УДК 517.95

А. О. Лопушанський

ЧИСЛЕННЯ В КОНУСІ СЕКТОРІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ З ВІД'ЄМНИМ ТИПОМ І АНАЛІТИЧНІ ПІВГРУПИ

Описано функціональне числення секторіальних операторів з від'ємним типом в алгебрі Фреше аналітичних функцій у фіксованому секторі комплексної площини. Вказано застосування до теорії аналітичних півгруп.

У даній роботі досліджується один спеціальний клас секторіальних операторів з від'ємним типом, який позначено через $\mathcal{A}$. Ряд відомих властивостей цього класу можна знайти в [1–3]. Ми узагальнюємо результати робіт [4–5] про функціональне числення секторіальних операторів на ширші алгебри символів і операторів. Встановлюємо нові умови належності операторів до класу $\mathcal{A}$, а також властивість відкритості множини $\mathcal{A}$ у просторі лінійних неперервних операторів. Доводимо, що секторіальні оператори класу $\mathcal{A}$ генерують рівномірно обмежені сильно неперервні однопараметричні аналітичні півгрупи обмежених операторів над обома просторами заданої пари банахових просторів із асимптотичним прямуванням до нуля на безмежності.

1. Через $l_\omega := \{re^{i\omega} : r \ge 0\}$ будемо позначати промінь із заданим кутом $\omega \in [0, 2\pi]$. Зафіксуємо кут $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ і зіставимо йому в $\mathbb{C}$ замкнений сектор $\Lambda := \{l_\omega : \omega \in [-\omega_0, \omega_0]\}$. Далі для довільного числа $a > 0$ позначаємо $\Lambda_a := \Lambda \bigcup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le a\}$.

Нехай задано комплексні банахові простори $(V_0, \|\cdot\|_0)$ та $(V_1, \|\cdot\|_1)$ з неперервним і щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \to V_0$. Розглядаємо множину секторіальних операторів

$$\mathcal{A} := \Big\{A \in \mathcal{L}(V_1; V_0) : \sup_{\lambda \in \Lambda} \big\|\big(\lambda E_{10} - A\big)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} := K(A) < \infty\Big\}$$

з від'ємним типом $r(A) := \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. Елементи $A \in \mathcal{A}$ можемо трактувати як необмежені лінійні оператори над простором V_0 із щільною областю визначення $V_1 = \mathfrak{D}(A)$. Через $\varrho(A) := \{\lambda : (\lambda E_{10} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1)\}$ і $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ позначаємо відповідно резольвентну множину і спектр A. Для всіх чисел $\lambda \in \varrho(A)$, очевидно, є визначеною й аналітичною функція $R(\lambda, A) := E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0)$. Оскільки оператори мають непорожню резольвентну множину, то клас $\mathcal{A}$ складається із замкнених операторів над простором V_0. Тому для будь–якого оператора A із цього класу спектр $\sigma(A)$ є замкненим, а резольвентна множина $\varrho(A)$ є відкритою в $\mathbb{C}$. Для спектра $A \in \mathcal{A}$ правильне включення $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Крім того, завжди існує залежне від A таке число a, що $0 < a < -r(A)$ і $\Lambda_a \subset \varrho(A)$. Нехай $E_{00} : V_0 \longmapsto V_0$ — одиничний оператор в алгебрі $\mathcal{L}(V_0)$.

Твердження 1. (a) *Оператор A належить класу $\mathcal{A}$ тоді й тільки тоді, коли існує обернений оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1)$ і виконується нерівність*

$$\|R(\lambda, A/s)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le C/|\lambda| \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}, \quad \forall\, s > 0, \tag{1}$$

де стала C залежить від A та не залежить від чисел λ та s.

(b) *Множина $\mathcal{A}$ утворює відкритий конус в просторі $\mathcal{L}(V_0; V_1)$.*

(c) *Якщо $A \in \mathcal{A}$, то для будь–якого числа $a : 0 < a < -r(A)$ існує така стала C (залежна від A і a), що $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le C/|\lambda| \quad \forall\, \lambda \in \Lambda_a \setminus \{0\}$.*

Д о в е д е н н я. (a) Використаємо тотожність

$$\xi E_{10}(\xi E_{10}-A)^{-1}=E_{00}+A(\xi E_{10}-A)^{-1}\qquad \forall\,\xi\in\varrho(A). \tag{2}$$

Із (2) та нерівності $\big\|A(\xi E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le\|A\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}\big\|(\xi E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}$ випливає існування сталої $C=1+K(A)\|A\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}$, незалежної від $\xi\in\Lambda$ і такої, що $\big\|\xi E_{10}(\xi E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le C$. Оскільки $s\Lambda\subset\Lambda$ для будь–якого $s>0$, то, вибираючи $\xi=s\lambda$, маємо $\big\|\lambda E_{10}\left(\lambda E_{10}-A/s\right)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}=$ $=\big\|s\lambda E_{10}\big(s\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le C$ для всіх $\lambda\in\Lambda$ та $s>0$, тобто, нерівність (1) встановлено.

Тепер, навпаки. Домножуючи нерівність (1) на довільне число $\lambda\in\Lambda$, отримуємо $\big\|\xi E_{10}(\xi E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}=\big\|\lambda\,R\left(\lambda,A/s\right)\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le C\quad\forall\,s>0$, де взято $\xi=s\lambda$. Відображення $\big(0,+\infty\big)\times\Lambda\ni\big\{s,\lambda\big\}\longmapsto s\lambda=\xi\in\Lambda$ сюр'єктивне. Тобто остання нерівність виконується для всіх чисел $\xi\in\Lambda$. Користуючись тотожністю (2), маємо $\big(\xi E_{10}-A\big)^{-1}=A^{-1}\xi E_{10}\big(\xi E_{10}-A\big)^{-1}-A^{-1}$. Звідси, враховуючи попередню нерівність, отримуємо $\big\|(\xi E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0,V_1)}\le$ $\le\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0,V_1)}\big(\big\|\xi E_{10}(\xi E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}+1\big)\le\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0,V_1)}(C+1),\ \ \forall\,\xi\in\Lambda$. Твердження (a) доведено.

(b) Нехай $A,X\in\mathcal{A}$. З тотожності $\big[E_{00}-X(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big](\lambda E_{10}-A)=$ $=\lambda E_{10}-A-X$ для $\lambda\in\Lambda$ отримуємо

$$(\lambda E_{10}-A-X)^{-1}=(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big[E_{00}-X(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big]^{-1}. \tag{3}$$

З нерівності $\big\|X(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le\|X\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}\big\|(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}$ випливає $\big\|[E_{00}-X(\lambda E_{10}-A)^{-1}]^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le\sum\big\|X(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big\|^k_{\mathcal{L}(V_0)}\le 2$ для всіх $\big\|X\big\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}\le 1/2K(A)$. З тотожності (3) маємо $\big\|(\lambda E_{10}-A-X)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}\le$ $\le 2\big\|(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}$ для $\lambda\in\Lambda$. Отже, $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\big\|(\lambda E_{10}-A-X)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}\le$ $\le 2K(A)$, тобто, для будь-якого оператора $A\in\mathcal{A}$ його окіл $\big\{X\in\mathcal{L}(V_1;V_0):$ $\big\|X\big\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}\le 1/2K(A)\big\}$ міститься в $\mathcal{A}$. Звідси випливає відкритість множини $\mathcal{A}$ в нормі простору $\mathcal{L}(V_0;V_1)$.

(c) Маємо $\big\|\lambda E_{10}\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}=\big\|E_{00}+A(\lambda E_{10}-A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0)}\le$ $\le 1+\big\|A\big\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}\big\|\big(\lambda E_{10}-A\big)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}\le C$, де $C:=1+K(A)\|A\|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)}$. Твердження доведено. $\diamondsuit$

2. Числам $a:\,0<a<-r(A)$ та $c:\,\pi/2<\omega_0-c<\pi$ поставимо у відповідність відкриті комплексні області

$$\Lambda^c:=\mathbb{C}\setminus\Big[\big\{l_\omega:\,\omega\in\big[-\omega_0+c,\,\omega_0-c\big]\big\}\bigcup\big\{0\big\}\Big],$$
$$\Lambda^c_a:=\mathbb{C}\setminus\Big[\big\{l_\omega:\,\omega\in\big[-\omega_0+c,\,\omega_0-c\big]\big\}\bigcup\big\{\lambda:\,|\lambda|\le a\big\}\Big].$$

Очевидно, що $\mathbb{C}\setminus\Lambda\subset\Lambda^c$ і $\mathbb{C}\setminus\Lambda_a\subset\Lambda^c_a$, а при $c=0$ правильні рівності $\Lambda^0=\mathbb{C}\setminus\Lambda$ і $\Lambda^0_a=\mathbb{C}\setminus\Lambda_a$. Нехай $\partial\Lambda^c$ та $\partial\Lambda^c_a$ — межі областей Λ^c та Λ^c_a, відповідно.

Розглянемо алгебру $\mathcal{H}(\Lambda^c_a)$ комплексних функцій $\varphi=\varphi(\lambda)$, голоморфних в області Λ^c_a та неперервних на її замиканні $\overline{\Lambda^c_a}=\Lambda^c_a\bigcup\partial\Lambda^c_a$, для яких є скінченною величина

$$\|\varphi\|_a:=\frac{1}{\pi}\int\limits_a^{+\infty}M_\varphi(r)\frac{dr}{r}+\sup_{\lambda\in\Lambda^c_a}\big|\varphi(\lambda)\big|, \tag{4}$$

де для будь–якого числа $r \geq a$

$$M_\varphi(r) := \max\Big\{\big|\varphi\big(re^{i\arg(\lambda)}\big)\big| : |\lambda| = r,\ \arg(\lambda) \in \big[\omega_0 - c,\, 2\pi - \omega_0 + c\big]\Big\}$$

— стандартна характеристика аналітичної функції в секторі. Очевидно, що $\mathcal{H}(\Lambda_a^c)$ є алгеброю з нормою $\|\cdot\|_a$, причому без тотожно одиничної функції $\varphi \equiv 1$, бо з умови збіжності невласного інтеграла, який є в нормі, випливає $\lim\limits_{r\to+\infty} M_\varphi(r) = 0$ для всіх $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda_a^c)$. Величина $m_a(\varphi) := \sup\limits_{\lambda\in\Lambda_a^c}\big|\varphi(\lambda)\big|$ є рівномірною нормою в алгебрі всіх аналітичних функцій в області Λ_a^c та неперервних на її замиканні $\overline{\Lambda_a^c}$, при цьому такою, що $m_a(\varphi) \leq \|\varphi\|_a$ для всіх $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda_a^c)$. Отже, якщо φ_n — фундаментальна послідовність в $\mathcal{H}(\Lambda_a^c)$ відносно норми $\|\cdot\|_a$, то вона фундаментальна відносно норми m_a. А тому її границя $\varphi \overset{\|\cdot\|_a}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n \overset{m_a}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n$ також буде функцією, аналітичною в області Λ_a^c та неперервною на її замиканні $\overline{\Lambda_a^c}$, причому такою, що $\|\varphi\|_a < \infty$. Тобто, алгебра $\mathcal{H}(\Lambda_a^c)$ — банахова. Для будь–яких функцій $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(\Lambda_a^c)$ з нерівності вигляду $M_{\varphi\psi}(r) \leq M_\varphi(r)M_\psi(r)$, випливає

$$\|\varphi\psi\|_a \leq \frac{m_a(\varphi)}{\pi}\int\limits_a^{+\infty} M_\psi(r)\frac{dr}{r} + m_a(\varphi)\, m_a(\psi) = m_a(\varphi)\, \|\psi\|_a\,.$$

Отже, в алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda_a^c)$ існує еквівалентна до $\|\cdot\|_a$ субмультиплікативна норма, а тому операція множення функцій є неперервною. При $0 < b \leq a$ маємо $\Lambda_a^c \subset \Lambda_b^c$ і вкладення $\mathcal{H}(\Lambda_b^c) \subset \mathcal{H}(\Lambda_a^c)$ будуть неперервними, бо $\|\varphi\|_a \leq$ $\leq \|\varphi\|_b$ для всіх $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda_b^c)$. Тому можна розглядати проективну границю сім'ї таких алгебр $\mathcal{H}(\Lambda^c) := \bigcap_{a>0}\mathcal{H}(\Lambda_a^c)$, яка буде алгеброю Фреше відносно набору норм $\big\{\|\cdot\|_a : a > 0\big\}$ і складається із функцій, голоморфних в об'єднанні областей $\Lambda^c = \bigcup_{a>0}\Lambda_a^c$ та неперервних у замиканні з виколотою точкою $\overline{\Lambda^c} \setminus \{0\}$.

Алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ належить, наприклад, функція

$$\mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \ni \lambda \longmapsto (-\lambda)^{-\vartheta} = e^{-\vartheta\ln(-\lambda)} \qquad \forall\, \vartheta > 0,$$

яка використовується для побудови дробових степенів операторів. Справді,

$$\big\|(-\lambda)^{-\vartheta}\big\|_a \leq a^{-\vartheta} + \frac{1}{\pi}\int\limits_a^{+\infty}\frac{dr}{r^{1+\vartheta}} < \infty \qquad \forall\, a > 0.$$

Далі будемо використовувати факт, що підалгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ також належить експоненціальна функції

$$\Lambda^c \ni \lambda = re^{i\omega} \longmapsto e^{z\,\lambda} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ \big|\arg(z)\big| < \omega_0 - c - \pi/2\,.$$

Справді це так, бо при $\big|\arg(z)\big| < \omega_0 - c - \pi/2$ маємо

$$\operatorname{Re}(z\lambda) = |z\lambda|\cos\big[\arg(z) + \omega\big] < 0 \qquad \forall\, \omega \in \big[\omega_0 - c,\, 2\pi - \omega_0 + c\big].$$

Оскільки існує залежне від $\arg(z)$ число $\widetilde{\omega} \in \big[\omega_0 - c,\, 2\pi - \omega_0 + c\big]$, в якому досягається максимум $\max\limits_{\omega\in[\omega_0 - c,\, 2\pi-\omega_0+c]} e^{r|z|\,\cos[\arg(z)+\omega]}$, то маємо $M_{e^{z\,\lambda}}(r) =$ $= e^{r|z|\,\cos\left[\arg(z)+\widetilde{\omega}\right]} \leq 1$. Максимум функції $\big|e^{z\,\lambda}\big|$ в області Λ_a^c може досягатися тільки на межі, тобто, при $\widetilde{\omega} = \omega_0 - c$ або $\widetilde{\omega} = 2\pi - \omega_0 + c$ для довільного

$r > a,$ та при $r = a$ для довільного $\omega \in \big[\,0,\, 2\pi\big].$ Тому для будь–якого числа $a > 0$ маємо

$$\big\|e^{z\,\lambda}\big\|_a \le K + \frac{1}{\pi}\int\limits_a^{+\infty} e^{r|z|\,\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]}\,\frac{dr}{r} = K + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a|z|\,\cos\big[\arg(z)+\widetilde{\omega}\big]}^{+\infty}\frac{e^{-s}\,ds}{s} < \infty,$$

де $K := \max\Big\{1;\ \max\limits_{\omega\in[\,0,2\pi]} e^{a|z|\,\cos[\arg(z)+\omega]}\Big\}.$ Більше того, алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ належить похідна експоненціальної функції за параметром z

$$\Lambda^c \ni \lambda \longmapsto \lambda e^{z\,\lambda}, \qquad \big|\arg(z)\big| < \omega_0 - c - \pi/2\,,$$

оскільки вона має в області Λ^c_a скінченну рівномірну норму

$$m_a(\lambda e^{z\,\lambda}) = \max\Bigg\{a \max_{\omega\in[\,0,2\pi]} e^{a|z|\,\cos[\arg(z)+\omega]};\ \sup_{a<r<\infty} r e^{r|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]}\Bigg\},$$

а також норму $\big\|\lambda e^{z\,\lambda}\big\|_a \le m_a(\lambda e^{z\,\lambda}) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-a|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]}^{+\infty} e^{-s}\,ds.$

Твердження 2. *Розглянемо контур* $\Gamma_{a,\omega} := \Gamma^+_{a,\omega}\bigcup\Gamma^-_{a,\omega}\bigcup\Gamma^0_a\,,$ *де числа* $\omega:\ \omega_0 - c \le \omega \le \omega_0$ *та* a *є фіксованими і взято* $\Gamma^+_{a,\omega} := \big\{re^{i\omega}:\ r \ge a\big\},$ $\Gamma^-_{a,\omega} := \big\{re^{-i\omega}:\ r \ge a\big\},$ $\Gamma^0_a := \big\{ae^{i\tau}:\ \tau \in \big[\omega, 2\pi - \omega\big]\big\}.$

(a) *Для будь–яких оператора* $A \in \mathcal{A}$ *та функції* $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c)$ *в її області аналітичності існує контур* $\Gamma_{a,\omega} \subset \varrho\,(A),$ *який обходить спектр* $\sigma(A)$ *в додатному напрямку і такий, що для довільного числа* $t > 0$ *формула*

$$\varphi(tA) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(t\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda, \tag{5}$$

яка не залежить від вибору в контурі числа a *і кута* $\omega,$ *однозначно визначає гомоморфізм*

$$\mathcal{H}(\Lambda^c) \ni \varphi(t\lambda) \longmapsto \varphi(tA) \in H\big(\mathcal{A}\big) \tag{6}$$

алгебри аналітичних функцій на комутативну алгебру $\mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1)$ *–значних функцій операторного аргументу*

$$H\big(\mathcal{A}\big) := \big\{\mathcal{A} \ni tA \longmapsto \varphi(tA) \in \mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1):\ \varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c)\big\}$$

з поточково визначеними операціями множення $\varphi(A)\cdot\psi(A) = (\varphi\cdot\psi)(A)$ *та додавання і множення на скаляри* $\alpha\varphi(A) + \beta\psi(A) = (\alpha\varphi + \beta\psi)(A)$ *для всіх функцій* $\varphi, \psi,$ *скалярів* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *і операторів* $A \in \mathcal{A}.$

(b) *Гомоморфізм* (6) *є неперервний у такому сенсі: якщо в алгебрі* $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ *послідовність функцій* φ_n *має границю* $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n \overset{\mathcal{H}(\Lambda^c)}{=} \varphi,$ *то для будь–якого оператора* $A \in \mathcal{A}$ *маємо* $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(A) \overset{\mathcal{L}(V_j)}{=} \varphi(A)$ *за нормою алгебри* $\mathcal{L}(V_j)$ $(j = 0, 1)$ *для всіх операторів* $A \in \mathcal{A}.$

Д о в е д е н н я. Нехай $A \in \mathcal{A}$ і $\varphi \in \mathcal{H}(\Lambda^c).$ Для оператора A існує такий контур $\Gamma_{a,\omega} \subset \Lambda_a,$ що формула (5) визначає обмежені оператори $\varphi(tA)$ над просторами V_0 і V_1 для будь–якого $t>0$. Справді, з твердження 1 випливає існування сталої C'', для якої виконуються нерівності

$$\big\|R(\lambda,A)\big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le C''/|\lambda|, \qquad \big\|R(\lambda,A)E_{10}\big\|_{\mathcal{L}(V_1)} \le C''/|\lambda| \quad \forall\,\lambda\in\Lambda_a\setminus\{0\}.$$

Оскільки, $\Gamma_{a,\omega}\subset\Lambda_a\setminus\{0\}$, то оцінюючи інтеграл у формулі (5), одержуємо

$$\big\|\varphi(tA)\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} = \frac{1}{2\pi}\Big\|\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \varphi(t\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda\Big\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le$$

$$\le \frac{C''}{2\pi}\Big[\int\limits_{\Gamma^+_{a,\omega}} \big|\varphi(rt\,e^{i\omega})\big|\frac{dr}{r} + \int\limits_{\Gamma^-_{a,\omega}} \big|\varphi(rt\,e^{-i\omega})\big|\frac{dr}{r} + \int\limits_{\Gamma^0_a} \big|\varphi(at\,e^{i\tau})\big|\,d\tau\Big] =$$

$$= \frac{C''}{2\pi}\Big[\int\limits_{\Gamma^+_{at,\omega}} \big|\varphi(s\,e^{i\omega})\big|\frac{ds}{s} + \int\limits_{\Gamma^-_{at,\omega}} \big|\varphi(s\,e^{-i\omega})\big|\frac{ds}{s} + \int\limits_{\Gamma^0_a} \big|\varphi(at\,e^{i\tau})\big|\,d\tau\Big] \le$$

$$\le \frac{C''}{2\pi}\Big[2\int\limits_{at}^{+\infty} M_\varphi(s)\frac{ds}{s} + 2(\pi-\omega)M_\varphi(at)\Big] \le C''\big\|\varphi\big\|_{at}, \qquad j=0,1.$$

Отже, $\{\varphi(tA) : t>0\}\in\mathcal{L}(V_0)\bigcap\mathcal{L}(V_1)$. З нерівності випливає також неперервність відображення (6). Нарешті, лінійність відображення (6) є наслідком лінійності інтеграла в (5).

Якщо тепер в (5) замінимо контур $\Gamma_{a,\omega}$ на такий контур $\Gamma_{a',\omega'}\subset\varrho(A)$, що $0<a\le a'$ та $\omega_0-c\le\omega\le\omega'\le\omega_0$, то згідно з тим, що між контурами $\Gamma_{a',\omega'}$ та $\Gamma_{a,\omega}$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\big\|\varphi(t\lambda)\,R(\lambda,A)\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le C''\lim_{|\lambda|\to\infty} M_\varphi\big(|t\lambda|\big)/|\lambda| = 0, \quad j=0,1,$$

за теоремою Коші отримуємо $\Big(\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} - \int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}}\Big)\varphi(t\lambda)\,R(\lambda,A)\,d\lambda = 0 \quad \forall\,t>0.$
Тобто формула не залежить від вибору контура $\Gamma_{a,\omega}$.

Нехай $\varphi,\psi\in\mathcal{H}(\Lambda^c)$ і оператори $\varphi(A)$ та $\psi(A)$ зображаються у вигляді інтегралів вигляду (5) з різними контурами $\Gamma_{a,\omega}$ та $\Gamma_{a',\omega'}$, де $0<a\le a'$ та $\omega_0-c\le\omega'\le\omega\le\omega_0$. Зауважимо, що відкрита множина, яка обмежена контуром $\Gamma_{a,\omega}$, містить контур $\Gamma_{a',\omega'}$, а спектр $\sigma(A)$ міститься всередині внутрішнього контура $\Gamma_{a',\omega'}$. Тоді

$$\varphi(tA)\,\psi(tA) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \varphi(t\lambda)R(\lambda,A)\bigg(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{\psi(t\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu\bigg)\,d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \psi(t\mu)R(\mu,A)\bigg(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} \frac{\varphi(t\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\bigg)\,d\mu\,.$$

Вище використано резольвентну тотожність $(\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A) = R(\lambda,A)-R(\mu,A)$, правильну для всіх $\lambda\ne\mu$ із сектора Λ. Оскільки точка $\lambda\in\Gamma_{a',\omega'}$ лежить всередині контура $\Gamma_{a,\omega}$, тоді як точка $\mu\in\Gamma_{a,\omega}$ лежить поза $\Gamma_{a',\omega'}$, то інтеграли, які містять $(\mu-\lambda)^{-1}$, дорівнюють відповідно $\psi(\lambda)$ і 0 за вже згадуваною теоремою Коші. Звідси одержуємо $\varphi(A)\,\psi(A)=\psi(A)\,\varphi(A)$

і комутативність алгебри $H(\mathcal{A}_0)$ доведено. Звідси також видно, що лінійне відображення (5) реалізує гомоморфізм цих комутативних алгебр. Твердження доведено. $\diamondsuit$

3. Застосуємо отримані результати до дослідження півгруп, породжених секторіальними операторами розглядуваних класів.

Твердження 3. *Нехай $A \in \mathcal{A}$, де клас $\mathcal{A}$ заданий кутом $\omega_0 : \pi/2 < \omega_0 < \pi$. Довільному числу $c : \pi/2 < \omega_0 - c < \pi$ зіставимо комплексний сектор $S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}} := \{z = t + i\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \omega_0 - c - \pi/2\}$. Справджуються твердження:*

(a) *Операторнозначна функція*

$$S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}} \ni z \longmapsto e^{zA} := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{z\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda \in \mathcal{L}(V_0) \bigcap \mathcal{L}(V_1) \tag{7}$$

не залежить від вибору параметрів $\omega : \omega_0 - c \le \omega \le \omega_0$ та $a : 0 < a < -r(A)$ контуру $\Gamma_{a,\omega}$ і за комплексною змінною z має півгрупову властивість.

(b) *Для будь–яких $z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$ та $x \in V_0$ маємо $e^{zA}x \in V_1$. Якщо $x \in V_1$, то*

$$Ae^{zA}x = e^{zA}Ax \qquad \forall\, z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}\,. \tag{8}$$

(c) *Операторнозначна функція $S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}} \ni z \longmapsto e^{zA} \in \mathcal{L}(V_0) \bigcap \mathcal{L}(V_1)$ аналітична і задовольняє співвідношення*

$$\frac{d}{dz}\, e^{zA} = Ae^{zA} \qquad \forall\, z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}. \tag{9}$$

(d) *Для будь–якого числа $\varepsilon > 0$ та будь-якої замкненої підмножини S_0 в секторі $S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$ виконується нерівність*

$$\max_{j=0,1} \left\| e^{z\,A} \right\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le C_\varepsilon\, e^{|z|\,[r(A)+\varepsilon]} \qquad \forall\, z \in S_0. \tag{10}$$

(e) *Елемент x належить простору V_1 тоді й тільки тоді, коли $Ax \stackrel{V_0}{=} \lim\limits_{t \to +0} \dfrac{e^{tA}x - x}{t}$ за нормою простору V_0, тобто — коли оператор A є генератором півгрупи e^{tA} над простором V_0.*

Д о в е д е н н я. Вище було показано, що для всіх значень параметра $z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$ функція $\mathbb{C} \ni \lambda \longmapsto e^{z\lambda} \in \mathbb{C}$ належить алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c)$. Для всіх $z, \xi \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$ маємо $z + \xi \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$. Тому за гомоморфізмом алгебр, встановленим у твердженні 2, з рівності $e^{(z+\xi)\lambda} = e^{z\lambda}e^{\xi\lambda}$ випливає $e^{(z+\xi)A} = e^{zA}e^{\xi A}$ для всіх $z, \xi \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$. Півгрупова властивість (a) встановлена.

Як було зазначено вище, $\lambda e^{z\,\lambda} \in \mathcal{H}(\Lambda^c)$ для всіх $z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$. Тому, згідно з твердженням 2, $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \lambda e^{z\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda \in \mathcal{L}(V_0) \bigcap \mathcal{L}(V_1)$ $\forall\, z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$.

З тотожності

$$AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - E_{00}\,, \qquad \lambda \in \Gamma_{a,\omega}\,, \tag{11}$$

отримуємо рівності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \lambda e^{z\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{z\lambda} AR(\lambda, A)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{z\lambda} E_{00}\, d\lambda = \\ &= \frac{A}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{z\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda = Ae^{zA}. \end{aligned} \tag{12}$$

Справді, оскільки оператори A, E_{00} замкнені, то їх можна виносити з–під знака інтеграла. Крім цього, $\int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} e^{z\lambda}\,d\lambda = 0$ згідно з теоремою Коші, оскільки на безмежності з боку області Λ^c підінтегральна функція задовольняє умову $\lim\limits_{r\to\infty} M_{e^{z\lambda}}(r) = 0 \;\; \forall\, z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$. Це так, бо, як було обчислено вище, функція $M_{e^{z\lambda}}(r)$ має вигляд $M_{e^{z\lambda}}(r) = e^{r|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]}$, $\widetilde{\omega} \in \big[\omega_0 - c, 2\pi - \omega_0 + c\big]$, при цьому $\cos\big[\arg(z) + \widetilde{\omega}\big] < 0 \;\; \forall\, z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$.

З рівності (12) випливає, що $e^{zA}x \in V_1$ для всіх векторів $x \in V_0$ та чисел $z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$. Крім цього, оскільки $AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax \;\; \forall\, x \in V_1$, $\lambda \in \Gamma_{a,\omega}$, то з (12) отримуємо $Ae^{zA}x = e^{zA}Ax$ для всіх $x \in V_1$ та $z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$. Твердження (b) доведено.

Похідна $\dfrac{d}{dz}\, e^{z\,\lambda} = \lambda e^{z\,\lambda}$ також належить алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda_0^c) \;\; \forall\, z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}$, тому інтеграл у формулі (7) можна диференціювати за параметром z. Диференціюючи, отримуємо

$$\frac{d}{dz}\, e^{zA} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \lambda e^{z\lambda} R(\lambda, A)\, d\lambda = Ae^{zA} \qquad \forall\, z \in S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}}.$$

Нарешті, з факту існування похідної функції комплексної змінної $S_{\omega_0 - c - \frac{\pi}{2}} \ni$ $\ni z \longmapsto^{zA}$ випливає її аналітичність. Твердження (c) доведено.

Доведемо (d). У інтегральній формулі (7) для півгрупи e^{zA} контур $\Gamma_{a,\omega}$ не залежить від вибору числа a. Тому a можемо задавати таким, що $0 < a =$ $= -\big[r(A) + \varepsilon\big] \;\; \forall\, \varepsilon > 0 : \Gamma_{a,\omega} \subset \varrho(A)$, де число $\varepsilon > 0$ може бути як завгодно малим. З іншого боку, із твердження 1 випливає існування сталої C, для якої виконуються нерівності $\big\|R(\lambda, A)\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le C/|\lambda| \;\; \forall\, \lambda \in \Lambda_a \setminus \big\{0\big\}$, $j = 0, 1$. Користуючись цим, оцінимо норми півгрупи e^{zA} наступним чином:

$$\begin{aligned}
\big\|e^{zA}\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} &\le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \big\|e^{z\lambda} R(\lambda, A)\big\|_{\mathcal{L}(V_j)}\, |d\lambda| \le \frac{C}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{|e^{z\lambda}\, d\lambda|}{|\lambda|} \le \\
&\le \frac{C}{\pi} \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{e^{r|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]}\, dr}{r} + \frac{C}{2\pi a} \int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega} e^{a|z|\,\cos[\arg(z)+\theta]}\, d\theta = \\
&= \frac{C}{\pi} \int\limits_{-a|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]}^{+\infty} \frac{e^{-s}\, ds}{s} + \frac{C}{2\pi a} \int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega} e^{a|z|\,\cos[\arg(z)+\theta]}\, d\theta,
\end{aligned}$$

де число $\widetilde{\omega} \in \big[\omega_0 - c,\, 2\pi - \omega_0 + c\big]$, яке залежить від $\arg(z)$ і не залежить від $r > a$, є точкою максимуму неперервної функції $e^{r|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]} =$ $= \max\limits_{\omega \in [\omega_0 - c,\, 2\pi - \omega_0 + c]} e^{r|z|\,\cos[\arg(z)+\omega]}$. Проводячи в інтегралі заміну $s' = s - a|z|$, отримуємо

$$\begin{aligned}
\big\|e^{zA}\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} &\le \frac{C}{\pi} \int\limits_{-a|z|\,\cos\left[\arg(z)+\widetilde{\omega}\right]}^{+\infty} \frac{e^{-s}\, ds}{s} + \frac{C}{2\pi a} \int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega} e^{a|z|\,\cos[\arg(z)+\theta]}\, d\theta = \\
&= \frac{Ce^{-a|z|}}{\pi} \int\limits_{-a|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]-a|z|}^{+\infty} \frac{e^{-s'}\, ds'}{s' + a|z|} + \frac{Ce^{-a|z|}}{2\pi a} \int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega} e^{a|z|\,\cos[\arg(z)+\theta]+a|z|}\, d\theta.
\end{aligned}$$

Враховуючи строгу від'ємність функції $\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]$ для всіх чисел $z \in \in S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$ та $\widetilde{\omega} \in \big[\omega_0-c,\, 2\pi-c-\omega_0\big]$, зауважимо, що в першому інтегралі особлива точка підінтегральної функції $s' = -a|z|$ не належить проміжку інтегрування $\big[-a|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]-a|z|, \quad +\infty\big)$. На будь–якій замкненій підмножині S_0 у відкритому секторі $S_{\omega_0-c-\frac{\pi}{2}}$ досягається нижня границя неперервної функції $-a|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]-a|z|$, причому

$$-a|z| < c_a := \inf_{z\in S_0}\big[-a|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]-a|z|\big] \le 0.$$

На інтервалі $\big[c_a,\ +\infty\big)$ підінтегральна функція задовольняє оцінку

$$\frac{e^{-s'}}{s'+a|z|} \le \frac{e^{-s'}}{s'+b_a}, \quad \text{де} \quad -a|z| < b_a := \frac{c_a-a|z|}{2} < c_a.$$

Тому виконується нерівність

$$\frac{Ce^{-a|z|}}{\pi}\int\limits_{-a|z|\,\cos[\arg(z)+\widetilde{\omega}]-a|z|}^{+\infty}\frac{e^{-s'}\,ds'}{s'+a|z|}+\frac{Ce^{-a|z|}}{2\pi a}\int\limits_{\omega}^{2\pi-\omega}e^{a|z|\,\cos[\arg(z)+\theta]+a|z|}\,d\theta \le$$

$$\le \frac{Ce^{-a|z|}}{\pi}\int\limits_{c_a}^{+\infty}\frac{e^{-s'}\,ds'}{s'+b_a}+\frac{Ce^{-a|z|}(\pi-\omega)}{2\pi a}$$

і стала вигляду $C_\varepsilon := \dfrac{C}{\pi}\displaystyle\int\limits_{c_a}^{+\infty}\frac{e^{-s'}\,ds'}{s'+b_a}+\frac{C(\pi-\omega)}{2\pi a}$ є скінченною, бо особлива точка $s'=-b_a$ підінтегральної функції не належить проміжку інтегрування. Звідси отримуємо $\big\|e^{zA}\big\|_{\mathcal{L}(V_j)} \le C_\varepsilon\, e^{-a|z|}\ \forall\, z \in S_0,\ j=0,1.$ Тобто нерівність (10) і відповідне твердження (d) встановлено, якщо підставити $a=-\big[r(A)+\varepsilon\big]$.

Доведемо тепер правильність твердження (e). Для цього спочатку встановимо співвідношення

$$\int\limits_0^t e^{sA}x\,ds \in V_1\,, \quad e^{tA}x-x = A\int\limits_0^t e^{sA}x\,ds \quad \forall\, x\in V_0, \quad t>0. \tag{13}$$

Справді, для чисел $0<\varepsilon<t$ з формули (9) отримуємо

$$\int\limits_\varepsilon^t e^{sA}x\,ds = \int\limits_\varepsilon^t AA^{-1}e^{sA}x\,ds = \int\limits_\varepsilon^t \frac{d}{ds}\big[A^{-1}e^{sA}x\big]\,ds = A^{-1}\big[e^{tA}x-e^{\varepsilon A}x\big].$$

Звідси при $\varepsilon\to+0$ на підставі твердження (b) маємо

$$\int\limits_0^t e^{sA}x\,ds = A^{-1}\big[e^{tA}x-x\big]\in V_1 \quad \text{або} \quad A\int\limits_0^t e^{sA}x\,ds = e^{tA}x-x.$$

Співвідношення (13) встановлено.

З другої рівності в (13) та співвідношення (8) для всіх $x\in V_1$ маємо

$$\lim_{t\to+0}\frac{e^{tA}x-x}{t} \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0}\frac{A}{t}\int\limits_0^t e^{sA}x\,ds \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\int\limits_0^t e^{sA}Ax\,ds. \tag{14}$$

Згідно з твердженням (d), підінтегральна функція $0 < s \longmapsto e^{sA}Ax$ неперервна в нулі. Тому з (14) отримуємо

$$\lim_{t\to+0} \frac{e^{tA}x - x}{t} \overset{V_0}{=} Ax \qquad \forall\, x \in V_1.$$

Навпаки, з існування для функції $0 < t \longmapsto e^{tA}x \in V_0$ на елементі $x \in V_0$ правої похідної в нулі, $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{e^{tA}x - x}{t} \overset{V_0}{=} y$, маємо $y \in V_0$. Тому

$$R(\lambda, A)y \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0} R(\lambda, A)\frac{e^{tA}x - x}{t} \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda^c.$$

Звідси на основі тотожності (11) та співвідношення (13) отримуємо

$$R(\lambda, A)y \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0} \frac{R(\lambda, A)A}{t} \int\limits_0^t e^{sA}x\, ds \overset{V_0}{=} \lim_{t\to+0} \frac{\lambda R(\lambda, A) - E_{00}}{t} \int\limits_0^t e^{sA}x\, ds.$$

З неперервності підінтегральної функції $0 \le s \longmapsto e^{sA}x \in V_0$ в нулі справа та останньої рівності для будь–якої точки $\lambda \in \Lambda^c$ отримуємо

$$R(\lambda, A)y = \lambda R(\lambda, A)x - x, \quad \text{або} \quad x = \lambda R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)y \in V_1\,.$$

Твердження (e) доведено. $\diamondsuit$

Наслідок. *З твердження* 3(d) *випливає таке граничне співвідношення*

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| e^{tA} \right\|_{\mathcal{L}(V_j)} = 0, \qquad j = 0, 1.$$

1. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. – Москва: Мир, 1992. – 351 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1967. – 464 с.
3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – Москва: Наука, 1985. – 376 с.
4. *Amann H.* Linear and quasilinear parabolic problem. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, – 1995. – V.1. – 372 p.
5. *Lunardi A.* Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic equations. – Basel: Birkchäuser, 1995. – 435 p.

ИСЧИСЛЕНИЕ В КОНУСЕ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ТИПОМ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ

Описано функциональное исчисление секториальних операторов с отрицательным типом в алгебре Фреше аналитических функций в фиксированном секторе комплексной плоскости. Показано применение к теории аналитических полугрупп.

CALCULUS IN CONE OF NEGATIVE TYPE SECTORIAL OPERATORS AND ANALYTICAL SEMIGROUPS

The functional calculation of sectorial operators with negative type in algebra of analytical functions in the fixed sector of a complex plane is described. Application to the theory of analytical groups is shown.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України

Одержано
03.04.06