УДК 517.5

І. Е. Чижиков

УЗАГАЛЬНЕННЯ ОДНІЄЇ ТЕОРЕМИ ГАРДІ–ЛІТТЛВУДА

Для аналітичних і гармонічних функцій, представлених узагальненим інтегралом Пуассона–Стільтьєса, описано зростання L_p –норм у термінах міри Стільтьєса.

Нехай $\psi\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$. Через BV та L^p позначатимемо класи функцій обмеженої зміни та інтегровних в p–му степені на $[-\pi,\pi]$ відповідно.

Нехай $\omega(\delta,\psi)=\sup\{|\psi(x)-\psi(y)|:x,y\in[-\pi,\pi],|x-y|<\delta\}$, $\delta>0$,— модуль неперервності функції ψ. Якщо $\psi\in L^p$, $p\ge 1$, то інтегральним модулем неперервності називається $\omega_p(\delta,\psi)=\sup\limits_{0\le h\le\delta}\left(\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\psi(x+h)-\psi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Як і в [3], скажемо, що $\psi\in\Lambda_\gamma$, якщо $\omega(\delta,\psi)=O(\delta^\gamma)$ $(\delta\downarrow 0)$ і $\psi\in\Lambda_\gamma^p$, якщо $\psi\in L^p$ і $\omega_p(\delta,\psi)=O(\delta^\gamma)$, $(\delta\downarrow 0)$. Зауважимо, що, якщо ψ неперервна, то $\omega_p(\delta,\psi)\to\omega(\delta,\psi)$ при $p\to\infty$, отже, $\Lambda_\gamma^\infty=\Lambda_\gamma$ при $\gamma>0$. Крім того, при $p>1$ $\Lambda_1^p=W_1^p$— клас функцій ψ, для яких $\psi'\in L^p$, а $\Lambda_1^1=BV$ [4 (гл.3), 6].

Нагадаємо, що аналітична в $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ функція $f(z)$ належить до класу Гарді H^p, якщо $\sup_{0<r<1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi<+\infty$.

Зауваження 1. Добре відомо [1, 3], що $f\in H^p$, $p>1$ тоді й лише тоді, коли для деякої $\tilde f\in L^p$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}S_0(ze^{-it})\tilde f(t)dt+i\,\mathrm{Im}\,f(0),\tag{1}$$

де $S_0(z)=(1+z)/(1-z)$ — ядро Шварца. При цьому м.с. $\tilde f(t)=\lim_{r\uparrow 1}\mathrm{Re}\,f(re^{it})$.

Означимо $M_p(r,\varphi)=\left(\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi(re^{it})|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, де φ— аналітична (гармонічна) в $\mathbb{D}$.

Г. Гарді та Дж. Літтлвуд довели наступне твердження [7, теореми 40, 48].

Теорема А. *Нехай f аналітична в $\mathbb{D}$, $p\in[1,+\infty]$, $0<\gamma\le 1$. Для того щоб $F\in\Lambda_\gamma^p$, де $F(t)=f(e^{it})$, необхідно і достатньо, щоб*

$$M_p(r,f')=O((1-r)^{\gamma-1}),\quad r\uparrow 1.\tag{2}$$

Зрозуміло, що за умов попередньої теореми $f\in H^p$. Крім того, згідно із зауваженням 1, необхідні та достатні умови теореми А рівносильні до формули (1) з $\tilde f\in\Lambda_\gamma^p$ при $p>1$. Цей результат може бути переформульований для гармонічних функцій. Нехай $P_0(r,t)=\mathrm{Re}\,S(re^{it})$ — ядро Пуассона.

Теорема B. *Нехай u гармонічна в $\mathbb{D}$, $p\in(1,+\infty]$, $0<\gamma\le 1$. Для того щоб*

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_0(r,\varphi-t)\tilde u(t)dt\tag{3}$$

для деякої $\tilde{u} \in \Lambda_{\gamma}^{p}$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$M_p(r, u'_{\varphi}) = O((1-r)^{\gamma-1}), \quad r \uparrow 1. \tag{4}$$

Справді, нехай $p > 1$. Нехай $v(z)$ — спряжена гармонічна функція до u, $f = u + iv$ аналітична в $\mathbb{D}$. За теоремою Рісса та умовами Коші–Рімана кожна з величин $M_p(r, v'_{\varphi})$, $M_p(r, v'_r)$, $M_p(r, u'_r)$ має порядок $O((1-r)^{\gamma-1})$ при $r \uparrow 1$. Отже, умови (2) та (4) рівносильні. Крім того, добре відомо, що (1) рівносильно до (3). Як наслідок отримуємо рівносильність теорем А та В при $p > 1$.

