УДК 512.933

І. І. Кирчей

ВИЗНАЧНИКОВЕ ЗОБРАЖЕННЯ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ ДРАЗІНА

З використанням граничного зображення оберненої матриці Дразіна одержано її визначникове зображення. На основі цього зображення розв'язок системи узагальнених нормальних рівнянь аналітично зображено через аналог правила Крамера.

Вступ. Разом з узагальненою оберненою матрицею Мура–Пенроуза не менш відомими є такі псевдообернені матриці, як обернена Дразіна [7] та групова обернена. Засобом цих псевдообернених матриць встановлюються нові підходи в таких, уже традиційних для псевдообернених, сферах застосування, як при дослідженні вироджених систем лінійних алгебричних рівнянь [12, 15] та вироджених систем диференціальних і різницевих рівнянь [1, 4], а також при побудові ітеративних методів числового аналізу [6, 8, 10]. Крім того, обернена матриця Дразіна знаходить ефективні застосування і в нових областях досліджень, зокрема, в теорії скінченних марківських ланцюгів [9] і криптографії [11]. Проблема визначникового зображення матриці Дразіна та групової оберненої довгий час залишалася відкритою, на чому наголошувалося, зокрема, в роботі [13]. У роботі [14] вперше подається визначникове зображення матриці Дразіна $\mathbf{A}^D$ для довільної комплексної матриці $\mathbf{A}_{n\times n}$ з індексом $\operatorname{Ind}\mathbf{A} = k \le n$ та рангом $\operatorname{rank}\mathbf{A}^k = \operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1} = r < n$, використовуючи повноранговий розклад матриці $\mathbf{A}^D$ та опираючись на узагальнене визначникове зображення псевдообернених матриць [13]. А саме, елементи матриці Дразіна a_{ij}^D подаються таким чином:

$$a_{ij}^D = \frac{\sum\limits_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{N}_{r_k}\{i,j\}} \left|(\mathbf{A}^s)_{\alpha}^{\beta}\right| \dfrac{\partial}{\partial a_{ij}} \left|\mathbf{A}_{\beta}^{\alpha}\right|}{\sum\limits_{(\gamma,\delta)\in \mathrm{N}_{r_k}} \left|(\mathbf{A}^s)_{\gamma}^{\delta}\right| \left|\mathbf{A}_{\delta}^{\gamma}\right|},$$

де $s \ge k = \operatorname{Ind}\mathbf{A}$ і $r_k = \operatorname{rank}\mathbf{A}^s$. Тут і надалі використовуються наступні позначення. Нехай $\alpha := (\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \subseteq \{1,\ldots,\}$ та $\beta := (\beta_1,\ldots,\beta_k) \subseteq \{1,\ldots,n\}$ — підмножини індексів, тоді $|\mathbf{A}_{\beta}^{\alpha}|$ — мінор матриці $\mathbf{A}$ з рядками та стовпцями, що індексуються множинами α і β відповідно; $|\mathbf{A}_{\alpha}^{\alpha}|$ — головний мінор матриці $\mathbf{A}$ з рядками та стовпцями, що індексуються множиною α. Через $\dfrac{\partial}{\partial a_{ij}}|\mathbf{A}|$ будемо позначати алгебричне доповнення елемента a_{ij} у визначнику $|\mathbf{A}|$. Для даного n нехай $\mathrm{I_{k,n}} := \{\alpha : \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k),\ 1 \le \alpha_1 \le \ldots \le \alpha_k \le n\}$, $I_k(\alpha) := \{I : I \in \mathrm{I_{k,n}}, I \supseteq \alpha\}$ і $I_k\{i\} := \{I : I \in \mathrm{I_{k,n}}, i \in \alpha \subseteq I\}$, тоді $N_k := \mathrm{I_{k,n}} \times \mathrm{I_{k,n}}$, $N_k(\alpha,\beta) := I_k(\alpha)\times I_k(\beta)$ та $N_k\{i,j\} := I_k\{i\}\times I_k\{j\}$.

У цій роботі одержано визначникове зображення матриці Дразіна $\mathbf{A}^D$ з використанням її граничного зображення, при цьому елементи матриці $\mathbf{A}^D$ подаються як відношення сум головних мінорів матриці $\mathbf{A}^{k+1}$ та матриць $\mathbf{A}_{.i}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)$, які одержуються з матриці $\mathbf{A}^{k+1}$ заміною її i-го стовпця j-м стовпцем матриці $\mathbf{A}^k$. Використовуючи отримане визначникове зображення, розв'язок системи узагальнених нормальних рівнянь аналітично зобразимо через аналог правила Крамера.

1. Визначникове зображення матриці Дразіна.

Означення 1. Нехай $\mathrm{C}^{n\times n}$ — множина всіх комплексних $n\times n$ матриць. *Оберненою матрицею Дразіна* до матриці $\mathbf{A}\in \mathrm{C}^{n\times n}$ називається матриця, що є розв'язком такої системи матричних рівнянь:

$$\mathbf{1)}\quad \mathbf{A}^k\mathbf{XA}=\mathbf{A}^k,$$

$$\mathbf{2)}\quad \mathbf{XAX}=\mathbf{X},$$

$$\mathbf{3)}\quad \mathbf{AX}=\mathbf{XA},$$

де $k=\operatorname{Ind}\mathbf{A}$ — індекс матриці $\mathbf{A}$, тобто $k=\min\limits_{k\in \mathrm{N}\cup\{0\}}\left\{\operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1}=\operatorname{rank}\mathbf{A}^k\right\}$. Обернена матриця Дразіна позначається як $\mathbf{X}=:\mathbf{A}^D$.

Означення 2. Якщо $\operatorname{Ind}\mathbf{A}=1$, то обернена матриця Дразіна до матриці $\mathbf{A}$ називається *груповою оберненою* і позначається $\mathbf{A}^{\#}$.

Зауваження 1. Якщо $\operatorname{Ind}\mathbf{A}=0$, то матриця $\mathbf{A}$ — неособлива і $\mathbf{A}^D= =\mathbf{A}^{-1}$. Якщо ж матриця $\mathbf{A}$ — ермітова, то $\mathbf{A}^D=\mathbf{A}^+$, де $\mathbf{A}^+$ — узагальнена обернена матриця Мура–Пенроуза.

Подамо без доведень кілька відомих, надалі необхідних нам фактів.

Теорема 1 [1].*Обернена матриця Дразіна до матриці $\mathbf{A}\in \mathrm{C}^{n\times n}$ існує, єдина і допускає зображення, яке будується наступним чином. Нехай*

$$\mathbf{A}=\mathbf{N}\begin{pmatrix}\mathbf{J_0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{J_1}\end{pmatrix}\mathbf{N}^{-1}$$

є жордановим зображенням матриці $\mathbf{A}$, де $\mathbf{J_0}$ складається з нільпотентних блоків, а $\mathbf{J_1}$ — із неособливих. Тоді

$$\mathbf{A}^D=\mathbf{N}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{J_1}\end{pmatrix}\mathbf{N}^{-1}.$$

Теорема 2 [1, 5]. *Для довільної $\mathbf{A}\in \mathrm{C}^{n\times n}$ справджується рівність*

$$\mathbf{A}^D=\lim_{\alpha\to 0}\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)^{-1}\mathbf{A}^k,$$

де $\mathbf{I}$ — одинична матриця, $k=\operatorname{Ind}\mathbf{A},\alpha\in\Re_+$.

Теорема 3 [3]. *Нехай $d_r:=\sum\limits_{\alpha\in \mathrm{I}_{r,n}}|\mathbf{A}_{\alpha}^{\alpha}|$ — сума головних мінорів порядку r матриці $\mathbf{A}\in \mathrm{C}^{n\times n}, 1\le r\le n$. Тоді її характеристичний многочлен можна подати у вигляді $p\left(t\right)=\det\left(\mathbf{A}-t\mathbf{I}\right)=t^n-d_1t^{n-1}+d_2t^{n-2}-\ldots+\left(-1\right)^n d_n$.*

Будемо також використовувати наступні позначення. Через $\mathbf{a}_{.j}$ позначимо j–й стовпець, а через $\mathbf{a}_{i\,.}$ — i–й рядок матриці $\mathbf{A}$, тоді через $\mathbf{a}_{.j}^{(k)}$ та $\mathbf{a}_{i.}^{(k)}$ позначимо відповідно, j–й стовпець та i–й рядок матриці $\mathbf{A}^k$. Елементи матриці $\mathbf{A}^k$ будемо позначати $a_{ij}^{(k)}$ $(\forall i,j\in\{1,\ldots,n\})$. Нехай $\mathbf{A}_{.j}\left(\mathbf{b}\right)$ — матриця, яку одержимо із $\mathbf{A}$ заміною її j–го стовпця стовпцем $\mathbf{b}$, а матриця $\mathbf{A}_{i\,.}\left(\mathbf{b}\right)$ одержується із $\mathbf{A}$ заміною її i–го рядка рядком $\mathbf{b}$.

Лема. *Для довільної $\mathbf{A}\in \mathrm{C}^{n\times n}$ з індексом $\operatorname{Ind}\mathbf{A}=k\le n$ виконується нерівність*

$$\operatorname{rank}\mathbf{A}_{.i}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\le \operatorname{rank}\mathbf{A}^{k+1}\quad \forall i,j=1,...,n. \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо матрицю $\mathbf{A}^{(k+1)} = (a_{ij}^{(k+1)})_{n\times n}$. Очевидно, що $a_{ij}^{(k+1)} = \sum\limits_{m=1}^{n} a_{im}^{(k)} a_{mj} \quad (\forall i, j = 1, ..., n)$. Проведемо ряд елементарних перетворень матриці $\mathbf{A}_{.\,i}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)$, домножуючи її справа на матриці $\mathbf{P}_{i\,s}\left(-a_{js}\right)$, що відрізняються від одиничної елементом $-a_{j\,s}$, розміщеним на перетині i–го рядка та s–го стовпця $(s \neq i)$, тоді

$$\mathbf{A}_{.\,i}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right) \cdot \prod_{s\neq i} \mathbf{P}_{i\,s}\left(-a_{js}\right) = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccccc} \sum\limits_{s\neq i} a_{1s}^{(k)} a_{s1} & \ldots & a_{1j}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s\neq i} a_{1s}^{(k)} a_{sn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{s\neq i} a_{ns}^{(k)} a_{s1} & \ldots & a_{nj}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s\neq i} a_{ns}^{(k)} a_{sn} \end{array} \right\| \\ \begin{array}{ccccc} \phantom{\sum a_{1s}^{(k)} a_{s1}} & & [i\text{–й}] & & \phantom{\sum a_{1s}^{(k)} a_{sn}} \end{array} \end{array}.$$

Одержану матрицю можна факторизувати наступним чином:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \sum\limits_{s\neq i} a_{1s}^{(k)} a_{s1} & \ldots & a_{1j}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s\neq i} a_{1s}^{(k)} a_{sn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{s\neq i} a_{ns}^{(k)} a_{s1} & \ldots & a_{nj}^{(k)} & \ldots & \sum\limits_{s\neq i} a_{ns}^{(k)} a_{sn} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \ldots & a_{1n}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \ldots & a_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^{(k)} & a_{n2}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} \end{array} \right\| \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{array} \right\| \\ \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & [i\text{–й}] & & \phantom{a_{n1}} \end{array} \end{array} [j\text{–й}].$$

Позначимо $\tilde{\mathbf{A}} := \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{array} \right\| \\ \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & [i\text{–й}] & & \phantom{a_{n1}} \end{array} \end{array} [j\text{ –й}]$. Матриця $\tilde{\mathbf{A}}$ одержується з матриці $\mathbf{A}$ при $a_{ij} = 1$, $a_{is} = 0\ (\forall s \neq i)$ та $a_{si} = 0\ (\forall s \neq j)$. Оскільки елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, то $\mathrm{rank}\mathbf{A}_{.\,i}^{k+1}(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}) \leq$ $\leq \min\{\mathrm{rank}\mathbf{A}^{(k)}, \mathrm{rank}\tilde{\mathbf{A}}\}$. Очевидно, що $\mathrm{rank}\tilde{\mathbf{A}} \geq \mathrm{rank}\mathbf{A} \geq \mathrm{rank}\mathbf{A}^{k+1}$, звідки й випливає нерівність (1). Лему доведено. $\diamondsuit$

Теорема 1. *Для довільної матриці* $\mathbf{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$ *з індексом* $\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} = k$ *та* $\mathrm{rank}\mathbf{A}^k = \mathrm{rank}\mathbf{A}^{k+1} = r < n$ *її обернену матрицю Дразіна* $\mathbf{A}^D$ *можна аналітично зобразити як*

$$\mathbf{A}^D = \frac{1}{d_r\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)} \left\| \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{array} \right\|, \tag{2}$$

де $d_r(\mathbf{A}^{k+1}) = \sum\limits_{\alpha\in \mathrm{I}_{r,n}} \left|(\mathbf{A}^{k+1})_{\alpha}^{\alpha}\right|, \quad c_{ij} = \sum\limits_{\alpha\in \mathrm{I}_r\{i\}} \left|(\mathbf{A}_{.\,i}^{k+1}(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}))_{\alpha}^{\alpha}\right| \quad (\forall i, j = 1, ..., n).$

Д о в е д е н н я. За теоремою 2, $\mathbf{A}^D = \lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)^{-1}\mathbf{A}^k$. Позначимо $\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1} =: \mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times n}$. Матриця $\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}$ є матрицею повного рангу, тому для неї можна побудувати обернену матрицю

$$\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)}\begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial b_{11}}|\mathbf{B}| & \dots & \frac{\partial}{\partial b_{1n}}|\mathbf{B}| \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial b_{n1}}|\mathbf{B}| & \dots & \frac{\partial}{\partial b_{nn}}|\mathbf{B}| \end{Vmatrix}.$$

Тоді із застосуванням розкладу Лапласа визначника матриці $\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}$, одержимо

$$\mathbf{A}^D = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\det\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)}\begin{Vmatrix} \sum\limits_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b_{1s}}|\mathbf{B}|\cdot a_{s1}^{(k)} & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b_{1s}}|\mathbf{B}|\cdot a_{sn}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b_{ns}}|\mathbf{B}|\cdot a_{s1}^{(k)} & \dots & \sum\limits_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b_{ns}}|\mathbf{B}|\cdot a_{sn}^{(k)} \end{Vmatrix} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1})}\begin{Vmatrix} \det\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.1}\left(\mathbf{a}_{.1}^{(k)}\right) & \dots & \det\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.1}\left(\mathbf{a}_{.n}^{(k)}\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \det\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.n}\left(\mathbf{a}_{.1}^{(k)}\right) & \dots & \det\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right)_{.n}\left(\mathbf{a}_{.n}^{(k)}\right) \end{Vmatrix}. \quad (3)$$

Застосувавши теорему 3, одержимо

$$\det\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right) = \alpha^n + d_1\alpha^{n-1} + d_2\alpha^{n-2} + \ldots + d_n,$$

де для $\forall s = 1,...n-1$, $d_s = \sum\limits_{\alpha\in \mathrm{I}_{s,n}}\left|(\mathbf{A}^{k+1})_{\alpha}^{\alpha}\right|$ і $d_n = \det\mathbf{A}^{k+1}$. Оскільки $\mathrm{rank}\mathbf{A}^{k+1} = \mathrm{rank}\mathbf{A}^k = r$, то $d_n = d_{n-1} = \ldots = d_{r+1} = 0$. Звідси

$$\det\left(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1}\right) = \alpha^n + d_1\alpha^{n-1} + d_2\alpha^{n-2} + \ldots + d_r\alpha^{n-r}.$$

У свою чергу, для $\forall i,j = 1,...,n$

$$\det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^{k+1})_{.\,i}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right) = c_1^{(ij)}\alpha^{n-1} + c_2^{(ij)}\alpha^{n-2} + \ldots + c_n^{(ij)},$$

де для $\forall s = 1,...n-1$ $\quad c_s^{(ij)} = \sum\limits_{\alpha\in \mathrm{I}_s\{i\}}\left|\left(\mathbf{A}_{.i}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right|$ та $c_n^{(ij)} = \det\mathbf{A}_{.i}^{k+1}(\mathbf{a}_{.j}^{(k)})$.

Оскільки за лемою $\mathrm{rank}\mathbf{A}_{.i}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right) \le r$, то при $r+1\le s\le n-1$ та $\alpha\in \mathrm{I}_s\{i\}$ виконується $\left|(\mathbf{A}_{.i}^{k+1}(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}))_{\alpha}^{\alpha}\right| = 0$, а також $\det\mathbf{A}_{.i}^{k+1}(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}) = 0$ $(\forall i,j = 1,...,n)$. Звідси, при $r+1\le s\le n-1$ $\quad c_s^{(ij)} = \sum\limits_{\alpha\in \mathrm{I}_s\{i\}}\left|\left(\mathbf{A}_{.i}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right| = 0$, та $c_n^{(ij)} = $ $= \det\mathbf{A}_{.i}^{k+1}\left(\mathbf{a}_{.j}^{(k)}\right) = 0$ $\quad (\forall i,j = 1,...,n)$.

Отже, $\det(\alpha\mathbf{I}+\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.\,i}(\mathbf{a}_{.j}^*) = c_1^{(ij)}\alpha^{n-1} + c_2^{(ij)}\alpha^{n-2} + \ldots + c_r^{(ij)}\alpha^{n-r}$ $(\forall i,j = 1,...,n)$. Підставивши ці значення у матрицю з формули (3), одержимо

$$\mathbf{A}^D =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\begin{Vmatrix} \frac{c_1^{(11)}\alpha^{n-1}+\ldots+c_r^{(11)}\alpha^{n-r}}{\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_r\alpha^{n-r}} & \dots & \frac{c_1^{(1n)}\alpha^{n-1}+\ldots+c_r^{(1n)}\alpha^{n-r}}{\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_r\alpha^{n-r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{c_1^{(n1)}\alpha^{n-1}+\ldots+c_r^{(n1)}\alpha^{n-r}}{\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_r\alpha^{n-r}} & \dots & \frac{c_1^{(nn)}\alpha^{n-1}+\ldots+c_r^{(nn)}\alpha^{n-r}}{\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_r\alpha^{n-r}} \end{Vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \frac{c_r^{(11)}}{d_r} & \dots & \frac{c_r^{(1n)}}{d_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{c_r^{(n1)}}{d_r} & \dots & \frac{c_r^{(nn)}}{d_r} \end{matrix} \right\|.$$

Звідси, перепозначивши $c_r^{(ij)} = c_{ij} \quad (\forall i, j = 1, ..., n)$, одержимо визначникове зображення (2) для матриці Дразіна $\mathbf{A}^D$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Наслідок. *Для довільної* $\mathbf{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$ *з* $\mathrm{Ind}\mathbf{A} = 1$ *та* $\mathrm{rank}\mathbf{A} = \mathrm{rank}\mathbf{A}^2 = r < n$ *її обернену групову матрицю* $\mathbf{A}^{\#}$ *можна аналітично зобразити таким чином:*

$$\mathbf{A}^{\#} = \frac{1}{d_r\left(\mathbf{A}^2\right)} \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

де $d_r\left(\mathbf{A}^2\right) = \sum\limits_{\alpha \in \mathrm{I}_{r,n}} \left|\left(\mathbf{A}^2\right)_\alpha^\alpha\right|, \; c_{ij} = \sum\limits_{\alpha \in \mathrm{I}_r\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^2_{.i}\left(\mathbf{a}_{.j}\right)\right)_\alpha^\alpha\right| \quad (\forall i, j = 1, ..., n)$.

Д о в е д е н н я, очевидно, випливає з теореми 4 при $k = 1$.

2. Правило Крамера для системи узагальнених нормальних рівнянь. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \tag{4}$$

де $\mathbf{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathrm{C}^n$ — вектор–стовпець невідомих, $\mathbf{f} \in \mathrm{C}^n$ — вектор–стовпець вільних елементів. Через $R(\mathbf{A})$ та $N(\mathbf{A})$ будемо позначати, відповідно, область значень та нульовий простір матриці $\mathbf{A}$. Відомо (див. [2, 3]), що $\mathbf{A}^+\mathbf{f}$, де $\mathbf{A}^+$ — узагальнена обернена матриця Мура–Пенроуза, є єдиним нормальним розв'язком системи (4). Тобто, якщо $\mathbf{x}^0 = \mathbf{A}^+\mathbf{f}$, то

$$\left\|\mathbf{x}^0\right\| = \min_{\mathbf{x}\in \mathrm{C}^n}\left\{\|\tilde{\mathbf{x}}\| \; \|\mathbf{A}\cdot\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| = \min_{\mathbf{x}\in \mathrm{C}^n}\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\right\}.$$

В той же час $\mathbf{A}^+\mathbf{f}$ є єдиним розв'язком системи нормальних рівнянь $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^*\mathbf{f}$. В [15] розглядається теорема, яка характеризує розв'язок $\mathbf{A}^D\mathbf{f}$.

Теорема 2. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$ *з* $\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} = k$, *тоді* $\mathbf{A}^D\mathbf{f}$ *є єдиним розв'язком із* $R\left(\mathbf{A}^k\right)$ *системи* [15]

$$\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^k\mathbf{f}. \tag{5}$$

Зауваження 2. З огляду на певну подібність системи (5) до системи нормальних рівнянь, систему (5) називають [15] системою узагальнених нормальних рівнянь.

Зауваження 3. На відміну від $\mathbf{A}^+\mathbf{f}$, розв'язок за оберненою матрицею Дразіна $\mathbf{A}^D\mathbf{f}$ в загальному випадку не завжди є розв'язком системи лінійних рівнянь (4), навіть, якщо система (4) є сумісна.

Теорема 3. *Розв'язок* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ *системи узагальнених нормальних рівнянь* (5) *із матрицею коефіцієнтів* $\mathbf{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$ *такою, що* $\mathrm{Ind}\,\mathbf{A} = k$ *та* $\mathrm{rank}\mathbf{A}^k = \mathrm{rank}\mathbf{A}^{k+1} = r < n$ *покомпонентно зображається таким чином:*

$$x_i = \frac{\sum\limits_{\alpha\in \mathrm{I}_r\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i}\left(\mathbf{g}\right)\right)_\alpha^\alpha\right|}{\sum\limits_{\alpha\in \mathrm{I}_{r,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_\alpha^\alpha\right|} \quad \forall i = 1, ..., n, \tag{6}$$

де $\mathbf{g} = \mathbf{A}^k \mathbf{f}$.

Д о в е д е н н я. На підставі теореми 5, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^D \mathbf{f}$ є єдиним розв'язком системи (5). Подамо визначникове зображення матриці $\mathbf{A}^D$ згідно теореми 4, тоді

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{d_r\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)} \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{matrix} \right\| \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_r\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)} \begin{pmatrix} \sum\limits_{s=1}^{n} c_{1s} f_s \\ \vdots \\ \sum\limits_{s=1}^{n} c_{ns} f_s \end{pmatrix},$$

де $d_r\left(\mathbf{A}^{k+1}\right) = \sum\limits_{\alpha \in I_{r,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{k+1}\right)^{\alpha}_{\alpha} \right|$, $c_{ij} = \sum\limits_{\alpha \in I_r\{i\}} \left| \left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i}\left(\mathbf{a}^{(k)}_{.j}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha} \right|$ $(\forall i, j = 1, ..., n)$.
Отже, для $\forall i = 1, ..., n$

$$x_i = \frac{1}{d_r\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)} \sum_{s=1}^{n} c_{is} f_s = \frac{1}{d_r\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)} \sum_{s=1}^{n} \sum_{\alpha \in I_r\{i\}} \left| \left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i}\left(\mathbf{a}^{(k)}_{.s}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha} \right| \cdot f_s =$$

$$= \frac{1}{d_r\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)} \sum_{\alpha \in I_r\{i\}} \sum_{s=1}^{n} \left| \left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i}\left(\mathbf{a}^{(k)}_{.s}\right)\right)^{\alpha}_{\alpha} \right| \cdot f_s =$$

$$= \frac{1}{d_r\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)} \sum_{\alpha \in I_r\{i\}} \sum_{s=1}^{n} \left| \left(\mathbf{A}^{k+1}_{.i}\left(\mathbf{a}^{(k)}_{.s} \cdot f_s\right)\right)^{\alpha}_{\alpha} \right|.$$

Звідки й випливає (6). Теорему доведено. $\diamondsuit$

1. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных линейных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – 155 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
3. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.
4. *Campbell S. L., Meyer C. D. (Jr.), Rose N. J.* Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients // SIAM J. Appl. Math. – 1976. – **31**, No. 3. – P. 411–425.
5. *Carl D., Meyer C. D. (Jr.)* Limits and the index of a square matrix // SIAM J. Appl. Math. – 1974. – **26,** No. 3. – P. 506–515.
6. *Climent J. J., Neumann M., Sidi A.* A semi–iterative method for real spectrum singular linear systems with an arbitrary index // J. Comput. Appl. Math. – 1997. – **87**. – P. 21–38.
7. *Drazin M. P.* Pseudoinverses in associative rings and semigroups // Amer. Math. Monthly. – 1958. – **65**. – P. 506–515.
8. *Eiermann M., Marek I., Niethammer W.* On the solution of singular systems of algebraic equations by semiiterative methods // Numer. Math. – 1988. – **53**. – P. 265–283.
9. *Freund R. W., Hochbruck M.* On the use of two QMR algorithms for solving singular systems and applications in Markov chain modeling // Numer. Linear Algebra Appl. – 1994. – **1**. – P. 403–420.
10. *Hartwig R. E., Hall F.* Applications of the Drazin inverse to Cesaro–Neumann iterations // Recent Applications of Generalized Inverses. – 1982. – **66**. – P. 145–195.
11. *Hartwig R. E., Levine J.* Applications of Drazin inverse to the Hill cryptographic systems. Part III // Cryptologia. – 1981. – **5**. – P. 67–77.

12. *Miller V. A., Neumann M.* Successive over relaxation methods for solving the rank deficient linear least square problem // Linear Algebra Appl. – 1987. – **88/89**. – P. 533–557.
13. *Stanimirovic' P. S.* General determinantal representation of pseudoinverses of matrices // Mat. Vesnik. – 1996. – **48**. – P. 1–9.
14. *Stanimirovic' P. S., Djordjevic' D. S.* Full–rank and determinantal representation of the Drazin inverse // Linear Algebra Appl. – 2000. – **311**. – P. 131–151.
15. *Wei Y. M., Wu H. B.* Additional results on index splittings for Drazin inverse solutions of singular linear systems // The Electronic J. Linear Algebra. – 2001. – **8**. – P. 83–93.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДРАЗИНА

Получено определительное представление обратной матрицы Дразина с использованием её предельного представления. Применяя полученное определительное представление матрицы Дразина, решение системы обобщенных нормальных уравнений аналитически представляется как аналог правила Крамера.

DETERMINANTAL REPRESENTATION OF THE DRAZIN INVERSE

Determinantal representation of the Drazin inverse is obtained by using its limit representation. By applying this determinantal representation of the Drazin inverse, the solution of system of the generalized normal equations is represented by an analogue of Cramer's rule.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.10.05