УДК 517.95

П. Я. Пукач

ВАГОВІ КЛАСИ КОРЕКТНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Досліджено першу змішану задачу для слабко нелінійної гіперболічної системи другого порядку в необмеженій за просторовими змінними області. Розглянута система узагальнює систему нелінійних хвильових рівнянь вигляду $u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-2} u_t = f(x,t)$, $p > 2$, що вивчається в теорії пружності. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку. Вказані класи коректності розв'язку є ваговими соболевськими просторами функцій з якісною поведінкою на нескінченності.

Праця присвячена дослідженню змішаної задачі з крайовими умовами Діріхле для нелінійної гіперболічної системи другого порядку

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (A_i(x,t) u_t)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x,t) u_{x_i} + \\ + C(x,t)u + G(x,t,u_t) = F(x,t) \tag{1}$$

в необмеженій за просторовими змінними області. Рівняння і системи вигляду (1), які моделюють коливні процеси у середовищі з опором, вивчають у теорії пружності (для прикладу [4, 7, 10, 12]). Зокрема, праця [7] присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язку змішаної задачі для лінійної системи в необмеженій області, вивчено питання існування та розповсюдження резонансу. У [13] досліджено класи коректності узагальненого розв'язку змішаної задачі в обмеженій області для системи вигляду (1) за умов $A_i \equiv 0$, $B_i \equiv 0$, $i = 1, ..., n$, $C \equiv 0$ з нелінійним членом $G(x,t,u_t) = ||u_t||^{p-2} u_t$, $p > 2$. Праця [17] присвячена вивченню зростаючих розв'язків слабко нелінійних хвильових рівнянь, а в [14] досліджено систему таких рівнянь в обмеженій області.

Задачі для гіперболічних рівнянь та систем вигляду $u_{tt} - \Delta u + A(u) = f$ (A — нелінійний оператор) у необмежених областях розглядали у працях [6, 8, 9, 11, 15, 16, 18–20]. Деякі результати коректності розв'язку у цих працях отримано в припущенні певної якісної поведінки розв'язку, початкових даних та правої частини рівняння (системи) на нескінченності, інші результати — без таких припущень. У [3] вивчено змішану задачу для слабко нелінійної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. Праця [5] присвячена дослідженню першої змішаної задачі для слабко нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку $u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + |u_t|^{p-2} u_t = f(x,t), p > 2$ в необмеженій області. Розглянуто випадок зростання при $|x| \to \infty$ коефіцієнтів еліптичного оператора. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку в просторах локально інтегровних функцій.

У цій праці класи коректності розв'язку змішаної задачі є певними ваговими соболевськими просторами функцій, що описують якісну поведінку розв'язку на нескінченності. Ця поведінка залежить від правої частини системи та початкових даних задачі. Отримані результати певним чином доповнюють [5].

У області $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$, розглядаємо для системи (1) змішану задачу з початковими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \tag{2}$$

 ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. – 49, № 2. – С. 126-136.

$$u_t|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{3}$$

та крайовою умовою

$$u|_{S_T} = 0, \tag{4}$$

де $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ — бічна поверхня області Q_T. У системі (1) квадратні матриці A_{ij}, A_i, B_i ($i,j = 1,...,n$) та матриця C є дійснозначними і мають порядок $m \in \mathbb{N}$, $u = \mathrm{col}(u_1,...,u_m)$, $G = \mathrm{col}(G_1,...,G_m)$, $F = \mathrm{col}(F_1,...,F_m)$, $\varphi_0 = \mathrm{col}(\varphi_{01},...,\varphi_{0m})$, $\varphi_1 = \mathrm{col}(\varphi_{11},...,\varphi_{1m})$.

Припускаємо, що Ω — необмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$ класу C^1, $\Omega^R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}$ — зв'язна множина для довільного $R > 1$ з регулярною за Кальдероном [1, с. 45] межею $\partial\Omega^R$. Зауважимо, зокрема, що опукла область Ω задовольняє усі зазначені умови [1, с. 46, заув. 1. 11].

Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t | \, t = \tau\}$ для довільних $\tau \in [0,T]$, $R > 1$.

Розглянемо далі функцію ψ з такими властивостями:

(Ψ) функція $\psi : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ є монотонною при $\xi \to +\infty$, неперервно диференційовною функцією, причому $|\psi'(\xi)| \le C\psi(\xi)$, $C > 0$.

У цій праці використовуємо простори з ваговою функцією ψ. Зокрема,

$$L^{r,\psi}(\Omega) = \left\{ u : \int_\Omega |u|^r \psi(|x|)dx < +\infty \right\}, \qquad \|u\|_{L^{r,\psi}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^r \psi(|x|)dx \right)^{1/r},$$

де $r \in (1,+\infty)$, а також $H_0^{1,\psi}(\Omega)$ — замикання простору нескінченно диференційовних в області $\overline{\Omega}$ функцій з компактними носіями за нормою

$$\|u\|_{H_0^{1,\psi}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 \right) \psi(|x|)dx \right)^{1/2}.$$

Усюди далі через V' позначено функціональний простір, спряжений до простору V; D^* позначає матрицю, транспоновану до D; $\|D\|$ позначає евклідову норму матриці D, а $\rho * \sigma$ — згортку за змінною t.

Стосовно коефіцієнтів правої частини системи (1) і початкових даних припускатимемо виконання таких умов:

(**A**) Елементи $a_{ij}^{kl}\,(k,l = 1,...,m)$ матриць A_{ij} — неперервні в $\overline{\Omega}$ функції, що належать до простору $L^\infty(\Omega)$, $A_{ij}(x) = A_{ij}^*(x)$ для всіх $x \in \Omega$; для довільних векторів $\zeta_l = (\zeta_{l1},...,\zeta_{lm}) \in \mathbb{R}^m$ та для всіх $x \in \Omega$ виконується умова:

$$\sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x)\zeta_i, \zeta_j) \ge a_0 \sum_{i=1}^n |\zeta_i|^2, \qquad a_0 > 0.$$

($\mathbf{A}_0$) Для довільних $i = 1,...,n$ та $k,l = 1,...,m$ елементи a_i^{kl} матриць A_i та елементи a_{i,x_i}^{kl} матриць A_{i,x_i} належать до простору $L^\infty(Q_T)$.

(**B**) Елементи $b_i^{kl}\,(k,l = 1,...,m)$ матриць B_i для довільних $i = 1,...,n$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$.

(**C**) Елементи c^{kl} матриці C належать до $L^\infty(Q_T)$, $k,l = 1,...,m$.

(**G**) Функції $G_i(x,t,\eta)\,(i = 1,...,m)$ вимірні за x, неперервні за t,η, причому для довільних $\xi,\eta \in \mathbb{R}^m$ та для майже всіх $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ виконуються умови: $((G(x,t,\xi) - G(x,t,\eta)), \xi - \eta) \ge g_0|\xi - \eta|^p$, де $g_0 = \mathrm{const} > 0$, та $|G_i(x,t,\eta)| \le g_1 \sum_{j=1}^m |\eta_j|^{p-1}$, де $g_1 = \mathrm{const} > 0$, $p > 2$.

(**F**) $F \in \left(L^{p'}((0,T); L^{p',\psi}(\Omega)) \right)^m$, $p' = p/(p-1)$.

(Φ) $\varphi_0 \in \left(H_0^{1,\psi}(\Omega)\right)^m, \;\; \varphi_1 \in \left(L^{2,\psi}(\Omega)\right)^m$.

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) називаємо функцію $u \in \left(C([0,T]; H_0^{1,\psi}(\Omega))\right)^m$ таку, що $u_t \in \left(C\left([0,T]; \left(H_0^{1,\psi}(\Omega) \cap L^{p,\psi}(\Omega)\right)'\right)\right)^m \bigcap$ $\bigcap \left(L^p((0,T); L^{p,\psi}(\Omega))\right)^m$, яка задовольняє умови (2), (4) та інтегральну тотожність

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[-(u_t, v_t\psi(|x|)) + \sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x)u_{x_i}, (v\psi(|x|))_{x_j}\right)\right]dxdt -$$

$$-\int\limits_{Q_\tau}\left[\sum_{i=1}^{n}(A_i(x,t)u_t, (v\psi(|x|))_{x_i}) - \sum_{i=1}^{n}(B_i(x,t)u_{x_i}, v\psi(|x|))\right]dxdt \; +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}(C(x,t)u + G(x,t,u_t) - F, v\psi(|x|))\,dxdt + \int\limits_{\Omega}(u_t(x,\tau), v(x,\tau)\psi(|x|))\,dx \,-$$

$$-\int\limits_{\Omega}(\varphi_1(x), v(x,0)\psi(|x|))\,dx = 0, \qquad \tau \in (0,T], \tag{5}$$

для довільної функції $v \in \left(L^2((0,T); H_0^{1,\psi}(\Omega))\right)^m \bigcap \left(L^p((0,T); L^{p,\psi}(\Omega))\right)^m$ такої, що $v_t \in \left(L^2((0,T); L^{2,\psi}(\Omega))\right)^m$.

Теорема. *Нехай виконуються умови* (Ψ), (**A**), (**A** $_0$), (**B**), (**C**), (**G**), (**F**), (Φ). *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок* u *задачі* (1)–(4) *в області* Q_T, *для якого*

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t|^2 + \sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\right]\psi(|x|)dx + \int\limits_{Q_\tau}|u_t|^p\,\psi(|x|)dxdt \le$$

$$\le C_0\left(\|F\|^{p'}_{\left(L^{p'}((0,T);L^{p',\psi}(\Omega))\right)^m} + \|\varphi_0\|^2_{\left(H_0^{1,\psi}(\Omega)\right)^m} + \|\varphi_1\|^2_{(L^{2,\psi}(\Omega))^m}\right) \tag{6}$$

для довільного $\tau \in (0,T]$, *де* C_0 — *додатна стала, яка залежить від* n, p, ψ *та коефіцієнтів* A_{ij}, A_i, B_i ($i,j = 1,...,n$), C, G *системи* (1).

