УДК 517.925.4

З. М. Шеремета

ВЛАСТИВОСТІ ПОХІДНИХ ЦІЛОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Досліджено близькість до опуклості та обмеженість l-індексу послідовних похідних цілого розв'язку $f(z) = -b/\gamma + z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ диференціального рівняння $zw'' + \beta w' + \gamma w = 0$.

1. Вступ. Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція f називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ — опукла область. Відомо [1, с. 203], що умова $\mathrm{Re}\,\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0\,(z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для опуклості f. Функція f називається [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ така, що $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0\,(z \in \mathbb{D})$. Близька до опуклої функція f характеризується тим, що зовнішність G області $f(\mathbb{D})$ можна заповнити променями L, що виходять з ∂G і повністю лежать в G. Кожна близька до опуклої функція є однолистою і тому $f'(0) \neq 0$. Для додатної неперервної на $[0, +\infty)$ функції l ціла функція f називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : 0 \le k \le N\right\}. \tag{1}$$

Найменше з таких чисел N називається l-індексом і позначається через $N(f, l)$. Якщо $G \subset \mathbb{C}$ та існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що нерівність (1) правильна для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$, то f називатимемо функцією обмеженого l-індексу на (або в) G, а l-індекс позначатимемо через $N(f, l; G)$.

Нарешті, ціла функція f називається [7, с. 49] функцією обмеженого l-розподілу значень, якщо існує $p \in \mathbb{N}$ таке, що для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$ і всіх $w \in \mathbb{C}$ рівняння $f(z) = w$ має в крузі $\{z : |z - z_0| \le 1/l(|z_0|)\}$ щонайбільше p коренів. У [3] доведено таку теорему.

Теорема А. *Якщо $\beta = -\gamma_2 > -2$ і $-(2+\beta) \le 2\gamma < 0$, то диференціальне рівняння*

$$z^2 w'' + \beta z w' + (\gamma z + \gamma_2) w = 0 \tag{2}$$

має цілий розв'язок $f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k$ такий, що $f, f', f'', \ldots$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1))\sqrt{|\gamma_1| r}, \quad r \to \infty. \tag{3}$$

Для комплексних β, γ, γ_2 в [5] доведено наступну теорему.

Теорема Б. *Висновок теореми А правильний, якщо $\gamma \neq 0$ і $2|\gamma|/(2-|\beta|) \le 4/5$.*

Обмеженість l-індексу у випадку дійсних β, γ, γ_2 досліджено в праці [4], де доведено наступну теорему.

Теорема В. *За умов теореми А вказаний в ній цілий розв'язок f є обмеженого l-індексу з $l(x) = (5 + \beta)\min\{1, 1/\sqrt{x}\}$, причому $N(f, l) \le \max\{N, P\}$, де $N = \left[\dfrac{\ln f(2) - \ln f(1/2)}{\ln 3}\right] + 1$ і*

$$P = \left[\frac{\ln f(3) - \ln f(1/2) + \ln (5 + \beta_1)^{N+1} + \ln(3e^4 N!)}{\ln (2(5 + \beta_1))}\right] + 1.$$

Дослідженню обмеженості l–індексу цілого розв'язку дещо іншого диференціального рівняння з дійсними параметрами присвячена стаття [2].

Легко показати, що ціла функція $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ є розв'язком рівняння (2) тоді й тільки тоді, коли $\gamma_2 f_0=0$, $(\beta+\gamma_2)f_1+\gamma f_0=0$ і $(n(n+\beta-1)+\gamma_2)f_n+$ $+\gamma f_{n-1}=0$ $(n\geq 2)$. Звідси випливає, що або $f_0=0$, або $\gamma_2=0$. Як видно з теорем А і Б, в [3, 5] досліджено випадок, коли $f_0=0$.

Тут вивчатимемо випадок, коли $\gamma_2=0$. Тоді $f_0=-\beta f_1/\gamma$, рівняння (2) можна переписати у вигляді

$$zw''+\beta w'+\gamma w=0, \tag{4}$$

а цілий розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді

$$f(z)=-b/\gamma+z+\sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n, \quad \text{де} \quad f_n=\frac{-\gamma}{n(n+\beta-1)}f_{n-1}, \quad n\geq 2. \tag{5}$$

Для функції (5) буде отримано загальніші результати, ніж в [2]. Крім опуклості і близькості до опуклості всіх похідних функції (5), буде досліджено обмеженість l–індексу та l–розподілу значень кожної похідної $f^{(k)}\,(k\geq 0)$.

Зауважимо, що вираз для f_n втрачає зміст при $n=2$, якщо $\beta=-1$. Тому надалі вважатимемо, що $\beta>-1$ у випадку дійсних параметрів β та γ і $|\beta|<1$ у випадку комплексних β та γ.

2. Випадок дійсних параметрів. У цьому випадку для дослідження близькості до опуклості будемо використовувати наступний результат Александера [6, с. 10].

Лема 1. *Якщо* $a(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *і*

$$1\geq 2a_2\geq\cdots\geq na_n\geq(n+1)a_{n+1}\geq\cdots>0, \tag{7}$$

то функція a *близька до опуклої в* $\mathbb{D}$.

Оскільки функція (5) є близькою до опуклої тоді й тільки тоді, коли такою є функція $F_0(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n$, то для використання леми 1 з $a_n=f_n$ необхідно накласти умови $\gamma<0$ (коефіцієнти повинні бути додатними) і $1+$ $+\beta\geq-\gamma$ (тільки за такої умови $1\geq 2f_2$). Правильна така теорема.

Теорема 1. *Якщо* $\beta>-1$ *і* $-(1+\beta)\leq\gamma<0$, *то диференціальне рівняння* (4) *має цілий розв'язок* (5) *такий, що правильна асимптотична рівність* (3), *а кожна похідна* $f^{(k)}\,(k\geq 0)$ *є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$ *і обмеженого* l_k *–індексу в* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ *з* $l_k(x)=(k+2+\beta)/\sqrt{x}$ $(x\geq 1)$, *і* $N(f^{(k)},l_k;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D})\leq 1$.

Д о в е д е н н я. Оскільки з (6) за умови $-(1+\beta)\leq\gamma<0$ легко випливають нерівності (7) з $a_n=f_n$, то функція (5) є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

Нехай $k\geq 1$. Оскільки $f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)} z^n$, де $f_n^{(k)}=\dfrac{(n+k)!}{n!}f_{n+k}>0$, то $f^{(k)}$ є близькою до опуклої тоді й тільки тоді, коли такою є функція

$$F_k(z)=\frac{f^{(k)}(z)-f_0^{(k)}}{f_1^{(k)}}=z+\sum_{n=2}^{\infty} f_{n,k} z^n, \tag{8}$$

де $f_{0,k}=0$, $f_{1,k}=1$, $f_{n,k}=f_n^{(k)}/f_1^{(k)}$, тобто $f_{n,k}=\dfrac{(n+k)!}{n!(k+1)!}\,\dfrac{f_{n+k}}{f_{1+k}}$. Звідси та з (6) маємо

$$\begin{aligned}
f_{n,k}&=\frac{(n+k)!}{n!(k+1)!f_{1+k}}\,\frac{|\gamma|}{(n+k)(n+k+\beta-1)}f_{n+k-1}=\\
&=\frac{(n+k)!}{n!(k+1)!f_{1+k}}\,\frac{|\gamma|}{(n+k)(n+k+\beta-1)}\,\frac{f_{n-1,k}(n-1)!(k+1)!f_{1+k}}{(n-1+k)!}=\\
&=\frac{|\gamma|}{n(n+k+\beta-1)}f_{n-1,k},\quad n\geq 2.
\end{aligned}$$

Звідси за умови $-(1+\beta)\leq\gamma<0$ легко випливають нерівності (7) з $a_n=f_{n,k}$, а, отже, всі $f^{(k)}$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями.

Перейдемо до доведення обмеженості l–індексу функції (5) та її похідних в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$. Спочатку зробимо декілька зауважень, що випливають безпосередньо з означення [7, с. 23, 51].

Зауваження 1. Якщо f — ціла функція обмеженого l–індексу в G і $a=\mathrm{const}\neq 0$, то функція $F(z)=af(z)$ є обмеженого l–індексу в G і $N(F,l;G)=N(f,l;G)$.

Зауваження 2. Якщо f' обмеженого l–індексу в G, то f обмеженого l–індексу в G і $N(f,l;G)\leq N(f',l;G)+1$.

Зауваження 3. Якщо $l_1(x)\leq l_2(x)$ і f є обмеженого l_1–індексу N в G, то f є обмеженого l_2–індексу меншого або рівного N в G.

Підставляючи (5) в (4), для $|z|\geq 1$ отримуємо

$$\begin{aligned}
\frac{|f''(z)|(\sqrt{|z|})^2}{2!(2+\beta)^2}&\leq\frac{|\beta|}{2(2+\beta)\sqrt{|z|}}\,\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{1!(2+\beta)}+\frac{|\gamma|}{2(2+\beta)^2}|f(z)|<\\
&<\max\left\{\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{1!(2+\beta)},\,|f(z)|\right\}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Підставимо (5) в (4) і продиференціюємо $m\geq 1$ раз. Тоді

$$zf^{(m+2)}(z)+(m+\beta)f^{(m+1)}(z)+\gamma f^{(m)}(z)\equiv 0, \qquad (11)$$

звідки для $|z|\geq 1$

$$\begin{aligned}
&\frac{|f^{(m+2)}(z)|(\sqrt{|z|})^{m+2}}{(m+2)!(2+\beta)^{m+2}}\leq\frac{m+\beta}{(m+2)(2+\beta)\sqrt{|z|}}\,\frac{|f^{(m+1)}(z)|(\sqrt{|z|})^{m+1}}{(m+1)!(2+\beta)^{m+1}}+\\
&+\frac{|\gamma|}{(m+2)(m+1)(2+\beta)^2}\,\frac{|f^{(m)}(z)|(\sqrt{|z|})^{m}}{(m+1)!(2+\beta)^{m}}\leq\\
&\leq\left(\frac{m+\beta}{(m+2)(2+\beta)}+\frac{1+\beta}{(m+2)(m+1)(2+\beta)^2}\right)\times\\
&\times\max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|(\sqrt{|z|})^{j}}{j!(2+\beta)^{j}}:\,m\leq j\leq m+1\right\}<\\
&<\max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|(\sqrt{|z|})^{j}}{j!(2+\beta)^{j}}:\,m\leq j\leq m+1\right\}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

З (10) і (12) випливає, що f є обмеженого l_0–індексу в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ з $l_0(x)=$ $=(2+\beta)/\sqrt{x}$ $(x\geq 1)$ і $N(f,l_0;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D})\leq 1$. Для $n\geq 0$ і $k\geq 1$ тотожність (11) можна переписати у вигляді

$$zf^{(k+n+2)}(z)+(k+n+\beta)f^{(k+n+1)}(z)+\gamma f^{(k+n)}(z)\equiv 0, \qquad (13)$$

звідки для $|z| \geq 1$

$$\frac{|f^{(k+n+2)}(z)|(\sqrt{|z|})^{n+2}}{(n+2)!(k+2+\beta)^{n+2}} \leq \frac{k+n+\beta}{(n+2)(k+2+\beta)\sqrt{|z|}} \frac{|f^{(k+n+1)}(z)|(\sqrt{|z|})^{n+1}}{(n+1)!(k+2+\beta)^{n+1}} +$$
$$+ \frac{|\gamma|}{(n+2)(n+1)(k+2+\beta)^2} \frac{|f^{(k+n)}(z)|(\sqrt{|z|})^{n}}{(n+1)!(k+2+\beta)^{n}} <$$
$$< \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|(\sqrt{|z|})^{j}}{j!(k+2+\beta)^{j}} : n \leq j \leq n+1\right\}.$$

Звідси випливає, що функція $f^{(k)}$ $(k \geq 1)$ є обмеженого l_k –індексу в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ з $l_k(x) = (k+2+\beta)/\sqrt{x}$ $(x \geq 1)$ і $N(f^{(k)}, l_k; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}) \leq 1$.

Нарешті, зауважимо, що для функції (5) доведення асимптотичної рівності (3) таке ж, як в [1]. Теорему 1 доведено. $\diamondsuit$

3. Випадок комплексних параметрів. У цьому випадку нам будуть потрібними наступні дві леми.

Лема 2. *Якщо* $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| < 1$, *то функція* $a(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *є близькою до опуклої* [5].

Лема 3. *Якщо* $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \alpha < 1$, *то функція* $a(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *є обмеженого* l *–індексу в* $\overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ *з* $l(x) \equiv 2$ *і* $N(a, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq [2\alpha/(1-\alpha)] + 1$.

Д о в е д е н н я. Для $|z| \leq 1$ маємо

$$|a'(z)| = \left|1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| \geq 1 - \left|\sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| = 1-\alpha > 0, \quad (14)$$

$$|a'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| = 1+\alpha. \quad (15)$$

З іншого боку, для $|z| \leq 1/2$ і $m \geq 1$ за формулою Коші

$$|a^{(m+1)}(z)| = \left|\frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - z| = 1/2} \frac{a'(\tau)d\tau}{(\tau - z)^{m+1}}\right| \leq m! 2^m \max\{|a'(z)| : |z| \leq 1\}. \quad (16)$$

З (14)–(16) випливає, що для $z \in \overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ і $m \geq 2\alpha/(1-\alpha)$

$$\frac{|a^{(m+1)}(z)|}{(m+1)! 2^{m+1}} \leq \frac{\max\{|a'(z)| : |z| \leq 1\}}{2(m+1)} \leq \frac{1+\alpha}{2(m+1)} = \frac{1+\alpha}{2(m+1)(1-\alpha)}(1-\alpha) \leq$$
$$\leq \frac{1+\alpha}{(m+1)(1-\alpha)} \frac{|a'(z)|}{2} \leq \frac{|a'(z)|}{2} \leq \max\left\{\frac{|a'(z)|}{2}, |a(z)|\right\},$$

тобто функція a є обмеженого l –індексу в $\overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ з $l(x) \equiv 2$ і $N(a, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq$ $\leq [2\alpha/(1-\alpha)] + 1$. Лему 3 доведено. $\diamondsuit$

Використовуючи леми 2 і 3, доведемо тепер наступну теорему.

Теорема 2. *Якщо* $|\beta| < 1$ *і* $|\gamma| \leq (1-|\beta|)/2$, *то диференціальне рівняння* (4) *має цілий розв'язок* (5) *такий, що правильна асимптотична рівність* (3), *а кожна похідна* $f^{(k)}$ $(k \geq 0)$ *є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$, *обмеженого* l_k *–індексу та обмеженого* l_{k+1} *–розподілу значень з* $l_k(x) = (k+2)\min\{1, 1/\sqrt{x}\}$ *і* $N(f^{(k)}, l_k) \leq 4$, *причому* $N(f^{(k)}, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq 4$ *і* $N(f^{(k)}, (k+2)/\sqrt{x}; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/2}) \leq 1$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $|\beta|<1,$ то з (6) для $n\geq 2$ маємо

$$|f_n| = \left|\prod_{j=2}^{n}\frac{-\gamma}{j(j+\beta-1)}\right| \leq \frac{|\gamma|^{n-1}}{2(1-|\beta|)}\prod_{j=3}^{n}\frac{1}{j(j-2+1-|\beta|)} \leq$$
$$\leq \frac{|\gamma|^{n-1}}{2(1-|\beta|)}\prod_{j=3}^{n}\frac{1}{j(j-2)} = \frac{|\gamma|^{n-1}}{(1-|\beta|)n!(n-2)!}.$$

Тому за умови $|\gamma|\leq(1-|\beta|)/2\leq 1/2$ для функції F_0 отримуємо

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|f_n| \leq \frac{|\gamma|}{1-|\beta|}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n|\gamma|^{n-2}}{n!(n-2)!} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\gamma|^k}{(k+1)!k!} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{48}+\frac{1}{1152}+\dots\right) < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{48}+\frac{2}{1152}\right) = \frac{367}{576},$$

тобто виконуються умови лем 2 і 3 з $\alpha=\frac{367}{576}$. За лемою 2 функція F_0 і, отже, функція f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, а за лемою 3 є обмеженого l–індексу в $\overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ з $l(x)\equiv 2$ і $N(f,2;\overline{\mathbb{D}}_{1/2})\leq[2\alpha/(1-\alpha)]+1=4.$

Для функції $F_k,$ $k\geq 1,$ з (9) і (6) отримуємо

$$|f_{n,k}| = \frac{(n+k)!}{n!(k+1)!}\left|\prod_{j=k+2}^{k+n}\frac{-\gamma}{j(j+\beta-1)}\right| \leq \frac{(n+k)!|\gamma|^{n-1}(k+1)!(k-1)!}{n!(k+1)!(k+n)!(k+n-2)!} =$$
$$= \frac{|\gamma|^{n-1}(k-1)!}{n!(k+n-2)!} \leq \frac{|\gamma|^{n-1}}{n!(n-2)!}.$$

Тому $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n|f_{n,k}| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\gamma|^{n-1}}{(n-1)!(n-2)!} = |\gamma|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\gamma|^k}{(k+1)!k!} \leq \frac{367}{576},$ звідки, як вище, випливає, що функція F_k і, отже, функція $f^{(k)}$ є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ і обмеженого l–індексу в $\overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ з $l(x)\equiv 2$ і $N(f^{(k)},2;\overline{\mathbb{D}}_{1/2})\leq 4.$

Дослідимо тепер обмеженість l–індексу в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/2}.$ Підставляючи (5) в (4) і враховуючи умови $|\beta|<1$ і $|\gamma|\leq(1-|\beta|)/2\leq 1/2,$ для $|z|\geq 1/2,$ як у доведенні (10), отримуємо

$$\frac{|f''(z)|(\sqrt{|z|})^2}{2!2^2} \leq \frac{1}{4\sqrt{|z|}}\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{1!2} + \frac{1}{8}|f(z)| \leq \max\left\{\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{1!2},\ |f(z)|\right\}, \tag{17}$$

а з (11) отримуємо

$$\frac{|f^{(m+2)}(z)|(\sqrt{|z|})^{m+2}}{(m+2)!2^{m+2}} \leq \frac{(m+1)\sqrt{2}}{2(m+2)}\frac{|f^{(m+1)}(z)|(\sqrt{|z|})^{m+1}}{(m+1)!2^{m+1}} + \tag{18}$$
$$+\frac{1}{8(m+2)(m+1)}\frac{|f^{(m)}(z)|(\sqrt{|z|})^m}{(m+1)!2^m} \leq \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|(\sqrt{|z|})^j}{j!2^j}\ :\ m\leq j\leq m+1\right\}.$$

З (17) і (18) випливає, що f є обмеженого l–індексу в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/2}$ з $l(x)= =2/\sqrt{x}$ $(x\geq 1/2)$ і $N(f,2/\sqrt{x};\mathbb{C}\setminus\mathbb{D})\leq 1.$

Для $n\geq 0$ і $k\geq 1$ з (13) для $|z|\geq 1$ дістаємо

$$\frac{|f^{(k+n+2)}(z)|(\sqrt{|z|})^{n+2}}{(n+2)!(k+2)^{n+2}} \leq \frac{(k+n+1)\sqrt{2}}{(n+2)(k+2)}\frac{|f^{(k+n+1)}(z)|(\sqrt{|z|})^{n+1}}{(n+1)!(k+2)^{n+1}} +$$
$$+\frac{1}{2(n+2)(n+1)(k+2)^2}\frac{|f^{(k+n)}(z)|(\sqrt{|z|})^n}{(n+1)!(k+2)^n} \leq$$
$$\leq \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|(\sqrt{|z|})^j}{j!(k+2)^j}\ :\ n\leq j\leq n+1\right\},$$

звідки випливає, що функція $f^{(k)}$ $(k \geq 1)$ є обмеженого l–індексу в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}$ з $l(x) = (k+2)/\sqrt{x}$ $(x \geq 1/2)$ і $N(f^{(k)}, (k+2)/\sqrt{x}; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leq 1$.

Приймемо $l_k(x) = (k+2) \min\{1, 1/\sqrt{x}\}$. Оскільки $N(f^{(k)}, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq 4$ і $N(f^{(k)}, (k+2)/\sqrt{x}; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leq 1$, то (див. зауваження 3) $N(f^{(k)}, l_k) \leq 4$, тобто кожна похідна $f^{(k)}\,(k \geq 0)$ є обмеженого l_k–індексу.

Нарешті, функція l_k задовольняє умову $l(x + O(1/l(x))) = O(l(x))$, $x \to \to +\infty$, а за такої умови [7, с. 49] ціла функція f є обмеженого l–розподілу значень тоді й тільки тоді, коли f' є обмеженого l–індексу. Звідси випливає, що кожна похідна $f^{(k)}\,(k \geq 0)$ є обмеженого l–розподілу значень. Теорему 2 повністю доведено. $\diamondsuit$

Зауважимо, що ціла функція $w = \cos\sqrt{z}$ є розв'язком рівняння (4) з $\beta = 1/2$ та $\gamma = 1/4$, і до неї можна застосувати теорему 2.

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
2. *Заболоцький М. В., Шеремета З. М.* Про обмеженість індексу цілого розв'язку одного диференціального рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 2. – С. 181–185.
3. *Шеремета З. М.* Про близькість до опуклості цілих розв'язків одного диференціального рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 54–56.
4. *Шеремета З. М.* Про обмеженість l–індексу цілого розв'язку одного диференціального рівняння // Міжнар. конф. „Компл. аналіз і застосування" (Львів, 26–29 травня 2003 р.). Тези доп. – Львів, 2003. – С. 82–83.
5. *Шеремета З. М., Шеремета М. Н.* Близость к выпуклости целых решений одного дифференциального уравнения //Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 4. – С. 477–481.
6. *Goodman A. W.* Univalent function. Vol. II. – Mariner Publishing Co. – 1983. – 158 p.
7. *Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded index. - Lviv: VNTL Publishers, 1999. – 141 p.

СВОЙСТВА ПРОИЗВОДНЫХ ЦЕЛОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследованы близость к выпуклости и ограниченность l–индекса последовательных производных целого решения $f(z) = -b/\gamma + z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ дифференциального уравнения $zw'' + \beta w' + \gamma w = 0$.

PROPERTIES OF THE DERIVATIVES OF AN ENTIRE SOLUTION OF A DIFFERENTIAL EQUATION

Close-to-convexity and l–index boundedness of the succesive derivatives of the entire solution $f(z) = -b/\gamma + z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n$ of the differential equation $zw'' + \beta w' + \gamma w = 0$ are investigated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.09.05