УДК 517.95

І. М. Медвідь

ЕЛІПТИЧНА ВАРІАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

Доведено існування і единість розв'язку нелінійної еліптичної варіаційної нерівності в необмеженій області без умов на нескінченності. Зокрема, вихідні дані можуть необмежено зростати на нескінченності, а також розв'язок нерівності є единим без вимог до його поведінки на нескінченності.

Дослідження нелінійних еліптичних і параболічних крайових задач без умов на нескінченності почало активно розвиватись з середини 80–х років 20 ст. Брезіс у праці [5] вперше чітко сформулював явище, коли однозначна розв'язність задачі Коші не залежить від поведінки розв'язку на нескінченності. Аналогічні результати для еліптичних задач було отримано в роботах [3, 4, 6] та інших. Одним із методів дослідження крайових задач є варіаційні нерівності. Еліптичним варіаційним нерівностям в необмежених областях останнім часом присвячено багато нових праць, серед яких [7–12]. Основною метою таких досліджень є доведення існування і єдиності розв'язку нерівності без умов на нескінченності або в певному класі зростання, або вивчення властивостей розв'язків нерівності.

Нашою метою є вивчення еліптичних варіаційних нерівностей з квазілінійними еліптичними диференціальними операторами четвертого порядку в необмежених областях.

Нехай Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n$; $\partial\Omega \in C^1$; $B_R = \{\, x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Припускаємо, що $B_R \cap \Omega = \Omega_R$ є регулярною областю [1, с. 45] для кожного $R > 1$, $\partial\Omega_R = \Gamma^1_R \cup \Gamma^2_R$; $\Gamma^1_R = \partial\Omega \cap \partial\Omega_R$; $\Gamma^2_R = \partial\Omega_R \setminus \Gamma^1_R$; $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$; ν — зовнішня нормаль до області Ω. Введемо простори (для кожного $R > 1$):

$$H^2_1(\Omega_R) \; = \; \left\{ u : \; u \in H^2(\Omega_R), \; u|_{\Gamma^1_R} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma^1_R} = 0 \right\},$$

$$H^2_{0,\,1}(\Omega_R) \; = \; \left\{ u : u \in H^2(\Omega_R), \; u|_{\Gamma^1_R} = 0 \right\},$$

$$H^2_{1,\,0}(\Omega_R) \; = \; \left\{ u : u \in H^2(\Omega_R), \; \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma^1_R} = 0 \right\},$$

$$H^2_{1,1}(\Omega_R) \; = \; \left\{ u : \; u \in H^2(\Omega_R), \; u|_{\Gamma^1_R \cap S_1} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma^1_R \cap S_2} = 0 \right\}.$$

Нехай $\widetilde{H}^2_R(\Omega_R)$ буде одним із просторів $H^2_{0,\,1}(\Omega_R), H^2_{1,\,0}(\Omega_R), H^2_{1,\,1}(\Omega_R)$, а $V_2(\Omega_R)$ — такий замкнутий простір, що $H^2_1(\Omega_R) \subset V_2(\Omega_R) \subset \widetilde{H}^2(\Omega_R)$. Через $V_{2,\,loc}(\overline{\Omega})$ позначимо простір таких функцій v, що $v \in V_2(\Omega_R)$ для кожного $R > 1$, а через $L^r_{loc}(\overline{\Omega})$ — простір таких функцій v, що $v \in L^r(\Omega_R)$ для кожного $R > 1$, де $r \in (1, +\infty]$.

Розглянемо в області Ω еліптичну варіаційну нерівність

$$\int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta((v-u)\psi(x)) \; + \; \sum_{i=1}^n b_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}((v-u)\psi(x))_{x_i} \; + \\ + \; c(x)|u|^{r-2}u(v-u)\psi(x) \; - \; \sum_{|\alpha|\leqslant 2} f_\alpha(x) D^\alpha((v-u)\psi(x)) \Bigg] \, dx \; \geqslant 0, \qquad (1)$$

де $D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots\alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $i = 1,...,n$.

Припускаємо, що коефіцієнти нерівності (1) задовольняють умови

(**A**): $a_{\alpha\beta} \in C(\overline{\Omega})$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$;

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant a_0 \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2,\ a_0 > 0, \quad \forall x \in \Omega,$$
$\forall \xi \in \mathbb{R}^{(n^2+n)/2}$;

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x)\eta_\alpha\eta_\beta \geqslant a_0 \sum_{|\alpha|=1} |\eta_\alpha|^2 \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^n;$$

$a_{00}(x) \geqslant a_1 \quad \forall x \in \Omega,\ a_1 \geqslant 0;$

$|a_{\alpha\beta}(x)| \leqslant a^0 R^{\kappa} \quad \forall x \in \Omega_R, \forall R > 1,\ |\alpha|,|\beta| = 2,\ \kappa \geqslant 0;$

$|a_{\alpha\beta}(x)| \leqslant a^0 R^{\kappa_1} \quad \forall x \in \Omega_R,\ \forall R > 1,\ |\alpha|,|\beta| = 1,\ \kappa_1 \geqslant 0;$

(**B**): $b_i \in C(\overline{\Omega})$, $0 < b_0 \leqslant b_i(x) \leqslant b^0 R^{\kappa_2} \quad \forall x \in \Omega_R,\ \forall R > 1,$ $i = 1,\ldots,n,\ \kappa_2 \geqslant 0;$

(**C**): $c \in L^{\infty}_{loc}(\overline{\Omega})$, $c(x) \geqslant c_0 > 0$ м.с. в Ω.

Нехай $\mathcal{K}$ — опукла замкнена множина в $V_{2,\,loc}(\overline{\Omega})$.

Означення. Функцію u, що задовольняє включення $u \in V_{2,loc}(\overline{\Omega})\cap$ $\cap L^r_{loc}(\overline{\Omega})$, $u \in \mathcal{K}$ і нерівність (1) для всіх $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, і для всіх функцій $v \in V_{2,\,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^r_{loc}(\overline{\Omega})$ таких, що $v \in \mathcal{K}$, будемо називати розв'язком нерівності (1).

Розглянемо функцію $\zeta_{R,s}(x) = [h_R(x)]^s$, $s > 4$, де $h_R(x) = (R^2 - |x|^2)/R$, якщо $|x| \leqslant R$, і $h_R(x) = 0$, якщо $|x| > R$. Зауважимо, що для функції $\zeta_{R,s}$ правильні такі оцінки: $\left|\dfrac{\partial\zeta_{R,s}(x)}{\partial x_i}\right| \leqslant 2s[h_R(x)]^{s-1}$, $\left|\dfrac{\partial^2\zeta_{R,s}(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right| \leqslant 4s^2[h_R(x)]^{s-2}$ для всіх $i,j = 1,\ldots,n$.

Лема 1. *Для кожної функції* $u \in V_{2,\,loc}(\overline{\Omega})$ *правильна оцінка*

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 [h_R(x)]^{s-2}\,dx \leqslant \delta \int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^2 [h_R(x)]^s\,dx + {} + \frac{(2s-3)^2}{4\delta} \int\limits_{\Omega_R} |u|^2 [h_R(x)]^{s-4}\,dx, \tag{2}$$

де δ *— будь–яке число з проміжка* $(0,1)$, $R > 1$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**) *і, крім того,* $p \in (2n/(n+2), 2)$, $r > 2$, $\kappa,\kappa_1 \in [0,1)$, $\kappa_2 \in [0, (p(n+2)-2n)/(2p))$. *Тоді, якщо виконується хоча б одна з двох умов:*

а) $a_1 \neq 0$;

б) $r < \begin{cases} 2n/(n-(4-4\kappa))\,, & n > 4-4\kappa, \\ 2n/(n-(2-2\kappa_1)), & n > 2-2\kappa_1, \end{cases}$

то нерівність (1) *може мати не більше одного розв'язку.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що нерівність (1) має два розв'язки: $u^{(1)}$, $u^{(2)}$. Запишемо нерівність (1) для кожного з них і покладемо $v = (u^{(1)}+$ $+u^{(2)})/2$. Додавши отримані нерівності, запишемо

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta(u\psi(x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\big(|u^{(1)}_{x_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_i} - |u^{(2)}_{x_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_i}\big)(u\psi(x))_{x_i} +$$

$$+ c(x)\big(|u^{(1)}|^{r-2}u^{(1)} - |u^{(2)}|^{r-2}u^{(2)}\big)u\psi(x)\Big]\,dx \geqslant 0, \qquad (3)$$

де $u = u^{(1)} - u^{(2)}$, $\psi = \zeta_{R,s}(x)$. Розглянемо

$$\mathcal{I}_1 := \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta(u\psi(x))\,dx = \int\limits_\Omega \Big[\sum_{|\alpha|,|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta u \psi(x) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|,|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \sum_{0<\gamma<\beta} C_\beta^\gamma D^\gamma u D^{\beta-\gamma}\psi \; + \sum_{|\alpha|,|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u\, u D^\beta \psi(x)\Big]\,dx,$$

де $C_\beta^\gamma = C_{\beta_1}^{\gamma_1} C_{\beta_2}^{\gamma_2} \cdots C_{\beta_n}^{\gamma_n}$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ ($0 < \gamma < \beta$ означає, що $0 < \gamma_i < \beta_i$ для $i = 1, ..., n$). Згідно з $(\mathbf{A})$ і лемою 1

$$\mathcal{I}_1 \;\geqslant\; (a_0 - \delta_0)\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^2 \psi(x)\,dx \;-\; \mu_1(\delta_0) R^{4\kappa} \int\limits_\Omega |u|^2 [h_R(x)]^{s-4}\,dx,\;\; \delta_0 > 0.$$

Знову використовуючи умову $(\mathbf{A})$, легко отримати оцінку

$$\mathcal{I}_2 := \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta(u\psi(x))\,dx \;\geqslant$$

$$\geqslant\; (a_0 - \delta_1)\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \psi(x)\,dx \;-\; \mu_2(\delta_1) R^{2\kappa_1} \int\limits_\Omega |u|^2 [h_R(x)]^{s-2}\,dx,\;\; \delta_1 > 0.$$

З умови $(\mathbf{B})$ випливає, що

$$\mathcal{I}_3 := \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)\big(|u^{(1)}_{x_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_i} - |u^{(2)}_{x_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_i}\big)u_{x_i}\psi(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant\; b_0 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \big(|u^{(1)}_{x_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_i} - |u^{(2)}_{x_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_i}\big)u_{x_i}[h_R(x)]^s\,dx.$$

Для оцінки інтеграла $\mathcal{I}_4 := \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x)\big(|u^{(1)}_{x_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_i} - |u^{(2)}_{x_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_i}\big)u\psi_{x_i}(x)\,dx$ використаємо нерівність

$$\big(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\big)(\xi - \eta) \leqslant 2^{2-p}|\xi - \eta|^p, \qquad (4)$$

яка є правильною для всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ і $p \in (1, 2]$. Тоді

$$\mathcal{I}_4 \geqslant\; -\delta_2 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \big||u^{(1)}_{x_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_i} - |u^{(2)}_{x_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_i}\big|^{p'}\psi(x)\,dx \;-$$

$$-\;\delta_2 \int\limits_\Omega |u|^2\psi(x)\,dx - \mu_3(\delta_2)\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \Big|b_i(x)\psi_{x_i}(x)[\psi(x)]^{-1/p'-1/2}\Big|^{2p/(2-p)}\,dx,$$

де $\delta_2 > 0$, $p' = p/(p-1)$.

Враховуючи умову $(\mathbf{B})$ та оцінку функції ψ_{x_i}, отримаємо, що

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \Big|b_i(x)\psi_{x_i}(x)[\psi(x)]^{-1/p'-1/2}\Big|^{2p/(2-p)}\,dx \;\leqslant\; \mu_4 R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n}.$$

На підставі нерівності (4) отримуємо

$$\big||u^{(1)}_{x_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_i}-|u^{(2)}_{x_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_i}\big|^{p'}\leqslant 2^{2-p}u_{x_i}\big(|u^{(1)}_{x_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_i}-|u^{(2)}_{x_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_i}\big).$$

Тому

$$\mathcal{I}_4 \;\geqslant\; -2^{2-p}\delta_2\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\big(|u^{(1)}_{x_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_i}-|u^{(2)}_{x_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_i}\big)u_{x_i}\psi(x)\,dx\;-$$

$$-\delta_2\int\limits_{\Omega}|u|^2\psi(x)\,dx\;-\;\mu_5(\delta_2)R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n}.$$

Згідно з (**C**) і нерівністю $|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta)(\xi-\eta)\geqslant 2^{2-r}|\xi-\eta|^{r}$, $\xi,\eta\in\mathbb{R}$, $r>2$, одержимо

$$\mathcal{I}_5:=\int\limits_{\Omega}c(x)\big(|u^{(1)}|^{r-2}u^{(1)}-|u^{(2)}|^{r-2}u^{(2)}\big)u\psi(x)\,dx\;\geqslant\;c_0\int\limits_{\Omega}|u|^{r}\psi(x)\,dx.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $\mathcal{I}_1,\ldots,\mathcal{I}_5$, з (3) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega}\Big[(a_0-\delta_0)\sum_{|\alpha|=2}|D^{\alpha}u|^2+(a_0-\delta_1)\sum_{|\alpha|=1}|D^{\alpha}u|^2+a_1u^2\;+$$

$$+\;(b_0-\delta_2 2^{2-p})\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\big(|u^{(1)}_{x_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_i}-|u^{(2)}_{x_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_i}\big)u_{x_i}+c_0|u|^{r}\Big]\,\psi(x)\,dx\;\leqslant$$

$$\leqslant\;\mu_1(\delta_0)R^{4\kappa}\int\limits_{\Omega}|u|^2[h_R(x)]^{s-4}\,dx+\mu_2(\delta_1)R^{2\kappa_1}\int\limits_{\Omega}|u|^2[h_R(x)]^{s-2}\,dx\;+$$

$$+\;\mu_5(\delta_2)R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n}. \tag{5}$$

У (5) вибираємо $\delta_0=\delta_1=a_0/2$, $\delta_2=b_0 2^{p-3}$.

Нехай виконується умова а) з твердження теореми 1. Враховуючи оцінку $|u|^2+|u|^{r}\geqslant|u|^{q}$, $q\in(2,r)$, з (5) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega}|u|^{q}[h_R(x)]^{s}\,dx\;\leqslant\;\mu_6R^{4\kappa}\int\limits_{\Omega}|u|^2[h_R(x)]^{s-4}\,dx\;+$$

$$+\;\mu_7R^{2\kappa_1}\int\limits_{\Omega}|u|^2[h_R(x)]^{s-2}\,dx\;+\;\mu_8R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n}. \tag{6}$$

Оскільки

$$\mathcal{I}_6:=\mu_6R^{4\kappa}\int\limits_{\Omega}|u|^2[h_R(x)]^{s-4}\,dx\;+\;\mu_7R^{2\kappa_1}\int\limits_{\Omega}|u|^2[h_R(x)]^{s-2}\,dx\;\leqslant$$

$$\leqslant\;\delta_3\int\limits_{\Omega}|u|^{q}[h_R(x)]^{s}\,dx\;+\;\mu_9(\delta_3)\bigg(R^{4\kappa q/(q-2)}\int\limits_{\Omega}[h_R(x)]^{s-4q/(q-2)}\,dx\;+$$

$$+R^{2\kappa_1 q/(q-2)}\int\limits_{\Omega}[h_R(x)]^{s-2q/(q-2)}\,dx\bigg),\;\delta_3>0,$$

то з (6) випливає оцінка

$$\int\limits_{\Omega} |u|^q [h_R(x)]^s\,dx \;\leqslant\; \mu_{10}\Big(R^{(4(\kappa-1)q)/(q-2)+s+n} \;+\; R^{(2(\kappa_1-1)q)/(q-2)+s+n}\Big) +$$

$$+\;\mu_8 R^{(2(\kappa_2-1)p)/(2-p)+s+n}. \tag{7}$$

У випадку, коли виконується умова б) з твердження теореми 1, розглянемо таку оцінку $\mathcal{I}_6$:

$$\mathcal{I}_6 \;\leqslant\; \delta_4 \int\limits_{\Omega} |u|^r [h_R(x)]^s\,dx \;+\; \mu_{11}(\delta_4)\Bigg(R^{4\kappa r/(r-2)} \int\limits_{\Omega} [h_R(x)]^{s-4r/(r-2)}\,dx +$$

$$+\;R^{2\kappa_1 r/(r-2)} \int\limits_{\Omega} [h_R(x)]^{s-2r/(r-2)}\,dx\Bigg) \;\leqslant\; \delta_4 \int\limits_{\Omega} |u|^r [h_R(x)]^s\,dx +$$

$$+\;\mu_{12}\Big(R^{(4(\kappa-1)r)/(r-2)+s+n} \;+\; R^{(2(\kappa_1-1)r)/(r-2)+s+n}\Big),\; \delta_4 > 0.$$

Звідси, враховуючи (5), отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega} |u|^r [h_R(x)]^s\,dx \;\leqslant\; \mu_{13}\Big(R^{(4(\kappa-1)r)/(r-2)+s+n} \;+\; R^{(2(\kappa_1-1)r)/(r-2)+s+n}\Big) +$$

$$+\;\mu_{14} R^{(2(\kappa_2-1)p)/(2-p)+s+n}. \tag{8}$$

Розглянемо одночасно два випадки а) і б). Нехай $R_0 > 1$ — довільне фіксоване число і $R > R_0$. Оскільки

$$\int\limits_{\Omega} |u|^q [h_R(x)]^s\,dx \;\geqslant\; (R-R_0)^s \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u|^q\,dx,\; q \in \mathbb{R},$$

то з (7) і (8) випливають такі дві оцінки:

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} |u|^{\gamma(i)}\,dx \;\leqslant\; \mu_{15}\Big(R^{(4(\kappa-1)\gamma(i))/(\gamma(i)-2)+n} + R^{(2(\kappa_1-1)\gamma(i))/(\gamma(i)-2)+n} +$$

$$+\;R^{(2(\kappa_2-1)p)/(2-p)+n}\Big)\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s,\quad i = 0, 1, \tag{9}$$

де $\gamma(i) = (1-i)q + ir$, $i = 0, 1$. Випадку а) відповідає нерівність з (9) при $i = 0$, випадку б) — нерівність з (9) при $i = 1$. Зауважимо, що

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s = 1, \quad \lim_{q\to+2}\frac{4q(1-\kappa)}{q-2} = \lim_{q\to+2}\frac{2q(1-\kappa_1)}{q-2} = \infty.$$

Отже, на підставі умов теореми ліва частина кожної нерівності (9) може бути зроблена як завгодно малою. Враховуючи довільність R_0, отримаємо твердження теореми. $\diamondsuit$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**) *і, крім того,* $p \in (2n/(n+2), 2)$, $r > 2$, $\kappa, \kappa_1 \in [0, 1)$, $\kappa_2 \in [0, (p(n+2)-2n)/(2p))$, $f_\alpha \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$ *при* $|\alpha| \leqslant 2$. *Тоді, якщо виконується хоча б одна з двох умов:*

а) $a_1 \neq 0$;

б) $r < \begin{cases} 2n/(n-(4-4\kappa)), & n > 4-4\kappa, \\ 2n/(n-(2-2\kappa_1)), & n > 2-2\kappa_1, \end{cases}$

то існує розв'язок нерівності (1).

Д о в е д е н н я. Введемо функції

$$f^k_\alpha(x)=\begin{cases} f_\alpha(x), & x\in\Omega_{k+1},\\ \quad 0\quad , & x\in\Omega\setminus\Omega_{k+1},\end{cases}\quad ,\quad |\alpha|\leqslant 2,\ k\in\mathbb{N}.$$

Розглянемо оператор

$$A(v)=\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}|-1|^\alpha D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)D^\beta v)-$$

$$-\sum_{i=1}^n\big(b_i(x)|v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i}\big)_{x_i}+c(x)|v|^{r-2}v,\ v\in V_{2,\,loc}(\overline{\Omega})\cap L^r_{loc}(\overline{\Omega}).$$

Зважаючи на умови $(\mathbf{A}),(\mathbf{B}),(\mathbf{C})$, неважко показати, що оператор A — псевдомонотонний і коерцитивний. Використовуючи доведення теореми 5.2 [2, с. 385], легко бачити, що існує розв'язок u^k нерівності (1) в області Ω_{k+1} з функцією f^k_α. Продовжимо u^k нулем в $\Omega\setminus\Omega_{k+1}$ і збережемо за нею те саме позначення. Кожна з функцій u^k задовольняє нерівність

$$\int_\Omega\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u^k D^\beta((v-u^k)\psi(x))+\sum_{i=1}^n b_i(x)|u^k_{x_i}|^{p-2}u^k_{x_i}((v-u^k)\psi(x))_{x_i}+$$

$$+c(x)|u^k|^{r-2}u^k(v-u^k)\psi(x)\ -\sum_{|\alpha|\leqslant 2}f^k_\alpha(x)D^\alpha((v-u^k)\psi(x))\Big]\,dx\ \geqslant 0\qquad(10)$$

$\forall\,\psi\in C^2_0(\mathbb{R}^n),\ \psi(x)\geqslant 0,\ \forall\,v\in V_{2,\,loc}(\overline{\Omega})\cap L^r_{loc}(\overline{\Omega}),\ v\in\mathcal{K}.$

Нехай $R>1$ — довільне фіксоване число, $k>R$. Запишемо нерівність (10) для функції u^m, $m>R$, додамо цю нерівність до (10) і виберемо $v=$ $=(u^k+u^m)/2$, $\psi(x)=\zeta_{R,s}(x)$. В результаті отримаємо нерівність

$$\int_\Omega\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u^{k,m}D^\beta(u^{k,m}\zeta_{R,s}(x))+\sum_{i=1}^n b_i(x)\big(|u^k_{x_i}|^{p-2}u^k_{x_i}-|u^m_{x_i}|^{p-2}u^m_{x_i}\big)\times$$

$$\times(u^{k,m}\zeta_{R,s}(x))_{x_i}\ +\ c(x)\big(|u^k|^{r-2}u^k-|u^m|^{r-2}u^m\big)u^{k,m}\zeta_{R,s}(x)\Big]\,dx\ \leqslant$$

$$\leqslant\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\big(f^k_\alpha(x)-f^m_\alpha(x)\big)D^\alpha(u^{k,m}\zeta_{R,s}(x))\,dx,\qquad(11)$$

де $u^{k,m}=u^k-u^m$.

Аналогічно, як при доведенні теореми 1, із (11) отримаємо нерівність

$$\int_\Omega\Big[(a_0-\delta_5)\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u^{k,m}|^2+(a_0-\delta_6)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u^{k,m}|^2+a_1|u^{k,m}|^2+$$

$$+(b_0-\delta_7 2^{2-p})\sum_{i=1}^n\big(|u^k_{x_i}|^{p-2}u^k_{x_i}-|u^m_{x_i}|^{p-2}u^m_{x_i}\big)u^{k,m}_{x_i}+c_0|u^{k,m}|^r\Big]\,\zeta_{R,s}(x)\,dx\ \leqslant$$

$$\leqslant\ \mu_{16}(\delta_5)R^{4\kappa}\int_\Omega|u^{k,m}|^2[h_R(x)]^{s-4}\,dx+\mu_{17}(\delta_6)R^{2\kappa_1}\int_\Omega|u^{k,m}|^2[h_R(x)]^{s-2}\,dx+$$

$$+\mu_{18}(\delta_7)R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n}\ +\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\big(f^k_\alpha(x)-f^m_\alpha(x)\big)D^\alpha(u^{k,m}\zeta_{R,s}(x))\,dx,\qquad(12)$$

де $\delta_5, \delta_6, \delta_7 > 0$. Нехай виконується умова а) з твердження теореми 2. Використовуючи лему 1, легко отримати таку оцінку:

$$\mathcal{I}_7 := \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \big(f_\alpha^k(x) - f_\alpha^m(x)\big) D^\alpha (u^{k,m}\zeta_{R,s}(x))\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big[\sum_{|\alpha|=2} \big(f_\alpha^k(x) - f_\alpha^m(x)\big) D^\alpha u^{k,m}\zeta_{R,s}(x) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} \big(f_\alpha^k(x) - f_\alpha^m(x)\big)\Big(D^{\alpha''}u^{k,m}D^{\alpha'}\zeta_{R,s}(x) \ + \ D^{\alpha'}u^{k,m}D^{\alpha''}\zeta_{R,s}(x)\Big) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} \big(f_\alpha^k(x) - f_\alpha^m(x)\big) u^{k,m} D^\alpha \zeta_{R,s}(x) \ + \sum_{|\alpha|=1} \big(f_\alpha^k(x) - f_\alpha^m(x)\big) D^\alpha u^{k,m}\zeta_{R,s}(x) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=1} \big(f_\alpha^k(x) - f_\alpha^m(x)\big) u^{k,m} D^\alpha \zeta_{R,s}(x) \ + \ \big(f_0^k(x) - f_0^m(x)\big)\ u^{k,m}\zeta_{R,s}(x)\Big]\, dx \ \leqslant$$

$$\leqslant \ \delta_8 \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \big|D^\alpha u^{k,m}\big|^2 \zeta_{R,s}(x)\, dx +$$

$$+ \mu_{19}(\delta_8) \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \big(f_\alpha^k(x) - f_\alpha^m(x)\big)^2 \big(h_R^s(x) + h_R^{s-2}(x) + h_R^{s-4}(x)\big)\, dx, \quad \delta_8 > 0.$$

Якщо виконується умова б) з твердження теореми 2, тоді оцінимо $\mathcal{I}_7$ таким чином:

$$\mathcal{I}_7 \ \leqslant \ \delta_9 \int\limits_\Omega \Big[|u^{k,m}|^r \zeta_{R,s}(x) +$$

$$+ \sum_{0<|\alpha|\leqslant 2} \big|D^\alpha u^{k,m}\big|^2 \zeta_{R,s}(x) \ + \ |u^{k,m}|^2 \big(h_R^{s-2}(x) + h_R^{s-4}(x)\big)\Big]\, dx \ + \mu_{20}(\delta_9)\times$$

$$\times \int\limits_\Omega \Big[\sum_{0<|\alpha|\leqslant 2} \big(f_\alpha^k(x) - f_\alpha^m(x)\big)^2 \big(h_R^s(x) + h_R^{s-2}(x)\big) + \big(f_0^k(x) - f_0^m(x)\big)^{r/(r-1)} \zeta_{R,s}(x)\Big] dx,$$

де $\delta_9 > 0$.

Враховуючи нерівність $|u^{k,m}|^2 + |u^{k,m}|^r \ \geqslant \ |u^{k,m}|^q$, $q \in (2,r)$ і оцінки інтеграла $\mathcal{I}_7$, із (12) отримаємо дві нерівності, які описують випадки а) і б) з твердження теореми 2 відповідно:

$$\int\limits_\Omega \Big[\sum_{0<|\alpha|\leqslant 2} \big|D^\alpha u^{k,m}\big|^2 \ + \ \sum_{i=1}^n \big(|u_{x_i}^k|^{p-2}u_{x_i}^k - |u_{x_i}^m|^{p-2}u_{x_i}^m\big) u_{x_i}^{k,m} +$$

$$+ (1-i)\big(|u^{k,m}|^2 + |u^{k,m}|^q\big) \ + \ |u^{k,m}|^r \Big]\, \zeta_{R,s}(x)\, dx \ \leqslant$$

$$\leqslant \ \mu_{21}(1-i)\Big(R^{(4(\kappa-1)q)/(q-2)+s+n} + R^{(2(\kappa_1-1)q)/(q-2)+s+n}\Big) +$$

$$+\mu_{22}i\Big(R^{(4(\kappa-1)r)/(r-2)+s+n} + R^{(2(\kappa_1-1)r)/(r-2)+s+n}\Big) + \mu_{23}R^{(2(\kappa_2-1)p)/(2-p)+s+n} +$$

$$+\mu_{24}R^s \int\limits_{\Omega_R} \Big[\sum_{0<|\alpha|\leqslant 2} \big|f_\alpha^k(x) - f_\alpha^m(x)\big|^2 + (1-i)\big|f_0^k(x) - f_0^m(x)\big|^2 +$$

$$+\, i\left|f_0^k(x)-f_0^m(x)\right|^{r/(r-1)}\Big]\,dx, \quad i=0,1. \tag{13}$$

Тут і надалі, для випадку а) беремо $i=0$, для випадку б) — $i=1$. Нехай $R>R_0>1$. Тоді з (13) випливають оцінки

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}}\Big[\sum_{0<|\alpha|\leqslant 2}\left|D^\alpha u^{k,m}\right|^2 \;+\; (1-i)|u^{k,m}|^2+|u^{k,m}|^r\Big]\,dx \;\leqslant$$

$$\leqslant\; \mu_{25}\Big(\frac{R}{R-R_0}\Big)^s\Big[(1-i)\Big(R^{(4(\kappa-1)q)/(q-2)+n}+R^{(2(\kappa_1-1)q)/(q-2)+n}\Big)+$$

$$+\, i\Big(R^{(4(\kappa-1)r)/(r-2)+n}+R^{(2(\kappa_1-1)r)/(r-2)+n}\Big) \;+\; R^{(2(\kappa_2-1)p)/(2-p)+n}+$$

$$+\int\limits_{\Omega_R}\Big(\sum_{0<|\alpha|\leqslant 2}\left|f_\alpha^k(x)-f_\alpha^m(x)\right|^2 \;+\; (1-i)\left|f_0^k(x)-f_0^m(x)\right|^2+$$

$$+\, i\left|f_0^k(x)-f_0^m(x)\right|^{r/(r-1)}\Big)\,dx\Big], \quad i=0,1. \tag{14}$$

Оскільки $\lim\limits_{q\to+2} q/(q-2)=+\infty$, то з умов теореми 2 випливає, що існує таке $q_0\in(2,r)$, що $\dfrac{4(\kappa-1)\gamma_1(i)}{\gamma_1(i)-2}+n<0$, $\quad \dfrac{2(\kappa_1-1)\gamma_1(i)}{\gamma_1(i)-2}+n<0$, $\quad i=0,1$, де $\gamma_1(i)=(1-i)q_0+ir$, $i=0,1$ і, крім того, $\dfrac{2(\kappa_2-1)p}{2-p}+n<0$. Нехай $\varepsilon>0$ — довільне фіксоване число. Існує таке R_1, $R_1>R_0$, що

$$\mu_{25}\Big(\frac{R_1}{R_1-R_0}\Big)^s\Big[(1-i)\Big(R_1^{(4(\kappa-1)q)/(q-2)+n}+R_1^{(2(\kappa_1-1)q)/(q-2)+n}\Big)+$$

$$+\, i\Big(R_1^{(4(\kappa-1)r)/(r-2)+n}+R_1^{(2(\kappa_1-1)r)/(r-2)+n}\Big) \;+\; R_1^{(2(\kappa_2-1)p)/(2-p)+n}\Big]<\frac{\varepsilon}{3},$$

$i=0,1$. Оскільки послідовність $\{f_\alpha^k\}$ фундаментальна в просторі $L^2(\Omega_{R_1})$, $|\alpha|\leqslant 2$, то існує таке $k_0\in\mathbb{N}$, що для всіх $k,m>k_0$

$$\mu_{25}\Big(\frac{R_1}{R_1-R_0}\Big)^s\int\limits_{\Omega_{R_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left|f_\alpha^k(x)-f_\alpha^m(x)\right|^2 dx<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\mu_{25}\Big(\frac{R_1}{R_1-R_0}\Big)^s\int\limits_{\Omega_{R_1}}\left|f_0^k(x)-f_0^m(x)\right|^{r/(r-1)} dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Отже, з (14) випливає, що послідовність $\{u^k\}$ фундаментальна в просторі $V_2(\Omega_{R_0})\cap L^r(\Omega_{R_0})$. Оскільки R_0 довільне, то $u^k\to u$ сильно в $V_{2,\,loc}(\overline{\Omega})\cap$ $\cap L^r_{loc}(\overline{\Omega})$ при $k\to\infty$. Перейшовши в (13) до границі при $k\to\infty$, отримаємо твердження теореми. $\diamondsuit$

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 608 с.
3. *Bernis Francisco.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Rational Mech. Anal. – 1989. – **106**, No 3. – P. 217–241.
4. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J. L.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ without growth restrictions on the data // J. of Differential Equations. – 1993. – **105**. – P. 334–363.

5. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity// Appl. Math. Optim. – 1984. – **12**, No 3. – P. 271–282.
6. *Gallouet T., Morel J. M.* The equation $-\triangle u + |u|^{\alpha-1}u = f$, for $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ // Nonlinear Anal. – 1987. – **11**. – P. 893–912.
7. *Kourugenis N., Papageorgiou N.* Nonlinear hemivariational inequalities of second order using the method of upper-lower solutions // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – **131**, No 8. – P. 2359–2369.
8. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Integral estimate for solutions of some degenerate local variational inequalities // Appl. Anal. – 1999. – **73**, No 3–4. – P. 425–447.
9. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Boundness of solutions of degenerate nonlinear elliptic variational inequalities // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 1999. – **35**, No 8. – P. 987–999.
10. *Liu Zh.–H.* On quasilinear elliptic hemivariational inequalities of higher order // Acta Math. Hung. – 1999. – **85**, No 1–2. – P. 1–8.
11. *Liu Zh.-H.* Elliptic variational hemivariational inequalities // Appl. Math. Lett. – 2003. – **16**, No 6. – P. 871–876.
12. *Simon L.* On uniqueness, regularity and stability of solutions of strongly nonlinear elliptic variational inequalities // Acta Math. Hungar. – 1990. – **55**, No 3–4. – P. 379–392.

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Доказано существование и единственность решения нелинейного эллиптического вариационного неравенства в неограниченной области без условий на бесконечности. В частности, исходные данные могут неограниченно возрастать, а также решение единственно без требований к его поведению на бесконечности.

ELLIPTIC VARIATIONAL INEQUALITY IN UNBOUNDED DOMAINS

It is proved the existence and uniqueness of a solution for some nonlinear elliptic variational inequality in an unbounded domain without conditions at the infinity. In particular, the growth of the data at the infinity need not to be limited and a solution of the inequality is unique without any restriction of its behavior at the infinity.

Одержано
23.09.05

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів