УДК 539.3

О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний

ПРО ВПЛИВ ДОМІШОК НА ЧАСТОТИ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ШАРУ

З використанням моделі локально градієнтного двокомпонентного твердого розчину досліджено вплив домішок на частоти власних коливань шару за різних граничних умов на його поверхнях.

Реальні елементи конструкцій та приладів перебувають у навколишньому середовищі, частинки якого з часом проникають в них, змінюючи при цьому експлуатаційні властивості. Тому важливого значення набувають питання математичного моделювання та дослідження впливу домішок на закономірності перебігу процесів різної фізичної природи. У даній роботі запропоновано методику дослідження хвильових процесів у багатокомпонентних локально неоднорідних твердих тілах та вивчено вплив домішок на частоти власних коливань пружного двокомпонентного шару.

Об'єктом дослідження є деформівний твердий розчин, який складається з підсистем скелету та домішок. За визначальні приймаємо процеси деформування та масопереносу. Дослідження цих процесів будемо проводити на основі моделі локально градієнтної механодифузії, яка описує ефекти приповерхневої неоднорідності за об'ємного підходу [2, 5].

Якщо за розв'язувальні функції вибрати вектор переміщення $\vec{u}$, збурення хімічних потенціалів підсистем скелету η_1 та домішок η_2, то ключова система рівнянь локально градієнтної механодифузії буде мати вигляд [3, 5, 8]

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) + (3\lambda+2\mu)\left(\alpha_m^1\vec{\nabla}\eta_1 + \alpha_m^2\vec{\nabla}\eta_2\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\left[\rho_* - (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \alpha_{mm}^1\eta_1 - \alpha_{mm}^2\eta_2\right]\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\nabla^2\eta_1 - \kappa_1\eta_1 - \kappa_2\eta_2 - \kappa_u\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[d_1\eta_1 + d_2\eta_2 + d_u\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right] = a\nabla^2\eta_1 + \nabla^2\eta_2. \qquad (1)$$

Тут τ — час; ρ_* — густина континууму центрів мас у початковий момент часу; $\vec{\nabla}$ — вектор–оператор Гамільтона; a, λ, μ, α_m, α_m^k, α_{mm}^k, κ_k, κ_u, d_k, d_u ($k = 1, 2$) — сталі величини. Зазначимо, що перше з рівняннь цієї системи є рівнянням руху, а два наступних відповідають рівнянням збереження маси підсистем твердого розчину.

Система рівнянь (1) є нелінійною за рахунок нелінійності імпульсу механічного поступального руху. Відомо [1, 6], що у тілах, які перебувають під дією періодичного навантаження і поведінка яких описується нелінійною системою рівнянь, існують коливні та повільно змінні на періоді коливань складові полів. Тому при дослідженні хвильових процесів розв'язок $\varphi = \{\vec{u},\ \eta_1, \eta_2\}$ системи рівнянь (1) природно подати у вигляді суми повільно змінної з часом $\bar{\varphi} = \left\{\bar{\vec{u}},\ \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\right\}$ та коливної $\tilde{\varphi} = \left\{\tilde{\vec{u}},\ \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2\right\}$ складових. Таке подання, зазвичай, проводять на основі операції осереднення [1, 4, 6] на періоді коливань τ_0 :

$$\bar{\varphi}\,(\vec{r},\ \tau) = \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_0}\varphi\,(\vec{r},\ t)\,dt,$$

де $\vec{r}$ — радіус–вектор довільної точки тіла, а

$$\tilde{\varphi}\,(\vec{r},\ t) = \varphi\,(\vec{r},\ t) - \bar{\varphi}\,(\vec{r},\ \tau)\,. \tag{2}$$

Приймемо також наближення, що звичайно використовуються при вивченні нелінійних коливань [7]

$$\overline{\frac{\partial^n f}{\partial \tau^n}} \approx \frac{\partial^n \overline{f}}{\partial \tau^n}, \quad \overline{\overline{f}\,\overline{\varphi}} \approx \overline{f}\,\overline{\varphi}, \quad \overline{\overline{f}\,\tilde{\varphi}} \approx 0, \quad \overline{\tilde{\varphi}} \approx 0. \tag{3}$$

Якщо знехтувати осередненою складовою сили інерції, то для осереднених складових $\overline{\vec{u}}$, $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_2$ із системи рівнянь (1) отримуємо

$$\mu \nabla^2 \overline{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\left(\alpha_m^1 \vec{\nabla}\overline{\eta}_1 + \alpha_m^2 \vec{\nabla}\overline{\eta}_2\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\nabla^2\overline{\eta}_1 - \kappa_1\overline{\eta}_1 - \kappa_2\overline{\eta}_2 - \kappa_u \vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[d_1\overline{\eta}_1 + d_2\overline{\eta}_2 + d_u\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right] = a\nabla^2\overline{\eta}_1 + \nabla^2\overline{\eta}_2. \tag{4}$$

Тоді для коливних складових розв'язку $\tilde{\vec{u}}$, $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$ на основі співвідношень (1)–(4) одержуємо таку нелінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\mu \nabla^2 \tilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\left(\alpha_m^1 \vec{\nabla}\tilde{\eta}_1 + \alpha_m^2 \vec{\nabla}\tilde{\eta}_2\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\left[\rho_* + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} + \alpha_{mm}^1\overline{\eta}_1 + \alpha_{mm}^2\overline{\eta}_2\right]\frac{\partial\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau}\right\} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\widetilde{\left[(3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}} - \alpha_{mm}^1\tilde{\eta}_1 - \alpha_{mm}^2\tilde{\eta}_2\right]\frac{\partial\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau}}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\nabla^2\tilde{\eta}_1 - \kappa_1\tilde{\eta}_1 - \kappa_2\tilde{\eta}_2 - \kappa_u \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[d_1\tilde{\eta}_1 + d_2\tilde{\eta}_2 + d_u\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right] = a\nabla^2\tilde{\eta}_1 + \nabla^2\tilde{\eta}_2. \tag{5}$$

Обмежимось надалі дослідженням хвиль основної гармоніки, а при розгляді осередненої складової розв'язку — усталеним режимом. При цьому за відліковий приймемо стан необмеженого середовища, у якому деформація та збурення хімічних потенціалів відсутні. За таких припущень системи рівнянь (4) та (5) набувають вигляду

$$\mu \nabla^2 \overline{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\left(\alpha_m^1 \vec{\nabla}\overline{\eta}_1 + \alpha_m^2 \vec{\nabla}\overline{\eta}_2\right) = 0,$$

$$\nabla^2\overline{\eta}_1 - \kappa_1\overline{\eta}_1 - \kappa_2\overline{\eta}_2 - \kappa_u \vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} = 0,$$

$$a\nabla^2\overline{\eta}_1 + \nabla^2\overline{\eta}_2 = 0; \tag{6}$$

$$\mu \nabla^2 \tilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\left(\alpha_m^1 \vec{\nabla}\tilde{\eta}_1 + \alpha_m^2 \vec{\nabla}\tilde{\eta}_2\right) =$$

$$= \left[\rho_* + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} + \alpha_{mm}^1\overline{\eta}_1 + \alpha_{mm}^2\overline{\eta}_2\right]\frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2},$$

$$\nabla^2\tilde{\eta}_1 - \kappa_1\tilde{\eta}_1 - \kappa_2\tilde{\eta}_2 - \kappa_u \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}} = 0,$$

$$a\nabla^2\tilde{\eta}_1 + \nabla^2\tilde{\eta}_2 = d_1\frac{\partial\tilde{\eta}_1}{\partial\tau} + d_2\frac{\partial\tilde{\eta}_2}{\partial\tau} + d_u\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right). \tag{7}$$

Методика вивчення хвильових процесів полягає у послідовному визначенні осереднених складових $\overline{\vec{u}}$, $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_2$ на основі системи (6), при наступному вивченні коливних складових $\tilde{\vec{u}}$, $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$ шуканого розв'язку з системи рівнянь зі змінними коефіцієнтами (7).

Застосуємо отримані співвідношення для дослідження впливу домішок на власні частоти коливань деформівного шару, який у декартовій системі координат (x, y, z) займає область $|x| \leq l$. Для одновимірного за просторовою координатою x випадку, коли

$$\vec{u} = (u(x,\tau),\, 0,\, 0)\,, \qquad \eta_k = \eta_k(x,\,\tau), \quad k = 1,\, 2,$$

системи (6) та (7) набудуть вигляду

$$(\lambda + 2\mu)\,\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + (3\lambda + 2\mu)\left(\alpha_m^1 \frac{d\overline{\eta}_1}{dx} + \alpha_m^2 \frac{d\overline{\eta}_2}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{d\overline{\eta}_1}{dx} - \kappa_1 \overline{\eta}_1 - \kappa_2 \overline{\eta}_2 - \kappa_u \frac{d\bar{u}}{dx} = 0,$$

$$a\frac{d^2\overline{\eta}_1}{dx^2} + \frac{d^2\overline{\eta}_2}{dx^2} = 0; \tag{8}$$

$$(\lambda + 2\mu)\,\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} + (3\lambda + 2\mu)\left(\alpha_m^1 \frac{\partial\tilde{\eta}_1}{\partial x} + \alpha_m^2 \frac{\partial\tilde{\eta}_2}{\partial x}\right) =$$

$$= \left[\rho_* + (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_m \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \alpha_{mm}^1 \overline{\eta}_1 + \alpha_{mm}^2 \overline{\eta}_2\right] \frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\eta}_1}{\partial x^2} - \kappa_1 \tilde{\eta}_1 - \kappa_2 \tilde{\eta}_2 - \kappa_u \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = 0,$$

$$a\frac{\partial^2\tilde{\eta}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{\eta}_2}{\partial x^2} = d_1 \frac{\partial\tilde{\eta}_1}{\partial\tau} + d_2 \frac{\partial\tilde{\eta}_2}{\partial\tau} + d_u \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right). \tag{9}$$

Зазначимо, що система рівнянь (8) описує стаціонарний стан насиченого домішками деформівного твердого шару з урахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності [3, 5].

Приймемо, що можна незалежно реалізувати крайові умови для коливних та осереднених складових полів. Вважаємо, що бічні поверхні шару вільні від сталого за часом силового навантаження і на них задано постійні значення хімічних потенціалів твердого розчину, тобто

$$(\lambda + 2\mu)\frac{d\bar{u}}{dx} + (3\lambda + 2\mu)\left(\alpha_m^1 \bar{\eta}_1 + \alpha_m^2 \bar{\eta}_2\right) = 0,$$

$$\bar{\eta}_1 = \eta_{1a}, \quad \bar{\eta}_2 = \eta_{2a} \quad \text{при} \quad x = \pm l. \tag{10}$$

Розв'язок крайової задачі (8), (10) з урахуванням умови його симетричності відносно серединної поверхні шару має вигляд [3]

$$\bar{u} = (aA_2 - A_1)\left\{\left[\eta_{1a} + \frac{\kappa_2}{\xi^2}\,(\eta_{2a} + a\eta_{1a})\right]\frac{\mathrm{sh}(\xi\, x)}{\xi\,\mathrm{ch}(\xi\, l)} - \frac{\kappa_2}{\xi^2}\,(\eta_{2a} + a\eta_{1a})\, x\right\},$$

$$\bar{\eta}_1 = \eta_{1a} + \left[\eta_{1a} + \frac{\kappa_2}{\xi^2}\,(\eta_{2a} + a\eta_{1a})\right]\left[\frac{\mathrm{ch}(\xi\, x)}{\mathrm{ch}(\xi\, l)} - 1\right],$$

$$\bar{\eta}_2 = \eta_{2a} - a\left[\eta_{1a} + \frac{\kappa_2}{\xi^2}\,(\eta_{2a} + a\eta_{1a})\right]\left[\frac{\mathrm{ch}(\xi\, x)}{\mathrm{ch}(\xi\, l)} - 1\right]. \tag{11}$$

Тут $A_k = \alpha_m^k \dfrac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}$ $(k = 1,\, 2)$, $\xi = \sqrt{\kappa_1 - a\kappa_2 - \kappa_u(A_1 - aA_2)}$.

Надалі знехтуємо зв'язаністю коливних складових розглядуваних полів. Для усталених коливань складову $\tilde{u}$ вектора переміщення подамо у вигляді $\tilde{u}(x,\tau) = u(x)\exp(\, i\,\omega\tau)$. Тоді для визначення амплітуди $u(x)$ на основі (9), (11) отримуємо рівняння

$$\frac{d^2u(x)}{d\,x^2} + \zeta^2\left(1 + q\frac{\operatorname{ch}(\xi\, x)}{\operatorname{ch}(\xi\, l)}\right)\, u(x) = 0, \tag{12}$$

де

$$\zeta^2 = \frac{\omega^2}{\lambda + 2\mu}[\rho_* - (\eta_{2a} + a\eta_{1a})\gamma],$$

$$\gamma = \frac{\kappa_2}{\xi^2}\left[(3\lambda + 2\mu)(A_1 - aA_2)\alpha_m - \alpha^1_{mm}\right] + \frac{\xi_u^2}{\xi^2}\alpha^2_{mm},$$

$$q = \frac{\gamma - \alpha^2_{mm}}{\rho_* - \gamma\,(\eta_{2a} + a\eta_{1a})}\left[\frac{\xi_u^2}{\kappa_2}\eta_{1a} + \eta_{2a}\right], \quad \xi_u^2 = \xi^2 + a\kappa_2.$$

Розв'язок рівняння (12) подамо у вигляді розвинення за малим параметром $\alpha = q/\operatorname{ch}(\xi\, l) << 1$. Обмежимось при цьому першим наближенням $u(x) = u_0(x) + \alpha u_1(x)$. Тоді для визначення $u_0(x)$ та $u_1(x)$ дістаємо такі рівняння:

$$\frac{d^2u_0(x)}{d\,x^2} + \zeta^2 u_0(x) = 0,$$

$$\frac{d^2u_1(x)}{d\,x^2} + \zeta^2 u_1(x) + \zeta^2\operatorname{ch}(\xi\, x)\, u_0(x) = 0. \tag{13}$$

Розв'язком системи рівнянь (13) буде

$$u_0(x) = K_0\cos(\zeta\, x) + L_0\sin(\zeta\, x),$$

$$\begin{aligned} u_1(x) = K_1\cos(\zeta\, x) + L_1\sin(\zeta\, x) + K_0\zeta\,[V_1(x)\cos(\zeta\, x) + V_2\sin(\zeta\, x)] + \\ + L_0\zeta\,[V_3(x)\cos(\zeta\, x) - V_1\sin(\zeta\, x)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Тут

$$V_1(x) = -\frac{1}{\xi^2 + 4\zeta^2}\left[\zeta\ \operatorname{ch}(\xi\, x)\ \cos(2\zeta\, x) + \frac{\xi}{2}\operatorname{sh}(\xi\, x)\sin(2\zeta\, x)\right],$$

$$V_2(x) = -\frac{1}{2\xi}\operatorname{sh}(\xi\, x) - \frac{1}{\xi^2 + 4\zeta^2}\left[\zeta\ \operatorname{ch}(\xi\, x)\ \sin(2\zeta\, x) + \frac{\xi}{2}\operatorname{sh}(\xi\, x)\cos(2\zeta\, x)\right],$$

$$V_3(x) = \frac{1}{2\xi}\operatorname{sh}(\xi\, x) - \frac{1}{\xi^2 + 4\zeta^2}\left[\zeta\ \operatorname{ch}(\xi\, x)\ \sin(2\zeta\, x) + \frac{\xi}{2}\operatorname{sh}(\xi\, x)\cos(2\zeta\, x)\right].$$

Використовуючи формули (14) для $u(x)$, отримуємо

$$\begin{aligned} u(x) = K\{\cos(\,\zeta\, x) + q\zeta\,[V_1(x)\cos(\,\zeta\, x) + V_2(x)\sin(\zeta\, x)]\} + \\ + L\{\sin(\,\zeta\, x) + q\zeta\,[V_3(x)\cos(\,\zeta\, x) - V_1(x)\sin(\zeta\, x)]\}, \end{aligned} \tag{15}$$

де $K = K_0 + \alpha K_1$, $L = L_0 + \alpha L_1$ — довільні константи.

Випадок I. Коливна складова переміщень $u(x)$ на зовнішніх поверхнях шару $x = \pm l$ дорівнює нулеві, тобто

$$u(-l) = 0, \;\; u(l) = 0. \tag{16}$$

На основі співвідношень (15), (16) одержуємо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження сталих L та K. Її нетривіальний розв'язок існує, якщо визначник цієї системи рівнянь дорівнює нулеві. У результаті для лінійного за α наближення отримуємо

$$\left(1-\frac{2\alpha\zeta^2}{\xi^2+4\zeta^2}\operatorname{ch}(\xi\, l)\right)\sin(2\zeta\, l)+\frac{4\alpha\zeta^3}{\xi\,(\xi^2+4\zeta^2)}\operatorname{sh}(\xi\, l)\cos(2\zeta\, l)=0. \tag{17}$$

Надалі обмежимось розглядом товстих порівняно з областю приповерхневої неоднорідності шарів, для яких $\xi\, l >> 1$. Тоді хвильове рівняння (17) набуває вигляду

$$\left(1-\frac{2q\zeta^2}{\xi^2+4\zeta^2}\right)\sin(2\zeta\, l)+\frac{4q\zeta^3}{\xi\,(\xi^2+4\zeta^2)}\cos(2\zeta\, l)=0. \tag{18}$$

Обмежимось також розглядом хвильових чисел, для яких $|\zeta/\zeta_0-1| <<$ $<< 1$, де ζ_0 є хвильовим числом для бездомішкового шару товщини $2\, l$ при нехтуванні ефектами приповерхневої неоднорідності. Враховуючи, що ζ_0 є розв'язком рівняння $\sin(2\zeta_0 l)=0$, для ζ отримуємо

$$\zeta^{(n)}=\zeta_0\left(1-\frac{q(\pi n)^2}{2\,(\xi\, l)^2+(\pi n)^2\,(3q+\xi l(2-q))}\right),\quad n\in N.$$

Тоді для власних частот маємо співвідношення

$$\omega_1^{(n)}=\zeta_0\left(1-\frac{q(\pi n)^2}{2\,(\xi\, l)^2+(\pi n)^2\,(3q+\xi l(2-q))}\right)\times$$
$$\times\frac{c_1}{\sqrt{1-\gamma\,(\eta_{2a}+a\eta_{1a})\,/\rho_*}},\quad n\in N, \tag{19}$$

де $c_1=\sqrt{(\lambda+2\mu)\,/\rho_*}$ — швидкість поширення поздовжньої пружної хвилі в однорідному середовищі.

Випадок II. Амплітуда коливної складової переміщень $u(x)$ на поверхнях шару $x=\pm l$ задовольняє умови $u(-l)=0$, $u'(l)=0$.

У цьому випадку хвильове рівняння буде таким:

$$\cos(2\zeta\, l)-\frac{q\zeta}{\xi}\sin(2\zeta\, l)=0.$$

Відповідним рівнянням теорії пружності є $\cos(2\zeta_0 l)=0$. За прийнятого вище наближення для $\zeta^{(n)}$ та $\omega^{(n)}$ отримаємо

$$\zeta^{(n)}=\frac{\pi\,(2n+1)}{4l}\left(1-\frac{q}{2\,\xi\, l+q}\right),\quad n\in N,$$

$$\omega^{(n)}=\frac{\pi\,(2n+1)}{4l}\left(1-\frac{q}{2\,\xi\, l+q}\right)\frac{c_1}{\sqrt{1-\gamma\,(\eta_{2a}+a\eta_{1a})\,/\rho_*}},\quad n\in N. \tag{20}$$

Випадок III. Амплітуда коливної складової переміщень $u(x)$ на поверхнях шару $x=\pm l$ задовольняє умовам $u'(\pm l)=0$.

Для розглядуваного випадку ζ та ζ_0 є розв'язками таких рівнянь:

$$\left(1+\frac{2q\zeta^2}{\xi^2+4\zeta^2}\right)\sin(2\zeta\, l)+q\zeta\left[\frac{1}{\xi}+\frac{\xi}{\xi^2+4\zeta^2}\right]\cos(2\zeta\, l)=0,$$

$$\sin(2\zeta_0 l)=0.$$

За вказаних вище наближень для $\zeta^{(n)}$ знаходимо

$$\zeta^{(n)} = \zeta_0 \left(1 - \frac{q\big[2(\xi\, l)^2 + (\pi n)^2\big]}{2(\xi\, l)^2\,[\xi\, l + q] + (\pi n)^2 [\xi\, l(2+q) + 3q]} \right), \quad n \in N.$$

Тоді власні частоти коливань такого шару визначаються із формули

$$\omega^{(n)} = \frac{\pi n}{2l} \left(1 - \frac{q\left(2(\xi\, l)^2 + (\pi n)^2\right)}{2(\xi\, l)^2\ (\xi\, l + q) + (\pi n)^2\,(\xi\, l(2+q) + 3q)} \right) \times$$
$$\times \frac{c_1}{\sqrt{1 - \gamma\,(\eta_{2a} + a\eta_{1a})\,/\rho_*}}, \quad n \in N. \tag{21}$$

Зазначимо, що множник $c_1/\sqrt{1 - \gamma\,(\eta_{2a} + a\eta_{1a})\,/\rho_*}$ у співвідношеннях (19)–(21) дозволяє враховувати вплив домішок на частоти власних коливань шару за різних граничних умов на його поверхнях.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень МОН України.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1974. – 504 с.
2. *Бурак Я. Й., Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів // Доп. АН України. – 1991. – № 11. – С. 47–51.
3. *Бурак Я. И., Нагирный Т. С., Грицина О. Р., Червинка К. А.* Поверхностные напряжения в слое. Влияние температуры и примесей на прочность // Проблемы прочности. – 2000. – № 6. – С. 35–43.
4. *Гребенников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – Москва: Наука, 1986. – 256 с.
5. *Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Моделювання та дослідження квазістатичних механодифузійних процесів із врахуванням приповерхневої неоднорідності // Матеріали 4–ї укр.–польськ. конф. „Механіка середовища, методи комп'ютерних наук та моделювання", Львів. – 2004. – С. 159–174.
6. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
7. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
8. *Hrytsyna O., Nahirny T.* Mathematical Modelling and Investigation of Tanks Strength From a Material Saturated by Admixtures // Studia i materialy. Technika. Thin–walled vessels. Second Conference on thin–walled vessels (18–21, June 2001, Karlow, Poland). – 2001. – P. 49–59.

О ВЛИЯНИИ ПРИМЕСЕЙ НА ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОЯ

С использованием модели локально градиентного двухкомпонентного твердого раствора исследовано влияние примесей на частоты собственных колебаний слоя при различных граничных условиях на его поверхностях.

ON THE INFLUENCE OF ADMIXTURE ON LAYER NORMAL MODE FREQUENCIES

On the base of locally gradient binary solid solution model the influence of admixture on layer normal mode frequencies for different boundary conditions on its surface are investigated.

Центр математичного моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
08.12.04