{3}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad \int_0^h u(x,t)\,dx = \mu_3(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Виходячи з фізичних міркувань, рівняння теплопровідності (1) буде коректним, якщо $a(t)x^2 + b(t)x + c(t) > 0 \quad \forall (x,t) \in \bar{Q}_T$. Ця умова буде виконуватись, зокрема, у випадку, коли $a(t) > 0$, $-\dfrac{b(t)}{2a(t)} > h \quad \forall t \in [0,T]$, і значення старшого коефіцієнта на кінцях відрізка $[0,h]$ є більшими від нуля, тобто $c(t) > 0,\ a(t)h^2 + b(t)h + c(t) > 0\ \forall t \in [0,T]$.

Отже, під розв'язком задачі (1)–(4) розуміємо набір функцій $(a(t), b(t)$, $c(t), u(x,t))$ з класу $H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\bar{Q}_T)$, $0 < \gamma < 1$, які задовольняють рівняння (1), умови (2)–(4), і $a(t) > 0\ \forall t \in [0,T]$, $-\dfrac{b(t)}{2a(t)} >$ $> h$, $c(t) > 0$, $a(t)h^2 + b(t)h + c(t) > 0\ \forall t \in [0,T]$.

Теорема 1 *Нехай виконуються умови:*

(***i***) $\varphi \in H^{2+\gamma}[0,h],\ \ \nu_i, \mu_j \in H^{1+\gamma/2}[0,T],\ \ i = 1,2,\ \ j = 1,2,3,\ \ f \in H^{1+\gamma,\gamma/2}(\bar{Q}_T)$;

(***ii***) $\mu_1'(t) - f(0,t) > 0, \quad \mu_2'(t) - f(h,t) \ge 0, \quad \mu_3'(t) - \int_0^h f(x,t)\,dx < 0$,

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. – 49, № 3. – С. 18-25.

$$\mu_1(t)-\mu_2(t)+h\nu_2(t)>0, \qquad \nu_2(t)-\nu_1(t)\ge 0,$$

$$\nu_1(t)+\frac{\mu_1(t)-\mu_2(t)}{h}\le 0, \qquad h^2\nu_2(t)-2h\mu_2(t)+2\mu_3(t)>2h,$$

$$h\mu_2(t)+h\mu_1(t)-2\mu_3(t)>0, \quad t\in[0,T], \quad \varphi''(x)>0, \quad x\in[0,h];$$

(***iii***) $\mu_1(0)=\varphi(0), \quad \mu_2(0)=\varphi(h), \quad \mu_3(0)=\int\limits_0^h \varphi(x)\,dx, \quad \nu_1'(0)=\varphi(0), \quad \nu_2'(0)=\varphi(h).$

Тоді існує розв'язок задачі (1)–(4) *при* $x\in[0,h]$, $t\in[0,t_0]$, $0<t_0\le T$, *де число* t_0 *визначається вихідними даними.*

Д о в е д е н н я. Припускаючи, що $(a(t), b(t), c(t), u(x,t))$ – розв'язок задачі (1)–(4), покладемо в рівнянні (1) спочатку $x=0$, а потім $x=h$ і, враховуючи перші дві умови з (4), прийдемо до співвідношень

$$\mu_1'(t)=c(t)u_{xx}(0,t)+f(0,t), \tag{5}$$

$$\mu_2'(t)=\big(a(t)h^2+b(t)h+c(t)\big)u_{xx}(h,t)+f(h,t). \tag{6}$$

Використовуючи третю з умов (4), проінтегруємо (1) за x у межах від 0 до h:

$$\mu_3'(t)=a(t)\big(h^2\nu_2(t)-2h\mu_2(t)+2\mu_3(t)\big)+$$
$$+b(t)\big(h\nu_2(t)-\mu_2(t)+\mu_1(t)\big)+c(t)\big(\nu_2(t)-\nu_1 t)\big)+\int\limits_0^h f(x,t)\,dx. \tag{7}$$

Для того щоб використати функцію Ґріна для зображення розв'язку прямої задачі, подамо рівняння (1) у вигляді

$$u_t(x,t)=\big(a(t)y^2+b(t)y+c(t)\big)u_{xx}(x,t)+$$
$$+(x-y)\big((x+y)a(t)+b(t)\big)u_{xx}(x,t)+f(x,t), \tag{8}$$

де y – деяка фіксована точка з проміжку $[0,h]$.

Функція Ґріна другої крайової задачі для рівняння теплопровідності

$$u_t(x,t)=\big(a(t)y^2+b(t)y+c(t)\big)u_{xx}(x,t)$$

має вигляд

$$G_2^y(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Q(y,t,\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)}\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)}\right)\right), \tag{9}$$

де

$$Q(y,t,\tau)=y^2\int\limits_\tau^t a(\sigma)\,d\sigma+y\int\limits_\tau^t b(\sigma)\,d\sigma+\int\limits_\tau^t c(\sigma)\,d\sigma. \tag{10}$$

Для знаходження розв'язку прямої задачі (8), (2), (3) запишемо інтегро-диференціальне рівняння

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h(\xi-y)\big((\xi+y)a(\tau)+b(\tau)\big)u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_2^y(x,t,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{11}$$

де

$$u_0(x,t)=\int\limits_0^h\varphi(\xi)G_2^y(x,t,\xi,0)\,d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^h f(\xi,\tau)G_2^y(x,t,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\nu_1(\tau)\big(a(\tau)y^2+b(\tau)y+c(\tau)\big)G_2^y(x,t,0,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t \nu_2(\tau)\big(a(\tau)y^2+b(\tau)y+c(\tau)\big)G_2^y(x,t,h,\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

Продиференціювавши (11) двічі за x і поклавши $y=x$, отримаємо

$$u_{xx}(x,t)=u_{0xx}(x,t)+\int_0^t\int_0^h(\xi-x)\big((\xi+x)a(\tau)+b(\tau)\big)\times$$

$$\times\, u_{\xi\xi}(\xi,\tau)\big(G_{2\xi\xi}^y(x,t,\xi,\tau)\big)\Big|_{y=x}\,d\xi\,d\tau, \tag{13}$$

де похідна $u_{0xx}(x,t)$ має такий вигляд:

$$u_{0xx}(x,t)=\int_0^h\varphi''(\xi)G_2^x(x,t,\xi,0)\,d\xi+\int_0^t\int_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_{2\xi}^x(x,t,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\nu_1'(\tau)G_2^x(x,t,0,\tau)\,d\tau+\int_0^t\nu_2'(\tau)G_2^x(x,t,h,\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

Співвідношення (14) отримуємо, використовуючи формулу інтегрування частинами, властивості функції Ґріна та умови узгодження (умови (***iii***) теореми).

Позначимо $u_{xx}(x,t)\equiv w(x,t)$. Поклавши в (11) $y=x$, зведемо задачу (1)–(3) знаходження функції $u(x,t)$ до розв'язування системи рівнянь (11), (13) стосовно $u(x,t)$, $w(x,t)$.

Якщо виконуються умови теореми, то можна показати, що $a(t)>0$ на деякому проміжку $[0,t_1]$, а рівності (5)–(7) на цьому проміжку зводяться до такого вигляду:

$$c(t)=\frac{\mu_1'(t)-f(0,t)}{w(0,t)}, \tag{15}$$

$$a(t)=\frac{1}{h\mu_2(t)+h\mu_1(t)-2\mu_3(t)}\Bigg[\int_0^h f(x,t)\,dx-\mu_3'(t)+$$

$$+\frac{\mu_2'(t)-f(h,t)}{w(h,t)}\nu_2(t)-\frac{\mu_1'(t)-f(0,t)}{w(0,t)}\left(\nu_1(t)+\frac{\mu_1(t)-\mu_2(t)}{h}\right)+$$

$$+\big(\mu_1(t)-\mu_2(t)\big)\frac{\mu_2'(t)-f(h,t)}{w(h,t)h}\Bigg], \tag{16}$$

$$b(t)=\frac{1}{h\nu_2(t)-\mu_2(t)+\mu_1(t)}\Bigg(\mu_3'(t)-\int_0^h f(x,t)\,dx-a(t)\big(h^2\nu_2(t)-$$

$$-2h\mu_2(t)+2\mu_3(t)\big)-c(t)\big(\nu_2(t)-\nu_1(t)\big)\Bigg). \tag{17}$$

З (13) оцінимо $w(x,t)$ знизу, використовуючи умови (***ii***) теореми. При досить малому t_1, $0<t_1\le T$, інтеграли від 0 до t_1 прямуватимуть до нуля. Тобто можна вибрати таке t_1 з проміжку $[0,T]$, що буде виконуватись нерівність

$$\frac{1}{2}\int_0^h\varphi''(\xi)G_2^x(x,t,\xi,0)\,d\xi+\int_0^t\int_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_{2\xi}^x(x,t,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau-$$

$$-\int_0^t \nu_1'(\tau) G_2^x(x,t,0,\tau)\,d\tau + \int_0^t \nu_2'(\tau) G_2^x(x,t,h,\tau)\,d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_0^h (\xi - y)\big((\xi + y)a(\tau) + b(\tau)\big)\, u_{\xi\xi}(\xi,\tau) G_2^y(x,t,\xi,\tau)\Big|_{y=x}\, d\xi\, d\tau \geq 0\,,$$

$$t \in [0,t_1], \quad x \in [0,h].$$

Тоді отримуємо, що

$$w(x,t) \geq \frac{1}{2}\int_0^h \varphi''(\xi) G_2^x(x,t,\xi,0)\,d\xi \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\min_{[0,h]} \varphi''(x) = C_1 > 0, \qquad t \in [0,t_1], \qquad x \in [0,h]. \tag{18}$$

Враховуючи умови (***ii***) теореми та рівності (15)–(17), маємо, що $a(t) > 0$, $c(t) > 0$, $t \in [0,t_1]$.

Дослідимо систему рівнянь (11), (13), (15)–(17), застосовуючи теорему Шаудера. Спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків цієї системи.

Встановимо оцінки зверху для $a(t), b(t), c(t)$. Спираючись на (18), зі співвідношень (15)–(17) маємо

$$c(t) \leq \frac{\max\limits_{[0,T]}\big(\mu_1'(t) - f(0,t)\big)}{C_1} \equiv C_2\,, \tag{19}$$

$$a(t) \leq \frac{1}{\max\limits_{[0,T]}\big(h\mu_2(t) + h\mu_1(t) - 2\mu_3(t)\big)}\Bigg[\max_{[0,T]}\left(\int_0^h f(x,t)\,dx - \mu_3'(t)\right) +$$

$$+\frac{\max\limits_{[0,T]}\big(\mu_2'(t) - f(h,t)\big)}{C_1}\max_{[0,T]}\nu_2(t) + C_2\max_{[0,T]}\left(\nu_1(t) + \frac{\mu_1(t) - \mu_2(t)}{h}\right) +$$

$$+\max_{[0,T]}\big(\mu_1(t) - \mu_2(t)\big)\frac{\max\limits_{[0,T]}\big(\mu_2'(t) - f(h,t)\big)}{C_1 h}\Bigg] \equiv A_1\,, \tag{20}$$

$$|b(t)| \leq \frac{1}{\min\limits_{[0,T]}\big(h\nu_2(t) - \mu_2(t) + \mu_1(t)\big)}\left(\max_{[0,T]}\left|\mu_3'(t) - \int_0^h f(x,t)dx\right|\right) \equiv B_1\,. \tag{21}$$

Використовуючи явний вигляд функції Ґріна, з (14) аналогічно, як у [6], отримаємо

$$u_{0xx}(x,t) \leq C_3 + C_4 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{Q(x,t,\tau)}}\,. \tag{22}$$

Для оцінки $w(x,t)$ необхідно оцінити інтеграл

$$I = \int_0^t \int_0^h (\xi - x)\big((x + \xi)a(\tau) + b(\tau)\big) u_{\xi\xi}(\xi,\tau)\, G_{2xx}^y(x,t,\xi,\tau)\Big|_{y=x}\, d\xi\, d\tau\,. \tag{23}$$

Обчислимо другу похідну від функції Ґріна $G_2^y(x,t,\xi,\tau)$:

$$G_{2xx}^y(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,Q^{3/2}(y,t,\tau)} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{(x-\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)} \right) \exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{(x+\xi+2nh)^2}{2Q(y,t,\tau)} \right) \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)} \right) \right]. \tag{24}$$

Позначаючи

$$U(t) = \max_{x\in[0,h]} |w(x,t)| \tag{25}$$

і враховуючи результати, отримані в [6], отримаємо, що

$$I \le C_5 \int_0^t U(\tau)\,d\tau + C_6 \int_0^t \frac{U(\tau)}{\sqrt{Q(x,t,\tau)}}\,d\tau .$$

Тоді, використовуючи (22), можемо записати

$$U(t) \le C_3 + C_4 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{Q(x,t,\tau)}}\,d\tau + C_5 \int_0^t U(\tau)\,d\tau + C_6 \int_0^t \frac{U(\tau)}{\sqrt{Q(x,t,\tau)}}\,d\tau . \tag{26}$$

Враховуючи (15), матимемо, що

$$1 = \frac{c(t)w(0,t)}{\mu_1'(t) - f(0,t)} \le \frac{c(t)U(t)}{\min\limits_{[0,T]} (\mu_1'(t) - f(0,t))} = \frac{c(t)U(t)}{C_7} .$$

Оскільки $Q(x,t,\tau)$ – квадратний тричлен з інтегральними коефіцієнтами, який на відрізку $[0,h]$ досягає мінімального значення на його правому кінці (це випливає з умови (***iii***) теореми), то, позначаючи

$$q(t,\tau) = Q(h,t,\tau) ,$$

з (26) отримаємо

$$U(t) \le C_3 + C_4 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{q(t,\tau)}}\,d\tau + C_5 \int_0^t \frac{U(\tau)\sqrt{q(t,\tau)}}{\sqrt{q(t,\tau)}}\,d\tau + C_6 \int_0^t \frac{U(\tau)}{\sqrt{q(t,\tau)}}\,d\tau \le$$

$$\le C_3 + \frac{C_4}{C_7} \int_0^t \frac{c(\tau)U(\tau)}{\sqrt{q(t,\tau)}}\,d\tau + C_5 \int_0^t \frac{\sqrt{C_2 T}U(\tau)}{\sqrt{q(t,\tau)}}\,d\tau + C_6 \int_0^t \frac{U(\tau)}{\sqrt{q(t,\tau)}}\,d\tau \le$$

$$\le C_3 + C_8 \int_0^t \frac{U(\tau)}{\sqrt{q(t,\tau)}}\,d\tau + C_9 \int_0^t \frac{U^2(\tau)}{\sqrt{q(t,\tau)}}\,d\tau .$$

Тоді

$$U(t) + \frac{1}{2} \le C_3 + \frac{1}{2} + C_{10} \int_0^t \frac{\left(U(\tau) + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{q(t,\tau)}}\,d\tau . \tag{27}$$

Нерівність, аналогічна (27), досліджена в [2], звідки отримуємо оцінку

$$U(t) \le C_{11} < \infty, \qquad (x,t) \in [0,h] \times [0,t_0] , \tag{28}$$

де $t_0 \in [0,t_1]$ і визначається вихідними даними задачі.

Використовуючи (28), встановимо оцінки функцій $a(t)$, $c(t)$ знизу:

$$c(t) \ge \frac{\min\limits_{[0,T]} (\mu_1'(t) - f(0,t))}{C_{12}} \equiv C_0, \qquad t \in [0,t_0] , \tag{29}$$

$$a(t) \ge \frac{1}{\max\limits_{[0,t_2]} (h\mu_2(t) + h\mu_1(t) - 2\mu_3(t))} \left[\min_{[0,t_2]} \left(\mu_3'(t) - \int_0^h f(x,t)\,dx \right) + \right.$$

$$+\frac{\min\limits_{[0,t_2]}\left(\mu_2'(t)-f(h,t)\right)}{C_{12}}\max\limits_{[0,t_2]}\nu_2(t)-C_2\min\limits_{[0,t_2]}\left(\nu_1(t)+\frac{\mu_1(t)-\mu_2(t)}{h}\right)+$$

$$\left.+\min\limits_{[0,t_2]}\left(\mu_1(t)-\mu_2(t)\right)\frac{\min\limits_{[0,t_2]}\left(\mu_2'(t)-f(h,t)\right)}{C_{12}h}\right]\equiv A_0>0,\quad t\in[0,t_0]. \tag{30}$$

Тоді з (11) випливає оцінка

$$|u(x,t)|\le C_{13}<\infty,\qquad (x,t)\in\bar{Q}_T. \tag{31}$$

Розглянемо множину

$$N=\{\left(a(t),b(t),c(t),u(x,t),w(x,t)\right)\in C[0,t_0]\times C[0,t_0]\times C(\bar{Q}_{t_0})\times C(\bar{Q}_{t_0}):$$

$$A_0\le a(t)\le A_1,\quad |b(t)|\le B_1,\quad C_0\le c(t)\le C_2,$$

$$|u(x,t)|\le C_{13},\qquad |w(x,t)|\le C_{12}\}.$$

Запишемо систему (11), (13), (15)–(17) у такому вигляді:

$$a(t)=P_1(a,\,b,\,c,\,u,\,w)(t),$$

$$b(t)=P_2(a,\,b,\,c,\,u,\,w)(t),$$

$$c(t)=P_3(a,\,b,\,c,\,u,\,w)(t),$$

$$u(x,t)=P_4(a,\,b,\,c,\,u,\,w)(x,t),$$

$$w(x,t)=P_5(a,\,b,\,c,\,u,\,w)(x,t).$$

Із оцінок (18)–(21) та (32)–(34) випливає, що оператор $P=(P_1,\,P_2,\,P_3,\,P_4,\,P_5)$ переводить множину N в себе, і N задовольняє умови теореми Шаудера.

За міркуваннями, що проводились в працях [1, 4], можна показати, що оператори P_i є цілком неперервними. Тоді за теоремою Шаудера розв'язок системи (11), (13), (15)–(17) існує. Із умов теореми 1 випливає, що $a(t), b(t)$, $c(t)\in H^{\gamma/2}[0,t_0]$, $w(x,t)\in H^{\gamma,\gamma/2}(\bar{Q}_{t_0})$, тоді $u(x,t)\in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\bar{Q}_{t_0})$. Теорему доведено. ◊

Встановимо єдиність розв'язку задачі (1)–(4).

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються умови*:

(***i***) $\mu_1,\mu_2\in C^1[0,T]$;

(***ii***) $\mu_1'(t)-f(0,t)\ne 0$, $\mu_2'(t)-f(h,t)\ne 0$, $h\mu_2(t)+h\mu_1(t)-2\mu_3(t)\ne 0$, $t\in[0,T]$.

Тоді розв'язок задачі (1)–(4) *єдиний при* $x\in[0,h]$, $t\in[0,T]$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\left(a_i(t), b_i(t), c_i(t), u_i(x,t)\right)$, $i=1,2$, – два розв'язки задачі (1)–(4). Для їх різниці

$$\nu(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t),\qquad \ell(t)=a_1(t)-a_2(t),$$

$$m(t)=b_1(t)-b_2(t),\qquad n(t)=c_1(t)-c_2(t)$$

отримуємо задачу

$$\nu_t(x,t)=\left(a_1(t)x^2+b_1(t)x+c_1(t)\right)\nu_{xx}(x,t)+$$

$$+u_2(x,t)\left(\ell(t)x^2+m(t)x+n(t)\right),\qquad (x,t)\in Q_T, \tag{32}$$

$$\nu(x,0)=0,\qquad x\in[0,h], \tag{33}$$

$$\nu_x(0,t) = \nu_x(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{34}$$

$$\nu(0,t) = \nu(h,t) = 0, \qquad \int_0^h \nu(x,t)\,dx = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{35}$$

Позначимо через $G(x,t,\xi,\tau)$ функцію Ґріна задачі (32)–(34). Подамо розв'язок у вигляді

$$\nu(x,t) = \int_0^t \int_0^h \big(\ell(\tau)\xi^2 + m(\tau)\xi + c(\tau)\big)u_{2\xi\xi} G(x,t,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{36}$$

Покладемо в рівнянні (32) спочатку $x = 0$, потім $x = h$. Враховуючи умови (34), (35), отримаємо

$$n(t)u_{2xx}(0,t) =$$

$$= -c_1(t)\int_0^t \int_0^h \big(\ell(\tau)\xi^2 + m(\tau)\xi + c(\tau)\xi\big)u_{2\xi\xi}(0,t)G_{xx}(0,t,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{37}$$

$$\big(\ell(t)h^2 + m(t)h + n(t)\big)u_{2xx}(h,t) = -\big(a_1(t)h^2 + b_1(t)h +$$

$$+ c_1(t)\big)\int_0^t \int_0^h \big(\ell(\tau)\xi^2 + m(\tau)\xi + c(\tau)\big)u_{2\xi\xi}(h,t)G_{xx}(h,t,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{38}$$

Проінтегруємо (32) за x від 0 до h і скористаємось (35):

$$\ell(t)\left(h^2 u_{2x}(h,t) - 2hu_2(h,t) + 2\int_0^h u_2(x,t)\,dx\right) +$$

$$+ m(t)\big(hu_{2x}(h,t) - u_2(h,t) + u_2(0,t)\big) = 0. \tag{39}$$

Враховуючи, що $u_2(x,t)$ є розв'язком задачі (1)–(4), обчислимо визначник системи (37)–(39):

$$u_{2xx}(h,t)u_{2xx}(0,t)\Bigg[h^2\big(hu_{2x}(h,t) - u_2(h,t) + u_2(0,t)\big) -$$

$$-h\left(h^2 u_{2x}(h,t) - 2hu_2(h,t) + \int_0^h u_2(x,t)dx\right)\Bigg] =$$

$$= \frac{h\big(\mu_2'(t) - f(h,t)\big)\big(\mu_1'(t) - f(0,t)\big)}{c_2(t)\big(a_2(t)h^2 + b_2(t)h + c_2(t)\big)} \times$$

$$\times \big(h\mu_2(t) + h\mu_1(t) - 2\mu_3(t)\big) \neq 0, \qquad t \in [0,T].$$

З умови (***ii***) теореми 2 випливає, що знайдений визначник відмінний від нуля, тому (37)–(39) можна звести до системи однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду

$$\ell(t) = \int_0^t \big(R_{11}(t,\tau)\ell(\tau) + R_{12}(t,\tau)m(\tau) + R_{13}(t,\tau)n(\tau)\big)\,d\tau,$$

$$m(t) = \int_0^t \big(R_{21}(t,\tau)\ell(\tau) + R_{22}(t,\tau)m(\tau) + R_{23}(t,\tau)n(\tau)\big)\,d\tau,$$

$$n(t) = \int_0^t \big(R_{31}(t,\tau)\ell(\tau) + R_{32}(t,\tau)m(\tau) + R_{33}(t,\tau)n(\tau)\big)\,d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{40}$$

де R_{ij}, $i,j=1,2,3$, – ядра з інтегровними особливостями. Отже, розв'язок $(\ell(t), m(t), n(t))$ системи (40) – тривіальний [5]. Тоді $v(x,t)=0$.

Теорему доведено. ◊

1. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 3. – С. 539–550.
2. *Иванчов Н. И., Пабыривска Н. В.* Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 2002. – **43**, № 2. – С. 406–413.
3. *Іванчов М. І.* Обернена задача одночасного визначення двох коефіцієнтів параболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 329–336.
4. *Іванчов М. І., Пабирівська Н. В.* Одночасне визначення двох невідомих параметрів у старшому коефіцієнті параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 48–59.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1984. – 752 с.
6. *Пабирівська Н. В.* Визначення двох невідомих коефіцієнтів в обернених задачах для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 108–117.
7. *Jones B. F.* Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – **16**. – P. 33–44.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ**

Установлены условия существования решения обратной задачи определения старшего коэффициента в виде квадратической по пространственной переменной функции с тремя неизвестными параметрами, зависящими от времени. Отдельно определены условия единственности решения этой задачи.

**DETERMINATION OF LEADING COEFFICIENT
IN PARABOLIC EQUATION**

Application of Schauder fixed-point theorem permitted to establish the existence conditions of the solution for inverse problem for parabolic equation for determination of leading coefficient in the form of quadratic function of the space variable with three unknown parameters depending on the time variable. The conditions of existence and uniqueness for solution of this problem are established separately.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
07.07.05