Д о в е д е н н я. *Існування.* Виберемо довільне фіксоване число $R > 1$. Розглянемо в обмеженій області Q_T^R для системи (1) допоміжну задачу з правою частиною F^R і умовами

$$u|_{S_T^R} = 0, \tag{7}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0^R(x), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1^R(x), \quad x \in \Omega^R, \tag{8}$$

де $S_T^R = \partial\Omega^R \times (0,T)$, $\varphi_0^R(x) = \varphi_0(x)\xi_R(x)$, $\varphi_1^R(x) = \varphi_1(x)\xi_R(x)$, $\xi_R \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \xi_R(x) \le 1$, $\xi_R(x) = 1$ при $|x| \le R-1$, $\xi_R(x) = 0$ при $|x| \ge R$, $F^R(x,t) = F(x,t)$ при $(x,t) \in Q_T^R$, $F^R(x,t) = 0$ при $(x,t) \in Q_T \setminus Q_T^R$. Для доведення існування розв'язку допоміжної задачі (1), (7), (8) використаємо схему доведення теореми 6.1 [4, с. 234]. Розглянемо в області Q_T^R послідовність гальоркінських наближень $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} C_k^N(t)\omega_k(x)$, де $N = 1,2,...,$ $\{\omega_k\}$ — база в просторі $(H_0^1(\Omega^R))^m \cap (L^p(\Omega^R))^m$, ортонормована в $L^2(\Omega^R))^m$, причому функції C_k^N визначаються як розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int\limits_{\Omega^R}\left[(u_{tt}^N, \omega_k\psi(|x|)) + \sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x)u_{x_i}^N, \omega_{k,x_j}\psi(|x|)\right) + \sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x)u_{x_i}^N, \omega_k\psi_{x_j}(|x|)\right)\right]dx -$$

$$-\int\limits_{\Omega^R}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(A_i(x,t)u_t^N,\omega_{k,x_i}\psi(|x|)\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(A_i(x,t)u_t^N,\omega_k\psi_{x_i}(|x|)\right)\right]dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega^R}\left[\sum_{i=1}^{n}B_i(x,t)u_{x_i}^N+C(x,t)u^N+G(x,t,u_t^N)-F^R(x,t),\omega_k\psi(|x|)\right]dx=0, \qquad (9)$$

$$C_k^N(0)=\varphi_{0,k}^{R,N}, \quad C_{k,t}^N(0)=\varphi_{1,k}^{R,N}, \quad k=1,...,N, \qquad (10)$$

$$\varphi_0^{R,N}(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_{0,k}^{R,N}\omega_k(x), \quad \varphi_1^{R,N}(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_{1,k}^{R,N}\omega_k(x),$$

$$\left\|\varphi_0^{R,N}-\varphi_0^R\right\|_{\left(H_0^1(\Omega^R)\right)^m}\to 0, \quad \left\|\varphi_1^{R,N}-\varphi_1^R\right\|_{(L^2(\Omega^R))^m}\to 0, \quad N\to+\infty.$$

На підставі теореми Каратеодорі [2, с. 54] існує неперервний розв'язок задачі Коші (9), (10), який має абсолютно неперервну похідну, визначений на деякому проміжку $[0,\tau_0]$, $\tau_0\le T$. З отриманих нижче оцінок випливатиме, що $\tau_0=T$. Помножимо кожне рівняння системи (9) на C_{kt}^N, підсумуємо усі рівняння за k від 1 до N та проінтегруємо результат по проміжку $[0,\tau]$, $\tau\le T$. Тоді отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)u_{x_i}^N(x,\tau),u_{x_j}^N(x,\tau)\Big)\right]\psi(|x|)dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x)u_{x_i}^N,u_t^N\right)\psi_{x_j}(|x|)dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left(A_i(x,t)u_t^N,u_t^N\right)\psi_{x_i}(|x|)dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left(A_{i,x_i}(x,t)u_t^N,u_t^N\right)\psi(|x|)dxdt+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left(B_i(x,t)u_{x_i}^N,u_t^N\right)\psi(|x|)dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\left(C(x,t)u^N,u_t^N\right)\psi(|x|)dxdt-\int\limits_{Q_\tau^R}\left(F^R,u_t^N\right)\psi(|x|)dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)\varphi_{0,x_i}^{R,N}(x),\varphi_{0,x_j}^{R,N}(x)\Big)\psi(|x|)dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left|\varphi_1^{R,N}(x)\right|^2\psi(|x|)dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\left(G(x,t,u_t^N),u_t^N\right)\psi(|x|)dxdt=0. \qquad (11)$$

Враховуючи умови теореми, оцінимо інтеграли рівності (11):

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\Big(A_{ij}(x)u_{x_i}^N(x,\tau),u_{x_j}^N(x,\tau)\Big)-\Big(A_{ij}(x)\varphi_{0,x_i}^{R,N}(x),\varphi_{0,x_j}^{R,N}(x)\Big)\right]\psi(|x|)dx\ge$$

$$\ge\frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^N(x,\tau)\right|^2\psi(|x|)dx-\frac{a_1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi_{0,x_i}^{R,N}(x)\right|^2\psi(|x|)dx,$$

де $a_1=\max\limits_{i,j}\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}\|A_{ij}(x)\|$;

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left(B_i(x,t)u_{x_i}^N,u_t^N\right)\psi(|x|)dxdt \ \le b\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}|\left(u_{x_i}^N,u_t^N\right)|\psi(|x|)dxdt\le$$

$$\le M_1\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^N\right|^2\psi(|x|)dxdt+\delta_1 T\int\limits_{\Omega^R}\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2\psi(|x|)dx,$$

де $b{=}\max\limits_i \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}\|B_i(x,t)\|$, $\delta_1{>}0$, M_1 — додатна стала, яка залежить від b,δ_1;

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x)u_{x_i}^N,u_t^N\right)\psi_{x_j}(|x|)dxdt\le M_2\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^N\right|^2\psi(|x|)dxdt+$$

$$+\ \delta_2 T\int\limits_{\Omega^R}\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2\psi(|x|)dx,$$

де $\delta_2>0$, M_2 — додатна стала, яка залежить від n, a_1, ψ, δ_2. Продовжуючи оцінки інтегралів рівності (11), одержимо

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left(A_i(x,t)u_t^N,u_t^N\right)\psi_{x_i}(|x|)dxdt\le\frac{a_2}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left|\left(u_t^N,u_t^N\right)\right|\psi_{x_i}(|x|)dxdt\le$$

$$\le M_3\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^2\psi(|x|)dxdt,\quad \text{де } a_2=\max_i\operatorname*{esssup}_{(x,t)\in Q_T}\|A_i(x,t)\|,\ \ M_3=\frac{nCa_2}{2};$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left(A_{i,x_i}(x,t)u_t^N,u_t^N\right)\psi(|x|)dxdt\le\frac{a_3}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left|\left(u_t^N,u_t^N\right)\right|\psi(|x|)dxdt\le$$

$$\le M_4\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^2\psi(|x|)dxdt,\quad \text{де } a_3=\max_i\operatorname*{esssup}_{(x,t)\in Q_T}\|A_{i,x_i}(x,t)\|,\ \ M_4=\frac{na_3}{2};$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\left(G(x,t,u_t^N),u_t^N\right)\psi(|x|)dxdt\ge\ g_0\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t^N\right|^p\psi(|x|)dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\left(C(x,t)u^N,u_t^N\right)\psi(|x|)dxdt\le c_2\int\limits_{Q_\tau^R}\left(u^N(x,0)+\int\limits_0^t u_t^N(x,\tau)d\tau,u_t^N(x,t)\right)\psi(|x|)dxdt\le$$

$$\le\frac{c_2}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left|\varphi_0^{R,N}(x)\right|^2\psi(|x|)dx+c_2\left(\frac{1}{2}+T\right)\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t^N\right|^2\psi(|x|)dxdt\,,\ c_2=\operatorname*{esssup}_{(x,t)\in Q_T}\|C(x,t)\|;$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\left(F^R(x,t),u_t^N\right)\psi(|x|)dxdt\le\frac{\delta_3}{p}\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^p\psi(|x|)dxdt+M_5\int\limits_{Q_\tau^R}|F^R(x,t)|^{p'}\psi(|x|)dxdt,$$

де $\delta_3>0$, M_5 — додатна стала, яка залежить від δ_3, p.

Використовуючи наведені вище оцінки, маємо

$$(1-2(\delta_1+\delta_2)T)\int\limits_{\Omega^R}\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2\psi(|x|)dx+a_0\int\limits_{\Omega^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^N(x,\tau)\right|^2\psi(|x|)dx+$$

$$+2(g_0-\frac{\delta_3}{p})\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t^N\right|^p\psi(|x|)dxdt\le 2(M_1+M_2)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^N\right|^2\psi(|x|)dxdt+$$

$$+2\left(M_3+M_4+c_2\left(\frac{1}{2}+T\right)\right)\int\limits_{Q_\tau^R}|u_t^N|^2\psi(|x|)dxdt+2M_5\int\limits_{Q_\tau^R}|F^R|^{p'}\psi(|x|)dxdt+$$

$$+M_6\int\limits_{\Omega^R}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi_{0,x_i}^{R,N}(x)\right|^2+\left|\varphi_0^{R,N}(x)\right|^2+\left|\varphi_1^{R,N}(x)\right|^2\right]\psi(|x|)dx \qquad (12)$$

для всіх $\tau\in(0,T]$, $M_6=\max\{a_1,c_2,1\}$, де додатні сталі M_1 – M_6 не залежать від N. На підставі леми Гронуола з (12), вибравши $\delta_1+\delta_2<\dfrac{1}{2T}$, $\delta_3<g_0p$, отримуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|u_t^N(x,\tau)\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^N(x,\tau)\right|^2\right]\psi(|x|)dx+\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t^N\right|^p\psi(|x|)dxdt\le M_7 \qquad (13)$$

для всіх $0<\tau\le T$, де M_7 — додатна стала, яка не залежить від N. З нерівності (13) випливає існування підпослідовності $\{u^{N_k}\}\subset\{u^N\}$ такої, що

$$u^{N_k}\to u^R \quad * - \text{слабко в} \quad (L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega^R)))^m,$$

$$u_t^{N_k}\to u_t^R \quad * - \text{слабко в} \quad (L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R)))^m,$$

$$u_t^{N_k}\to u_t^R \quad \text{слабко в} \quad (L^p((0,T);L^p(\Omega^R)))^m$$

при $N_k\to\infty$ для довільного $R>1$. Використовуючи [4, с. 20, лема 1. 2], маємо $u^R\in\left(C\left([0,T];H_0^1(\Omega^R)\right)\right)^m$. Міркуючи подібно до [4, с. 234], отримаємо також, що $u_t^R\in\left(C\left([0,T];(H_0^1(\Omega^R)\cap L^p\left(\Omega^R\right))'\right)\right)^m$. Оскільки $u^{N_k}(\cdot,0)\to$ $\to u^R(\cdot,0)$ слабко в $\left(H_0^1(\Omega^R)\right)^m$, а $\varphi_0^{R,N_k}(\cdot,0)\to\varphi_0^R$ сильно в $\left(H_0^1(\Omega^R)\right)^m$, то $u^R(x,0)=\varphi_0^R(x)$, $x\in\Omega^R$. Крім того, аналогічно до [4, с. 236] показуємо, що $u_t^R(x,0)=\varphi_1^R(x)$, $x\in\Omega^R$.

Зауважимо, що для довільного $k\in\mathbb{N}$

$$\left\|u_t^{N_k}\right\|_{(L^p((0,T);L^p(\Omega^R)))^m}\le M_8,\quad M_8=\text{const}>0. \qquad (14)$$

З нерівності (14), врахувавши умову (**G**), легко отримати, що

$$\int\limits_{Q_T}\left|G_i(x,t,u_t^{N_k})\right|^{p'}\psi(x)dxdt\le\int\limits_{Q_\tau^R}g_1^{p'}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|u_{jt}^{N_k}\right|^{p-1}\right)^{p'}dxdt\le M_9,\quad M_9>0. \quad (15)$$

З нерівностей (14), (15) робимо висновок (переходячи при потребі до підпослідовностей), що $G(x,t,u_t^{N_k})\to Z$ слабко в $(L^{p'}((0;T);L^{p'}(\Omega^R)))^m$. Подібно до [4, с. 236–237] покажемо, що $Z=G(x,t,u_t^R)$, тобто $G(x,t,u_t^{N_k})\to$ $G(x,t,u_t^R)$

слабко в $(L^{p'}((0;T);L^{p'}(\Omega^R)))^m$. Міркуючи так само, як і при отриманні рівності (11), одержуємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|u_t^{N_k}(x,\tau)\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)u_{x_i}^{N_k}(x,\tau),u_{x_j}^{N_k}(x,\tau)\Big)\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\left[\Big(A_{i,x_i}(x,t)u_t^{N_k},u_t^{N_k}\Big)+2\sum_{i=1}^{n}\Big(B_i(x,t)u_{x_i}^{N_k},u_t^{N_k}\Big)\right]dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\Big(C(x,t)u^{N_k},u_t^{N_k}\Big)\,dxdt\ +\int\limits_{Q_\tau^R}\Big(G(x,t,u_t^{N_k}),u_t^{N_k}\Big)dxdt\ -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|\varphi_1^{R,N_k}\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)\varphi_{0,x_i}^{R,N_k},\varphi_{0,x_j}^{R,N_k}\Big)\right]dx=\int\limits_{Q_\tau^R}\Big(F,u_t^{N_k}\Big)\,dxdt. \qquad (16)$$

На підставі збіжностей, отриманих для послідовності $\left\{u^{N_k}\right\}$ вище, з рівності (16) маємо

$$\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|u_t^{R}(x,T)\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)u_{x_i}^{R}(x,T),u_{x_j}^{R}(x,T)\Big)\right]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_T^R}\sum_{i=1}^{n}\big(A_{i,x_i}(x,t)u_t^{R},u_t^{R}\big)\,dxdt+2\int\limits_{Q_T^R}\sum_{i=1}^{n}\big(B_i(x,t)u_{x_i}^{R},u_t^{R}\big)\,dxdt+$$

$$+2\int\limits_{Q_T^R}\big(C(x,t)u^{R},u_t^{R}\big)\,dxdt\ +2\int\limits_{Q_T^R}\big(Z-F,u_t^{R}\big)dxdt-$$

$$-\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|\varphi_1^{R}\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)\varphi_{0,x_i}^{R},\varphi_{0,x_j}^{R}\Big)\right]dx=0 \qquad (17)$$

для довільного $\tau\in(0,T]$. Нашою метою є отримання нерівності

$$\int\limits_{Q_T^R}\big(Z-G(x,t,v),u_t^{R}-v\big)\,dxdt\geq 0 \qquad (18)$$

для довільної функції $v\in\big(L^p((0,T);L^p(\Omega^R))\big)^m$. Для цього розглянемо

$$0\leq I_k=\int\limits_{Q_T^R}(G(x,t,u_t^{N_k}-G(x,t,v),u_t^{N_k}-v)dxdt=\int\limits_{Q_T^R}(G(x,t,u_t^{N_k}),u_t^{N_k})dxdt-$$

$$-\int\limits_{Q_T^R}\Big(G(x,t,u_t^{N_k}),v\Big)\,dxdt-\int\limits_{Q_T^R}\Big(G(x,t,v),u_t^{N_k}-v\Big)\,dxdt.$$

Використовуючи (16), отримуємо

$$\int\limits_{Q_T^R}\Big(G(x,t,u_t^{N_k}),u_t^{N_k}\Big)dxdt\ =\int\limits_{Q_T^R}\Big(F,u_t^{N_k}\Big)\,dxdt\ -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|u_t^{N_k}(x,T)\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)u_{x_i}^{N_k}(x,T),u_{x_j}^{N_k}(x,T)\Big)\right]dx\,-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T^R}\left[\sum_{i=1}^{n}\Big(A_{i,x_i}(x,t)u_t^{N_k},u_t^{N_k}\Big)+2\sum_{i=1}^{n}\Big(B_i(x,t)u_{x_i}^{N_k},u_t^{N_k}\Big)\right]dxdt\,-$$

$$-\int\limits_{Q_T^R}\Big(C(x,t)u^{N_k},u_t^{N_k}\Big)\,dxdt+\;\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|\varphi_1^{R,N_k}\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)\varphi_{0,x_i}^{R,N_k},\varphi_{0,x_j}^{R,N_k}\Big)\right]dx.$$

Тому можна стверджувати, що

$$0\le I_k=\int\limits_{Q_T^R}\Big(F,u_t^{N_k}\Big)\,dxdt\,-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|u_t^{N_k}(x,T)\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)u_{x_i}^{N_k}(x,T),u_{x_j}^{N_k}(x,T)\Big)\right]dx\,-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T^R}\left[\sum_{i=1}^{n}\Big(A_{i,x_i}(x,t)u_t^{N_k},u_t^{N_k}\Big)+2\sum_{i=1}^{n}\Big(B_i(x,t)u_{x_i}^{N_k},u_t^{N_k}\Big)\right]dxdt\,-$$

$$-\int\limits_{Q_T^R}\Big(C(x,t)u^{N_k},u_t^{N_k}\Big)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|\varphi_1^{R,N_k}\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)\varphi_{0,x_i}^{R,N_k},\varphi_{0,x_j}^{R,N_k}\Big)\right]dx\,-$$

$$-\int\limits_{Q_T^R}\Big(G(x,t,u_t^{N_k}),v\Big)\,dxdt-\int\limits_{Q_T^R}\Big(G(x,t,v),u_t^{N_k}-v\Big)\,dxdt.$$

Звідси [1, с. 20, лема 5. 3] отримуємо

$$0\le\limsup I_k=\int\limits_{Q_T^R}\big(F,u_t^R\big)\,dxdt\,-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|{u_t}^R(x,T)\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)u_{x_i}^R(x,T),u_{x_j}^R(x,T)\Big)\right]dx\,-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T^R}\left[\sum_{i=1}^{n}\big(A_{i,x_i}(x,t)u_t^R,u_t^R\big)+2\sum_{i=1}^{n}\big(B_i(x,t)u_{x_i}^R,u_t^R\big)\right]dxdt\,-$$

$$-\int\limits_{Q_T^R}\big(C(x,t)u^R,u_t^R\big)\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}\left[\left|\varphi_1^R\right|^2+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(A_{ij}(x)\varphi_{0,x_i}^R,\varphi_{0,x_j}^R\Big)\right]dx\,-$$

$$-\int\limits_{Q_T^R}(Z,v)\,dxdt-\int\limits_{Q_T^R}\Big(G(x,t,v),u_t^R-v\Big)\,dxdt. \tag{19}$$

Додавши (17) та (19), отримуємо нерівність (18). Приймемо в нерівності (18) $v = u_t^R - \lambda\chi$, $\lambda > 0$, де $\chi \in (L^p((0,T); L^p(\Omega^R)))^m$ — довільна функція. Отже, $\lambda \int\limits_{Q_T^R} (Z - G(x,t,u_t^R - \lambda\chi), \chi)dxdt \geq 0$. Використаємо теорему Лебега і спрямуємо $\lambda \to +0$. Отримуємо $\int\limits_{Q_T^R} (Z - G(x,t,u_t^R), \chi)dxdt \geq 0$ для довільної функції $\chi \in \left(L^p((0,T); L^p(\Omega^R))\right)^m$. Отже, $Z = G(x,t,u_t^R)$, тобто $G(x,t,u_t^{N_k}) \to G(x,t,u_t^R)$ слабко в $\left(L^{p'}((0,T); L^{p'}(\Omega^R))\right)^m$. Таким чином, u^R — розв'язок задачі (1), (7), (8) в області Q_T^R для довільного фіксованого $R > 1$.

Виберемо тепер послідовність $\left\{\Omega^k\right\}$ областей описаного вище вигляду, $k = 2, 3, \ldots$. Зрозуміло, що $\bigcup\limits_k \Omega^k = \Omega$. Розглянемо в обмеженій області Q_T^k для системи (1) допоміжну задачу з правою частиною F^k і умовами (7), (8). На підставі отриманих збіжностей можна стверджувати: для довільного $k = 2, 3, \ldots$ існує узагальнений розв'язок u^k такої задачі в Q_T^k. Розглянемо тепер послідовність задач описаного вигляду для $k = 2$, $k = 3, \ldots$, поклавши $u^k(x,t) = 0$ при $(x,t) \in Q_T \backslash Q_T^k$. Отриману послідовність розв'язків задачі (1)–(4) в Q_T для зручності знову позначимо $\left\{u^k\right\}$. У області Q_T розглянемо різницю $u^l - u^m$, $l, m \in \mathbb{N}$, $l > m > k$, та врахуємо, що $F^l - F^m \equiv 0$ в Q_T^k. Зафіксуємо далі $s_0, s_1 \in [0,T]$, $s_0 < s_1$. Нехай θ_k — неперервна кусково-лінійна функція на $[0,T]$, $\theta_k = 0$ при $t > s_1 - \dfrac{1}{k}$ та при $t < s_0 + \dfrac{1}{k}$, $\theta_k = 1$, якщо $s_0 + \dfrac{2}{k} < t < s_1 - \dfrac{2}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Нехай ρ_s — регуляризувальна послідовність у просторі нескінченно диференційовних в $\mathbb{R}$ функцій з компактним носієм така, що $\rho_s(t) = \rho_s(-t)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_s(t)dt = 1$, $\operatorname{supp}\rho_s \subset \left[-\dfrac{1}{s}, \dfrac{1}{s}\right]$, $s \in \mathbb{N}$. Віднімемо від інтегральної рівності для функцій u^l, F^l, аналогічної до (5), відповідну інтегральну рівність для u^m, F^m та покладемо $v = ((\theta_k(u_t^l - u_t^m)) * \rho_s * *\rho_s)\theta_k$. Здійснивши процедуру регуляризації, описану в [4, с. 238–239], після граничного переходу при $s \to \infty$, $k \to \infty$ одержимо подібно до (13), що

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left|u_t^l - u_t^m\right|^2 \psi(|x|)dx + \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n \left|u_{x_i}^l - u_{x_i}^m\right|^2 \psi(|x|)dx + \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^l - u_t^m\right|^p \psi(|x|)dxdt \leq$$

$$\leq C_1 \int\limits_{Q_T \backslash Q_T^k} \left|F^l - F^m\right|^{p'} \psi(|x|)dxdt + C_2 \left\|\varphi_0^l - \varphi_0^m\right\|_{\left(H_0^{1,\psi}(\Omega)\right)^m} + C_3 \left\|\varphi_1^l - \varphi_1^m\right\|_{(L^{2,\psi}(\Omega))^m}, \tag{20}$$

де C_1, C_2, C_3 — деякі додатні сталі, що не залежать від k. Враховуючи фундаментальність послідовностей $\{F^k\}$, $\{\varphi_0^k\}$, $\{\varphi_1^k\}$ у $\left(L^{p'}((0,T); L^{p',\psi}(\Omega))\right)^m$, $\left(H_0^{1,\psi}(\Omega)\right)^m$, $\left(L^{2,\psi}(\Omega)\right)^m$ відповідно, із нерівності (20) можна отримати: для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $k_1(\varepsilon) \geq k$, що для довільних $l, m > k_1(\varepsilon)$ маємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left|u_t^l - u_t^m\right|^2 \psi(|x|)dx + \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n \left|u_{x_i}^l - u_{x_i}^m\right|^2 \psi(|x|)dx + \int\limits_{Q_\tau} \left|u_t^l - u_t^m\right|^p \psi(|x|)dxdt < \varepsilon. \tag{21}$$

Тому послідовність $\{u^k\}$ є фундаментальною в $\Big(C([0,T];H_0^{1,\psi}(\Omega))\Big)^m$, а $\{u_t^k\}$ є фундаментальною в

$$\Big(C([0,T];(H_0^{1,\psi}(\Omega)\cap L^{p,\psi}(\Omega))'\Big)^m \cap \big(L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))\big)^m .$$

Отже, $u^k \to u$ сильно в $\left(C\left([0,T];H_0^{1,\psi}(\Omega)\right)\right)^m$, $u_t^k \to u_t$ сильно в

$$\left(C\left([0,T];\left(H_0^{1,\psi}(\Omega)\cap L^{p,\psi}(\Omega)\right)'\right)\right)^m \cap \left(L^p\left((0,T);L^{p,\psi}(\Omega)\right)\right)^m .$$

При цьому функція u задовольняє інтегральну тотожність (5) та виконуються умови (2), (4). Зауважимо, що зі сильної збіжності $u_t^k \to u_t$ в просторі $\left(L^p((0,T);L^{p,\psi}(\Omega))\right)^m$ випливає, що $G(x,t,u_t^k) \to G(x,t,u_t)$ слабко в просторі $(L^{p'}((0;T);L^{p',\psi}(\Omega)))^m$ [1, с. 57, лема 2. 2]. Правильність оцінки (6) для u доводиться так само, як отримано нерівність (20).

Єдиність. Якщо $u^{(1)}$ та $u^{(2)}$ — два довільних розв'язки задачі (1)–(4), то аналогічно до того, як отримано нерівність (20), можна отримати оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\left|u_t^{(1)}-u_t^{(2)}\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{(1)}-u_{x_i}^{(2)}\right|^2\right]\psi(|x|)dx+\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^{(1)}-u_t^{(2)}\right|^p\psi(|x|)dxdt\le 0$$

для всіх $0<\tau\le T$. Отже, $u^{(1)}=u^{(2)}$ майже скрізь в Q_T. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Зауваження. Отримані класи існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(4) є ваговими соболевськими просторами функцій з якісною поведінкою при $|x|\to+\infty$. Прикладами вагових функцій можуть бути, зокрема функції вигляду $\psi(|x|)=(1+|x|)^\alpha$, $\alpha=\text{const}$, $\psi(|x|)=e^{\beta|x|}$, $\beta=\text{const}$ тощо.

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
2. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Изд–во иностр. лит., 1958. – 474 с.
3. *Лавренюк С. П., Оліскевич М. О.* Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними// Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 1356–1370.
4. *Лионс Ж. -Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 588 с.
5. *Пукач П. Я.* Змішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 149–154.
6. *Agre K., Rammaha M. A.* Global solutions to boundary value problems for a nonlinear wave equation in high space dimensions// Diff. and Integr. Equat. – 2001. – **14**. – P. 1315–1331.
7. *Astaburuaga M., Coimbra Charao R., Fernandez C., Perla Menzala G.* Scattering frequencies for a perturbed system of elastic wave equations// J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – **219.** – P. 52–75.
8. *D'Ancona P., Manfrin R.* A class of locally solvable semilinear equations of weakly hyperbolic type// Ann. Mat. Pura Appl. – 1995. – **168**. – P. 355–372.
9. *Dragieva N. A.* A hyperbolic equation with two space variables with strong nonlinearity// Godishnik Vish. Uchebn. Zaved. Prilozhna Mat. – 1987. – **23**, No 4. – P. 95–106.
10. *Duvaut G., Lions J. L.* Les inequations en mecanique et en physique. – Paris: Dunod, 1972. – 213 p.
11. *Georgiev V., Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and sourse terms// J. Diff. Equat. – 1994. – **109**. – P. 295–308.

12. *Gurtin M.* An introduction to continuum Mechanics. – New York: Academic Press, 1981. – 317 p.
13. *Hoshino K.* On a construction of weak solutions to semilinear dissipative hyperbolic systems with the higher integrable gradients// Nonlin. Anal. – 1999. – **38.** – P. 813–826.
14. *Li M.–R., Tsai L.–Y.* Existence and nonexistence of global solutions of some system of semilinear wave equations// Nonlin. Anal. – 2003. – **54**. – P. 1397–1415.
15. *Majdoub M.* Qulitative study of the critical wave equation with a subcritical perturbation// J. Math. Anal. and Appl. – 2005. – **301**. – P. 354–365.
16. *Ohta M.* Blowup for systems of semilinear wave equations in low space dimensions// J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **240**. – P. 340–360.
17. *Ohta M., Takamura H.* Remarks on the blow–up boundaries and rates for nonlinear wave equations// Nonlin. Anal. – 1998. – **33**. – P. 693–698.
18. *Pecher H.* Sharp existence results for self – similar solutions of semilinear wave equations// Nonlin. Diff. Equat. and Appl. – 2000. – **7**. – P. 323–341.
19. *Ryo Ikehata.* Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped equation// J. Math. Anal. and Appl. – 2005. – **301**. – P. 366–377.
20. *Todorova G., Yordanov B.* Critical exponent for a nonlinear wave equations with damping// J. Diff. Equat. – 2001. – **174**. – P. 464–489.

ВЕСОВЫЕ КЛАССЫ КОРРЕКТНОСТИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Работа посвящена исследованию первой смешанной задачи для слабо нелинейной гиперболической системы второго порядка в неограниченной по пространственным переменным области. Рассмотриваемая система обобщает систему нелинейных волновых уравнений $u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-2} u_t = f(x,t)$, $p > 2$, *изучаемую в теории упругости. Получены условия существования и единственности обобщенного решения. Классы существования и единственности являются весовыми соболевскими пространствами функций с квалифицированным поведением на бесконечности.*

THE WEIGHT CORRECTNESS CLASSES OF SOLUTION OF MIXED PROBLEM IN AN UNBOUNDED DOMAIN FOR NONLINEAR HYPERBOLIC SYSTEM

The paper is devoted to investigation of the first mixed problem for nonlinear hyperbolic system of the second order in domain unbounded with respect to space variables. Describing system generalizes the system of nonlinear wave equations $u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-2} u_t = f(x,t)$, $p > 2$, *which is used in elasticity theory. The conditions of the existence and uniqueness of generalized solution have been obtained. The classes of the existence and uniqueness are weight Sobolev spaces of functions with qualitative behavior at infinity.*

Одержано 23.09.05

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів