УДК 517.524

І. В. Чернега

ОПЕРАТОР ЗСУВУ У ПРОСТОРІ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ℓ_1

Досліджуються симетричні поліноми на просторі ℓ_1. З використанням оператора симетричного зсуву встановлено аналоги формули Мартіна та поляризаційної формули для симетричних поліномів і описано деякі диференціювання на алгебрі симетричних поліномів. Отримано застосування до симетричних аналітичних функцій.

Вступ. Нехай X — банахів простір над полем $\mathbb{K}$, де $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Функція $P : X \to \mathbb{K}$ називається n–однорідним поліномом, якщо існує симетрична n–лінійна форма $\widetilde{P} : X^n \to \mathbb{K}$ така, що $P(x) = \widetilde{P}(x, \ldots, x)$ для всіх $x \in X$. Неперервна функція на відкритій множині $U \in X$ називається аналітичною, якщо її можна локально зобразити у вигляді збіжного у рівномірній топології ряду з неперервних однорідних поліномів. Детальніше теорія аналітичних функцій на банахових просторах викладена в праці [3].

Припустимо, що простір X має симетричний базис $(e_i)_{i=1}^{\infty}$. Функція f на X називається симетричною, якщо

$$f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\Big) = f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)} e_i\Big)$$

для довільного $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in X$ і довільної підстановки σ на множині натуральних чисел.

Симетричні функції на $\mathbb{C}^n$ або $\mathbb{R}^n$ є стандартним об'єктом класичної алгебри. Симетричні поліноми на просторах ℓ_p, $1 \le p < \infty$, вперше досліджувались в [1]. У роботі [4] доведено, що кожен симетричний поліном P на ℓ_p є алгебраїчною комбінацією „елементарних” симетричних поліномів

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \ge p.$$

1. Означення симетричного зсуву. Властивості. Легко бачити, що для симетричної функції $f(x)$ на ℓ_1 функція $f(x+y)$ для деякого фіксованого $y \in \ell_1$ не є, взагалі кажучи, симетричною. Тобто простір симетричних функцій не є інваріантним відносно звичайного оператора зсуву $f(x) \mapsto f(x+y)$. У [2] запропоновано інший зсув на ℓ_1, який зберігає простір симетричних функцій.

Нехай $x, y \in \ell_1$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Означимо симетричний зсув $x \bullet y \in \ell_1$ формулою $x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$.

Відзначимо основні властивості симетричного зсуву.

1. Якщо $x = \sigma_1(u)$ і $y = \sigma_2(v)$ для деяких підстановок σ_1, σ_2, то $x \bullet y = \sigma(u \bullet v)$ для деякої підстановки σ на $\mathbb{N}$.

2. $\|x \bullet y\| = \|x\| + \|y\|$.

3. $F_n(x \bullet y) = F_n(x) + F_n(y)$ для довільного натурального n.

 ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. – 49, № 2. – С. 52-57.

Позначимо через T_y^s оператор симетричного зсуву $f(x) \mapsto f(x \bullet y)$. У [2] доведено, що T_y^s є неперервним гомоморфізмом алгебри симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 в себе.

Нехай $x^{\bullet m} := \underbrace{x \bullet \cdots \bullet x}_{m}$ і $\overset{m}{\underset{i=1}{\bullet}} x_i := x_1 \bullet \cdots \bullet x_m$. З властивості 3 випливає, що $F_k(x^{\bullet m}) = mF_k(x)$ і $F_k\Big(\overset{m}{\underset{i=1}{\bullet}} x_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{m} F_k(x_i)$ для довільних натуральних m і k.

Зауважимо, що в означенні симетричного зсуву суттєво, що простір нескінченновимірний. Надалі завжди вважатимемо, що симетричні поліноми визначені на нескінченновимірному ℓ_1.

2. Аналог формули Мартіна для симетричних поліномів. Нехай $P(x) = P_n(x) + \cdots + P_0$ — розклад деякого полінома P на однорідні доданки. Нагадаємо, що згідно з формулою Мартіна [5] для будь–яких попарно різних чисел $b_0, \ldots, b_n$ існує квадратна невироджена матриця $A(n, b)$, $n+1 \times n+1$, яка залежить тільки від $b = (b_0, \ldots, b_n)$ така, що

$$\begin{pmatrix} P_n(x) \\ \vdots \\ P_0 \end{pmatrix} = A(n,b) \begin{pmatrix} P(b_n x) \\ \vdots \\ P(b_0 x) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Таким чином, за допомогою формули Мартіна можна обчислити однорідну компоненту P_k, $k = 0, \ldots, n$, довільного неоднорідного полінома P степеня n.

Нехай тепер P — симетричний поліном на ℓ_1. Згідно з працею [4] існує поліном $Q(u_1, \ldots, u_n)$ від n змінних такий, що

$$P(x) = Q(F_1(x), \ldots, F_n(x)).$$

Скажемо, що симетричний поліном P є цілком однорідним поліномом степеня (n, m), якщо P — n–однорідний і відповідний йому поліном Q — m–однорідний. Наприклад, $F_1F_3 + F_2^2$ буде цілком однорідним поліномом степеня $(4, 2)$, а $F_1^2 + F_2$ — однорідним степеня 2, але не цілком однорідним. Очевидно, що кожен симетричний поліном можна подати (єдиним чином) у вигляді скінченної суми цілком однорідних. У цьому розділі ми отримаємо спосіб знаходження такого розкладу, використовуючи симетричний зсув та формулу Мартіна.

Поліном Q, взагалі кажучи, неоднорідний і $\deg Q \le n$. Нехай $Q = Q_n + \cdots + Q_0$ — розклад Q на однорідні доданки. Візьмемо довільний набір попарно різних натуральних чисел $m = (m_0, \ldots, m_n)$. Оскільки

$$P(x^{\bullet m_k}) = Q(m_k F_1(x), \ldots, m_k F_n(x)),$$

то згідно з (1)

$$\begin{pmatrix} Q_n(F_1(x), \ldots, F_n(x)) \\ \vdots \\ Q_0 \end{pmatrix} = A(n,m) \begin{pmatrix} P(x^{\bullet m_n}) \\ \vdots \\ P(x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Очевидно, що якщо P — n–однорідний поліном, то Q_k — (n,k)–цілком однорідний поліном. У загальному випадку: нехай $P = \sum\limits_{i,j=0}^{n} Q(i,j)$ — розклад симетричного полінома P на цілком однорідні доданки. Зауважимо, що $Q(i,j) = 0$ при $i < j$. Комбінуючи (1) і (2), отримуємо теорему.

Теорема 1. *Для довільного набору попарно різних дійсних чисел* $b = (b_0, \dots b_n)$ *та попарно різних натуральних чисел* $m = (m_0, \dots, m_n)$ *існують невироджені матриці* $A(n,b)$ *і* $A(n,m)$ *такі, що для довільного симетричного полінома* P *степеня* n

$$\begin{pmatrix} Q(n,n) & \cdots & Q(n,0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Q(0,n) & \cdots & Q(0,0) \end{pmatrix} = A(n,m) \begin{pmatrix} P(b_n x^{\bullet m_n}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P(b_n x^{\bullet m_0}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix} A^*(n,b).$$

3. Аналог поляризаційної формули для симетричних поліномів. Нагадаємо, що поляризаційна формула дозволяє відновити n–лінійну симетричну форму $\widetilde{P}$ за n–однорідним поліномом P. Поляризаційна формула має вигляд

$$\widetilde{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{e_i = \pm 1} e_1 \dots e_n P\bigg(\sum_{j=1}^{n} e_i x_j \bigg). \tag{3}$$

Припустимо, що P — симетричний поліном, $P(x) = Q(F_1(x), \dots, F_n(x))$ і Q — k–однорідний поліном. У цьому розділі ми знайдемо формулу, яка відновлює k–лінійну форму $\widetilde{Q}$ за поліномом P.

Для довільного номера k позначимо через $\alpha_{0,k}, \dots, \alpha_{k-1,k}$ комплексні корені k–ого степеня з 1. Тобто, $\alpha_{m,k} = e^{2mi\pi/k}$. Далі використаємо лему.

Лема 1. *Для будь–якого натурального* n

$$\sum_{m=0}^{k-1} \alpha_{m,k}^n = \begin{cases} k, & \textit{якщо } n \equiv 0 \bmod k, \\ 0, & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $\alpha_{m,k}^n = \alpha_{m,k}^{n \bmod k}$, достатньо довести лему для випадку $n < k$. З теореми Вієта випливає, що однорідні симетричні поліноми степеня $0 < n < k$ від коренів многочлена $x^k = 1$ дорівнюють нулеві. Зокрема, $\sum\limits_{m=0}^{k-1} \alpha_{m,k}^n = 0$ при $n < k$. Лему доведено. $\diamondsuit$

Лема 2. *Для кожного натурального* n *і скінченного набору векторів* $x_1, \dots, x_n \in \ell_1$ *існує елемент* $\gamma_n(x_1, \dots, x_n) \in \ell_1$ *такий, що* $F_k(\gamma_n(x_1, \dots, x_n)) = F_k(x_k)$ *для довільного* $1 \le k \le n$.

Д о в е д е н н я. Позначимо $\beta_n(x_1, \dots, x_n) := \mathop{\bullet}\limits_{j=1}^{n} \mathop{\bullet}\limits_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_{i,j}}{\sqrt[j]{j}} x_j$. Для довільного натурального k позначимо $J(k)$ множину дільників числа k. Враховуючи лему 1 і властивість 3, маємо: $F_k(\beta_n(x_1, \dots, x_n)) = \sum\limits_{j \in J(k)} \frac{j}{j^{k/j}} F_k(x_j)$. Зокрема, $F_1(\beta_n(x_1, \dots, x_n)) = F_1(x_1)$. Припустимо, що для деякого $l < n$ знайшли елемент $\beta_n^l(x_1, \dots, x_n) \in \ell_1$ такий, що $F_k(\beta_n^l(x_1, \dots, x_n)) = F_k(x_k)$ при $k \le l$ і $F_k(\beta_n^l(x_1, \dots, x_n)) = \sum\limits_{j \le k} c_j F_k(x_k)$ при $l < k \le n$, де c_j — деякі константи і $c_k = 1$. Покладемо

$$\beta_n^{l+1}(x_1, \dots, x_n) := \beta_n^l(x_1, \dots, x_n) \bullet \bigg(\mathop{\bullet}\limits_{i=1}^{l} \beta_n(\underbrace{0, \dots, 0}_{l}, (-1)^{1/l+1} c_i x_i, 0, \dots, 0) \bigg).$$

Тоді $F_k(\beta_n^{l+1}(x_1, \dots, x_n)) = F_k(x_k)$ при $k \le l+1$ і $F_k(\beta_n^{l+1}(x_1, \dots, x_n)) = \sum\limits_{j \le k} c'_j F_k(x_k)$ при $l+1 < k \le n$, для деяких констант c'_i і $c'_k = 1$. Залишилось покласти $\gamma_n(x_1, \dots, x_n) = \beta_n^n(x_1, \dots, x_n)$ — шуканий елемент. Лему доведено. $\diamondsuit$

Наслідок. *Нехай P — симетричний поліном степеня n на ℓ_1. Тоді*

$$P(\gamma_n(x_1,\dots,x_n)) = Q(F_1(x_1),\dots,F_n(x_n)).$$

Нехай $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ — стандартний базис в n-вимірному просторі. Можемо записати $P(x) = Q(F_1(x),\dots,F_n(x)) = Q\Big(\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\mathbf{e}_k\Big)$.

Теорема 2. *Нехай P — симетричний поліном на ℓ_1 такий, що відповідний поліном Q є n–однорідним. Тоді n–лінійна симетрична форма $\widetilde{Q}$ має вигляд*

$$\widetilde{Q}\Big(\sum_{k=1}^{n} F_k(x_1)\mathbf{e}_k,\dots,\sum_{k=1}^{n} F_k(x_n)\mathbf{e}_k\Big) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{e_i=\pm 1} e_1\dots e_n P\Big(\mathop{\bullet}_{j=1}^{n}\gamma_n(e_i x_j,\dots,e_i x_j)\Big).$$

Д о в е д е н н я. Згідно з наслідком

$$P\Big(\mathop{\bullet}_{j=1}^{n}\gamma_n(e_i x_j,\dots,e_i x_j)\Big) = Q\Big(\sum_{j=1}^{n} e_i\Big(\sum_{k=1}^{n} F_k(x_j)\mathbf{e}_k\Big)\Big).$$

Далі застосовуємо поляризаційну формулу (3), взявши замість P поліном Q, а замість x_j — вектор $\sum_{k=1}^{n} F_k(x_j)\mathbf{e}_k$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

4. Диференціювання. Нагадаємо, що лінійний оператор D, визначений на алгебрі, називається диференціюванням, якщо для нього виконується правило Лейбніца. Тобто $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ для довільних f і g з даної алгебри.

Нехай $h \in \ell_1$, $m \in \mathbb{N}$ і P — симетричний поліном на ℓ_1. Означимо оператор D_m співвідношенням

$$D_m P(x)[h] := \lim_{\lambda\to 0}\frac{P\Big(x \bullet \Big(\mathop{\bullet}_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda}{m^{1/m}}\alpha_{k,m}h\Big)\Big) - P(x)}{\lambda^m}.$$

Теорема 3. *Оператор $D_m P(x)[h]$ є диференціюванням на алгебрі симетричних поліномів. Якщо $P(x) = Q(F_1(x),\dots,F_n(x))$, то*

$$D_m P(x)[h] = \frac{\partial Q}{\partial u_m}(F_1(x),\dots,F_n(x))F_m(h), \tag{4}$$

де $\dfrac{\partial Q}{\partial u_m}$ — диференціювання за u_m полінома $Q(u_1,\dots,u_n)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки відображення $P \mapsto Q$ є гомоморфізмом алгебри симетричних поліномів, породжених $F_1,\dots,F_n$, в алгебру поліномів від n змінних, і $\dfrac{\partial Q}{\partial u_m}$ — оператор диференціювання на алгебрі поліномів від n змінних, то достатньо перевірити формулу (4). Використовуючи властивості симетричного зсуву і означення D_m, маємо

$$D_m P(x)[h] = \lim_{\lambda\to 0}\Bigg[\frac{Q(F_1(x),\dots,F_m(x)+\lambda^m F_m(h),\dots,F_n(x)+\lambda^n\frac{m}{m^{n/m}}F_n(h))}{\lambda^m} - \\ - \frac{Q(F_1(x),\dots,F_n(x)}{\lambda^m}\Bigg].$$

Якщо позначити $u_k = F_k(x)$, $a_k = F_k(h)$, $t = \lambda^m$, отримаємо: $D_m P(x)[h] =$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{Q(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m + ta_m, u_{m+1} + t^{r_{m+1}} a_{m+1}, \ldots, u_n + t^{r_n} a_n)}{t} - \right.$$
$$\left. - \quad \frac{Q(u_1, \ldots, u_n)}{t} \right],$$

де $r_{m+1}, \ldots, r_n$ — деякі числа, більші від одиниці. Тому

$$\begin{aligned} D_m P(x)[h] &= \lim_{t \to 0} \frac{Q(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m + ta, u_{m+1}, \ldots, u_n) - Q(u_1, \ldots, u_n)}{t} = \\ &= \frac{\partial Q}{\partial u_m}(u_1, \ldots, u_n) a = \frac{\partial Q}{\partial u_m}(F_1(x), \ldots, F_n(x)) F_m(h). \end{aligned}$$

Теорему доведено. $\diamondsuit$

5. Застосування до аналітичних функцій. Легко бачити, що для довільного $x \in \ell_1$, $\|x\| < 1$, числова послідовність $(F_k(x))_{k=1}^{\infty}$ належить до простору послідовностей ℓ_1. Тому, якщо Q — деякий поліном на ℓ_1, то $Q\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} F_k(x) e_k\Big)$ — симетрична аналітична функція на одиничній кулі $B_{\ell_1} \subset \ell_1$, де $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ — стандартний базис в ℓ_1. Скажемо, що симетрична аналітична функція f на B_{ℓ_1} поліноміально породжена, якщо існує поліном Q на ℓ_1 такий, що $f(x) = Q\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} F_k(x) e_k\Big)$. Зауважимо, що якщо f породжена поліномом Q, то $f(x \bullet y) = Q\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} (F_k(x) + F_k(y)) e_k\Big)$. Легко перевірити, що деякі результати попередніх розділів, отримані для симетричних поліномів, залишаються правильними для поліноміально породжених симетричних аналітичних функцій. Наприклад, якщо f породжена поліномом Q, то однорідні компоненти цього полінома можна знайти за формулою (2). Оператори D_m є диференціюваннями на алгебрі поліноміально породжених симетричних аналітичних функцій і для кожної такої функції f маємо, що $D_m^k(f) = 0$ для достатньо великого k.

Позначимо $\mathbb{D} := \Big\{x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in \ell_1 \colon \ \sup\limits_i |x_i| < 1\Big\}$. Легко бачити, що $\mathbb{D}$ — відкрита множина. Ми будемо називати $\mathbb{D}$ полідиском в ℓ_1. Полідиск $\mathbb{D}$ є замкненим відносно симетричного зсуву. Тобто, $x \bullet y \in \mathbb{D}$, якщо $x, y \in \mathbb{D}$.

Лема 3. *Нехай $x \in \mathbb{D}$, $\|x\| < m$, де m — найменше натуральне число, яке задовольняє цю нерівність. Тоді існують $y_1, \ldots, y_m \in B_{\ell_1}$ такі, що $x = y_1 \bullet \cdots \bullet y_m$.*

Д о в е д е н н я. При $m = 1$ твердження леми, очевидно, виконується. Припустимо, що воно виконується для деякого $m - 1 \geq 1$. Згідно з умовою теореми, $\|x\| = m - 1 + r$ для деякого $0 \leq r < 1$. Оскільки $\|x_1 e_1\| = |x_1| < 1$, то $|x_1| \leq r$ або $r < x_1 < r + 1$. Якщо $r < x_1 < r + 1$, покладемо $y_1 = x_1 e_1$. Якщо $x_1 \leq r$, розглянемо вектор $x_1 e_1 + x_2 e_2$. Припустимо, що для деякого $j \geq 1$ існує вектор $\sum\limits_{i=1}^{j} x_i e_i$ такий, що $\sum\limits_{i=1}^{j} |x_i| \leq r$. Оскільки $|x_{j+1}| < 1$, то або $\sum\limits_{i=1}^{j+1} |x_i| \leq r$, або $r < \sum\limits_{i=1}^{j+1} |x_i| < r + 1$. Враховуючи, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| > r$, отримуємо, що для деякого номера k, $r \le \sum_{i=1}^{k} |x_i| < r + 1$. Покладемо $y_1 := \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$ і $x' = \sum_{i=k+1}^{\infty} x_i e_i$. Тоді $x = y_1 \bullet x'$ і $r < \|y_1\| < 1 + r$. Отже, $\|x'\| < m - 1$ і $m - 1$ — найменше натуральне число, для якого виконується ця нерівність. Застосовуємо індуктивне припущення до x'. Лему доведено. $\diamondsuit$

Теорема 4. *Довільна поліноміально породжена симетрична аналітична функція f на B_{ℓ_1} однозначно продовжується до деякої симетричної аналітичної функції на $\mathbb{D}$.*

Д о в е д е н н я. Нехай Q — поліном на ℓ_1, який породжує f. Згідно з лемою 3, для довільного $x \in \mathbb{D}$, $x = y_1 \bullet \dots \bullet y_m$, для деякої скінченної послідовності $y_1, \dots, y_m \in B_{\ell_1}$. Тому

$$Q\Big(\sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) e_k\Big) = Q\Big(\sum_{k=1}^{\infty} F_k(y_1 \bullet \dots \bullet y_m) e_k\Big) = Q\Big(\sum_{k=1}^{\infty} (F_k(y_1) + \dots + F_k(y_n)) e_k\Big).$$

Залишилось покласти $f(x) := Q\Big(\sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) e_k\Big)$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

1. *Немировский А. С., Семёнов С. М.* О полиномиальной аппроксимации функций на гильбертовом пространстве // Мат. сборник, 1973. – **21**, № 2. – С. 255–277.
2. *Cherneha I., Galindo P., and Zagorodnyuk A.* A symmetrization device// Preprint.
3. *Dineen S.* Complex Analysis in Infinite Dimensional Spaces. – London: Springer, 1999. – 543 p.
4. *Gonzalez M., Gonzalo R. and Jaramillo J.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces// J. London Math. Soc., 1999. – **59**. – P. 681–697.
5. *Martin R. S.* Contributions to the theory of functionals// Ph. D. Thesis, University of California, 1932.

ОПЕРАТОР СДВИГА В ПРОСТРАНСТВЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ℓ_1

В работе исследуются симметрические полиномы на пространстве ℓ_1. Используя оператор симметрического сдвига, установлены аналоги формулы Мартина и поляризационной формулы для симметрических полиномов и описаны некоторые дифференцирования на алгебре симметрических полиномов. Получены применения к симметрическим аналитическим функциям.

A TRANSLATION OPERATOR IN THE SPACE OF SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS ON ℓ_1

We investigate symmetric polynomials on ℓ_1. Using an operator of symmetric translation, we establish some analogues of the Martin formula and the polarization formula for symmetric polynomials and describe some derivatives in the algebra of symmetric polynomials. Some applications to symmetric analytic functions are indicated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.09.05