Зазначимо, що функції вигляду (3) задовольняють умову $B(r, u) = M_{\infty}(r, u) = O((1-r)^{-1})$, $r \uparrow 1$.

Дробовий інтеграл порядку $\alpha > 0$ [2] для $h\colon (0, b) \to \mathbb{R}$ визначається за формулами $(r \in (0, b))$:

$$h_{\alpha}(r) = D^{-\alpha} h\,(r) = \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int\limits_{0}^{r} (r - x)^{\alpha-1}\, h\,(x)\, dx\ , \qquad D^{0} h\,(r) \equiv h\,(r)\ ,$$
$$D^{\alpha} h\,(r) = \frac{d^p}{dr^p} \left\{ D^{-(p-\alpha)} h\,(r) \right\}, \qquad \alpha \in (p-1; p]\,, \qquad p \in \mathbb{N},$$

де $\Gamma\,(\alpha)$ — функція Ейлера; h_{α} неперервна при $\alpha \geq 1$ і збігається з первісними відповідного порядку при $\alpha \in \mathbb{N}$.

Якщо u — гармонічна функція в $\mathbb{D}$, $\alpha \geq 0$, приймемо $u_{\alpha}\left(re^{i\varphi}\right) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} u\left(re^{i\varphi}\right)$, де дробовий інтеграл береться за змінною r. Зауважимо, що u_{α} гармонічна в $\mathbb{D}$.

Нехай $S_{\alpha}\,(z) = \Gamma\,(1+\alpha) \left(\dfrac{2}{(1-z)^{\alpha+1}} - 1 \right)$, $P_{\alpha}\,(r, t) = \mathrm{Re} S_{\alpha}\left(re^{it}\right)$.

Тоді $P_0\,(r, t)$ є ядром Пуассона, крім того, $P_{\alpha}\,(r, t) = D^{\alpha}\left(r^{\alpha} P_0\,(r, t)\right)$.

Відомо таке параметричне зображення гармонічних в крузі функцій скінченного порядку.

Теорема C [2, теорема 9.10]. *Нехай* $\alpha > -1$, *тоді*

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_{0}^{2\pi} |u_{\alpha}(re^{i\varphi})|\, d\varphi = M_{\alpha} < +\infty, \tag{5}$$

тоді й лише тоді, коли

$$u(re^{i\varphi}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha}(r, \varphi - \theta)\, d\psi(\theta), \tag{6}$$

де $\psi \in BV[-\pi, \pi]$. *При цьому* $\psi(\theta) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{-\pi}^{\theta} u_{\alpha}(r_n e^{i\theta})\, d\theta$ *для деякої послідовності* $r_n \uparrow 1$.

Виникають такі задачі:

1) знайти аналог теореми В для ядра P_{α}, $\alpha > -1$;

2) описати зростання $M_p(r, u)$ в термінах ψ із зображення (6).

Теореми 1 і 2 розв'язують поставлені задачі.

Теорема 1. *Нехай* u *гармонічна в* $\mathbb{D}$, $0<\gamma<1$, $\alpha>\gamma-1$, $p\in(1,+\infty]$. *Для того щоб*

$$u\left(re^{i\varphi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_\alpha\left(r,\varphi-t\right)\tilde{u}\left(t\right)dt \tag{7}$$

для деякої функції $\tilde{u}\in\Lambda^p_\gamma$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$M_p\left(r,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=O\left((1-r)^{\gamma-\alpha-1}\right),\quad r\uparrow 1. \tag{8}$$

Зауваження 2. У випадку $p=\infty$ ця теорема анонсована в роботі [5].

Теорема 2. *Нехай функція* u *гармонічна в* $\mathbb{D}$, $p\in[1;+\infty]$, $0<\gamma\le 1$ *і* $\alpha>\gamma-1$. *Для того щоб* u *зображалась у вигляді* (6), *де* $\psi\in BV\cap\Lambda^p_\gamma$ *при* $\gamma<1$, *необхідно і достатньо, а при* $\gamma=1$ *необхідно, щоб виконувалась умова* (5), *і*

$$M_p(r,u)=O((1-r)^{\gamma-\alpha-1}),\quad r\uparrow 1.$$

Зауваження 3. У випадку $p=+\infty$ теорему 2 доведено в роботі [5].

Подібно можна довести теореми для аналітичних функцій.

Теорема 3. *Нехай* f *аналітична в* $\mathbb{D}$, $0<\gamma<1$, $\alpha>\gamma-1$, $p\in(1,+\infty]$. *Для того щоб*

$$f\left(re^{i\varphi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}S_\alpha\left(r,\varphi-t\right)\tilde{u}\left(t\right)dt+i\operatorname{Im}f(0) \tag{9}$$

для деякої функції $\tilde{u}\in\Lambda^p_\gamma$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$M_p\left(r,f'\right)=O\left((1-r)^{\gamma-\alpha-1}\right),\quad r\uparrow 1. \tag{10}$$

Зауваження 4. При $\gamma=1$ і $\alpha>0$ умови теорем 1 та 3, взагалі кажучи, не є достатніми (див. приклад).

Теорема 4. *Нехай функція* f *аналітична в* $\mathbb{D}$, $p\in[1;+\infty]$, $0<\gamma\le 1$ *і* $\alpha>\gamma-1$. *Для того щоб* f *зображалась у вигляді*

$$f(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}S_\alpha(r,\varphi-t)d\psi(t)+i\operatorname{Im}f(0),$$

де $\psi\in BV\cap\Lambda^p_\gamma$ *при* $\gamma<1$, *необхідно, необхідно і достатньо, а при* $\gamma=1$ *необхідно, щоб виконувалась умова* (5) *з* $u_\alpha=\operatorname{Re}f_\alpha$ *і* $M_p(r,f)=O((1-r)^{\gamma-\alpha-1})$, $r\uparrow 1$.

Зауваження 5. При $p=\infty$ теорема 4 анонсована в роботі [5].

Зауваження 6. При $\gamma=1$ умови теорем 2 та 4, взагалі кажучи, не є достатніми (див. приклад).

Зауваження 7. При $\alpha\ge 0$, $p>1$ з $M_1(r,f)=O((1-r)^{-\alpha})$ при $r\uparrow 1$ випливає $M_p(r,f)=O((1-r)^{-\alpha-1+1/p})$ [7, th.27]. Отже, теореми 2 і 4 дають нову інформацію лише при $\gamma p>1$. Це природно, оскільки $BV=\Lambda^1_1\subset\Lambda^p_\gamma$ при $\gamma p<1$.

Д о в е д е н н я теореми 1. Згідно з теоремою 46 [7], умова (8) рівносильна до умови $M_p(r,(u'_\varphi)_\alpha)=O((1-r)^{\gamma-1})$ $(r\uparrow 1)$, оскільки $\gamma-1<0$, $\gamma-\alpha-1<0$.

Але легко бачити, що $(u'_\varphi)_\alpha = (u_\alpha)'_\varphi$. З іншого боку, з теореми 9.10 [2, гл.IX, с. 650–651] випливає, що зображення $u_\alpha(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_0(r,\varphi - t)\tilde{u}(t)dt$ для деякої $\tilde{u} \in \Lambda_\gamma^p$ справджується тоді і лише тоді, коли $u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_\alpha(r,\varphi - t)\tilde{u}(t)dt$. Залишилось застосувати теорему B.

Нам будуть потрібні наступні оцінки $(\alpha > -1)$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}P_\alpha\left(re^{i\varphi}\right)\right| \le \Gamma(\alpha+1)\left|\frac{2\,(\alpha+1)\,rie^{i\varphi}}{(1-re^{i\varphi})^{\alpha+2}}\right| \le \frac{C_1(\alpha)}{|1-re^{i\varphi}|^{\alpha+2}}\ . \tag{11}$$

Звідси маємо, що

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}P_\alpha\left(re^{i\varphi}\right)\right| \le \begin{cases} C_1(\alpha), & \text{при } \pi/2 \le |\varphi| \le \pi, \\ C_2|\varphi|^{-\alpha-2}, & \text{при } 0 \le |\varphi| \le \pi/2. \end{cases} \tag{12}$$

Нехай $J_\alpha(re^{i\varphi}, v) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial\varphi}P_\alpha\left(r,\varphi-t\right)v\left(t\right)dt.$

Лема. *Нехай* $v \in \Lambda_\gamma^p$, $0 < \gamma \le 1$, $\alpha > \gamma - 1$, $p \ge 1$. *Тоді* $M_p(r, J_\alpha(\cdot, v)) = O((1-r)^{\gamma-1-\alpha}, \quad r \uparrow 1.$

Д о в е д е н н я. Продовжуючи v на $\mathbb{R}$ за періодичністю та використовуючи періодичність $\frac{\partial}{\partial\varphi}P_\alpha(r,t)$ за t, маємо

$$J_\alpha(re^{i\varphi}, v) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial\varphi}P_\alpha\left(r,\varphi-t\right)v\left(t\right)dt = -\int\limits_{-\varphi-\pi}^{\pi-\varphi} \frac{\partial}{\partial x}P_\alpha\left(r,-x\right)v\left(x+\varphi\right)dx =$$
$$= -\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial x}P_\alpha\left(r,-x\right)v\left(x+\varphi\right)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial x}P_\alpha\left(r,-x\right)\left(v(\varphi)-v\left(x+\varphi\right)\right)dx. \tag{13}$$

Нехай спочатку $p > 1$. Виберемо β_1 і β_2 так, щоб $\beta_1 + \beta_2 = \alpha + 2$, $\beta_1 > p^{-1} + \gamma$, $\beta_2 > q^{-1}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тоді за нерівністю Гельдера

$$|J_\alpha(re^{i\varphi}, v)|^p \le C_1\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|v(\varphi) - v\left(x+\varphi\right)|}{|1-re^{ix}|^{\alpha+2}}dx\right)^p \le$$
$$\le C_1\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|v(\varphi+x)-v(\varphi)|^p}{|1-re^{ix}|^{\beta_1 p}}\,dx\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{|1-re^{ix}|^{\beta_2 q}}\right)^{p-1}. \tag{14}$$

Використовуючи оцінки (11), (12), легко вивести, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |1-re^{ix}|^{-\beta_2 q}dx \le$

$\le C_5(1-r)^{(p-1)(1-q\beta_2)}$, $r \uparrow 1$. Тому, використовуючи вибір β_1 та β_2, виводимо

$$\int_{-\pi}^{\pi} |J_\alpha(re^{i\varphi}, v))|^p \, d\varphi \le C_6(1-r)^{(p-1)(1-q\beta_2)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{|1-re^{ix}|^{\beta_1 p}} \int_{-\pi}^{\pi} |v(\varphi)-v(\varphi-x)|^p d\varphi \le$$

$$\le C_6(1-r)^{p-1-p\beta_2} \int_0^{\pi} \frac{\omega_p^p(x,v)}{|1-re^{ix}|^{\beta_1 p}} dx \le C_7(1-r)^{p-1-p\beta_2} \Bigg(\int_0^{1-r} \frac{x^{\gamma p}}{(1-r)^{\beta_1 p}} dx +$$

$$+ \int_{1-r}^{\pi/2} \frac{x^{\gamma p}}{x^{\beta_1 p}} \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \omega_p^p(x,v) \, dx \Bigg) \le C_7(1-r)^{p-1-p\beta_2} \Big((1-r)^{\gamma p - \beta_1 p + 1} + O(1) \Big) =$$

$$= O(1-r)^{p+\gamma p - p(\beta_1+\beta_2)} = O(1-r)^{p(\gamma-\alpha-1)}, \quad r \uparrow 1.$$

Отже, при $p > 1$ $M_p(r, J_\alpha(\cdot, v)) = O((1-r)^{\gamma-\alpha-1})$ $(r \uparrow 1)$.

Якщо $p = 1$, то з (13) виводимо

$$\int_{-\pi}^{\pi} |J_\alpha(re^{i\varphi}, v))| \, d\varphi \le C_8 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{|1-re^{ix}|^{\alpha+2}} \int_{-\pi}^{\pi} |v(\varphi) - v(\varphi - x)| \, d\varphi \le$$

$$\le C_9 \int_0^{\pi} \frac{\omega_1(x,v)}{|1-re^{ix}|^{\alpha+2}} dx \le C_{10} \Bigg(\int_0^{1-r} \frac{x^{\gamma}}{(1-r)^{\alpha+2}} dx +$$

$$+ \int_{1-r}^{\pi/2} \frac{x^{\gamma}}{x^{\alpha+2}} \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \omega_1(x,v) \, dx \Bigg) = O(1-r)^{\gamma-\alpha-1}, \quad r \uparrow 1,$$

що і треба було довести. Лему доведено. $\diamondsuit$

Д о в е д е н н я теореми 2. ($\Rightarrow$) Нехай для деякої $\psi \in BV \cap \Lambda_\gamma^p$, $p \ge 1$, $0 < \gamma \le 1$, $\alpha > \gamma - 1$,

$$u(re^{i\varphi}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_0(r, \varphi - \theta) \, d\psi(\theta). \tag{15}$$

Продовжимо ψ на $\mathbb{R}$ за правилом $\psi(x+2\pi) - \psi(x) = \psi(\pi) - \psi(-\pi)$. Маємо

$$u(re^{i\varphi}) = \int_{-\pi+\varphi}^{\pi+\varphi} P_0(r, \varphi - \theta) \, d\psi(\theta) = (\psi(\pi) - \psi(-\pi)) P_0(r, \pi) -$$

$$- \int_{-\pi+\varphi}^{\pi+\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} P_0(r, \theta - \varphi) \psi(\theta) d\theta = C \frac{1-r}{1+r} - J_0(re^{i\varphi}, \psi).$$

За лемою, $M_p(r, J_0(\cdot, \psi)) = O((1-r)^{\gamma-1})$ $(r \uparrow 1)$. Отже, $M_p(r, u) = O((1-r)^{\gamma-1})$ $(r \uparrow 1)$.

($\Leftarrow$) Нехай $0 < \gamma < 1$, $\alpha = 0$. За теоремою С маємо (15) з $\psi \in BV$ і для деякої послідовності (r_n), $r_n \uparrow 1$ $(n \to \infty)$ $\psi(\theta) = \lim_{n \to +\infty} \psi_{r_n}(\theta)$, де $\psi_{r_n}(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} u(r_n e^{it}) \, dt$.

Нехай $f(z) = u(z) + iv(z)$, де v — спряжена до u гармонічна в $\mathbb{D}$ функція. Тоді за теоремою Рісса [3, гл.VII] $M_p(r, v) = O((1-r)^{\gamma-1})$, а отже, і

$M_p(r,f) = O((1-r)^{\gamma-1})$ при $r \uparrow 1$. За теоремою A для $\Phi(z) = \int\limits_0^z F(\zeta)\,d\zeta$ маємо $\Phi \in H^p$ і $\phi \in \Lambda^p_\gamma$, $\phi(\theta) = \Phi(e^{i\theta})$. Тому

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\psi_{r_n}(\theta+h) - \psi_{r_n}(\theta)|^p \,d\theta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big| \int\limits_{\theta}^{\theta+h} u(r_n e^{it})\,dt \Big|^p d\theta \le$$

$$\le \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big| \int\limits_{\theta}^{\theta+h} F(r_n e^{it})\,dt \Big|^p d\theta \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big| \Phi(r_n e^{i(\theta+h)}) - \Phi(r_n e^{i\theta}) \Big|^p d\theta \le C.$$

Отже, за теоремою Лебега можна перейти до границі під знаком інтеграла. Одержимо $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\psi(\theta+h) - \psi(\theta)|^p \,d\theta \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big|\phi(\theta+h) - \phi(\theta)\Big|^p d\theta \le Ch^{p\gamma}$, тобто $\psi \in \Lambda^p_\gamma$. $\diamondsuit$

Випадок $\alpha > 0$, за допомогою теореми 46 з роботи [7], доводиться так само, як теорема 1.

Приклад. За теоремою 9.1 [2] справджується рівність

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_1(ze^{-it}) \ln \frac{1}{|1-e^{it}|}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_2(ze^{-it}) g(t)\,dt, \tag{16}$$

де $g(t) = \operatorname{Re} \int\limits_0^{e^{it}} \ln \frac{1}{|1-\zeta|}\,d\zeta = \operatorname{Re}\Big((e^{it}-1)\ln \frac{1}{1-e^{it}} - e^{it}\Big)$. Зрозуміло, що $g \notin \Lambda_1$. Тому, достатність умови теореми 4 при $\alpha = \gamma = 1$ та теореми 3 при $\alpha = 2$, $\gamma = 1$ не є вірною. Беручи дійсну частину від (16), робимо подібні висновки для теорем 1 і 2.

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
2. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – Москва: Наука, – 1966.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т.1. – Москва: Мир, 1965. – 616 с.
4. *Тиман А. Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. – Москва: Наука, 1960.
5. *Chyzhykov I. E.* Growth and representation of analytic and garmonic functions in the unit disc// Укр. мат. вісник. – 2006. – **3**, № 1. – С. 32–45.
6. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. I// Math. Zeitschrift. – 1928. – **27.** – P. 565–606.
7. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II// Math. Zeitschrift. – 1931/32. – **34.** – P. 403–439.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

Для аналитических и гармонических функций, представленных обобщенным интегралом Пуассона–Стильтьеса, описан рост L_p –норм в терминах меры Стильтьеса.

GENERALIZATION OF THE HARDY–LITTLEWOOD THEOREM

For analytic and harmonic functions represented by the generalized Poisson–Stiltjes integral a growth of the L_p –norms in the Stiltjes measure terms are described.

Одержано
25.01.06

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів