УДК 517.524

А. В. Загороднюк, З. Г. Новосад

ГІПЕРЦИКЛІЧНІ ОПЕРАТОРИ КОМПОЗИЦІЇ НА ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Побудовано приклад гіперциклічного оператора композиції в просторі цілих аналітичних функцій на $\mathbb{C}^n$, *який не комутує з оператором зсуву.*

Вступ. Лінійний неперервний оператор T на просторі Фреше X називається гіперциклічним, якщо існує вектор $x_0 \in T$ такий, що множина $\{x_0, Tx_0, T^2x_0, \ldots\}$ щільна в X. У цьому випадку x_0 називається гіперциклічним вектором оператора T. Класична теорема Біркгофа [4] стверджує, що оператор зсуву T_a на довільний ненульовий вектор a, $T_a\colon f(x) \mapsto f(x+a)$ є гіперциклічним у просторі $H(\mathbb{C})$. Зауважимо, що оператор T_a можна подати у вигляді

$$T_a(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} D^n f,$$

де D — оператор диференціювання. У праці [7] Годфруа і Шапіро узагальнили теорему Біркгофа, довівши, що коли $\Phi(z) = \sum\limits_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha z^\alpha$ — деяка ціла функція експоненціального типу на $\mathbb{C}^n$, відмінна від константи, то оператор

$$f \mapsto \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha D^\alpha f, \qquad f \in H(\mathbb{C}^n), \tag{1}$$

є гіперциклічним. Тут $H(\mathbb{C}^n)$ — простір цілих функцій на $\mathbb{C}^n$. Більше того, в роботі [7] доведено, що кожен лінійний неперервний оператор на $H(\mathbb{C}^n)$, який комутує зі зсувом і відмінний від добутку одиничного на константу, має вигляд (1) і, отже, є гіперциклічним.

У цій статті ми побудуємо гіперциклічний оператор композиції на просторі $H(\mathbb{C}^n)$, який не комутує з оператором зсуву. Нагадаємо, що оператор T на $H(\mathbb{C}^n)$ називається оператором композиції, якщо він має вигляд $Tf(x) = f(\phi(x))$ для деякого аналітичного відображення $\phi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Відомо [3, наслідок 2.3.], що довільний гіперциклічний оператор композиції на $H(\mathbb{C})$ тотожний до оператора зсуву T_a для деякого a.

У статті використовуються методи теорії аналітичних функцій на банахових просторах. Детальний виклад цієї теорії міститься у книзі Дініна [6]. Зауважимо, що в роботі [2] доведено аналог теореми Годфруа—Шапіро для спеціального класу цілих функцій на банаховому просторі з сепарабельним спряженим.

Основні результати. Нехай X — банахів простір з симетричним базисом $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Функція f називається симетричною, якщо

$$f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\Big) = f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_{\sigma(i)}\Big)$$

для довільного $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in X$ і довільної підстановки σ на множині натуральних чисел. Послідовність однорідних поліномів $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, $\deg P_n = n$

називається однорідним алгебраїчним базисом у просторі симетричних поліномів на X, якщо для кожного симетричного полінома P степеня n на X існує поліном q на $\mathbb{C}^n$ такий, що

$$P(x) = q(P_1(x), \ldots, P_n(x)).$$

Надалі у цій статті будемо розглядати випадок, коли $X = \ell_1$. Простір симетричних поліномів на ℓ_1 позначатимемо $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Для нас будуть важливими два алгебраїчні базиси у $\mathcal{P}_s(\ell_1)$: $\mathbf{F} = (F_k)_{k=1}^{\infty}$ (див. [8]) і $\mathbf{G} = (G_k)_{k=1}^{\infty}$, де

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k,$$

$$G_k(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

Зв'язок між цими двома базисами задається відомою формулою Ньютона: $G_1 = F_1$ і для довільного k

$$G_{k+1} = \frac{1}{k+1}((-1)^k F_{k+1} - F_k G_1 + \cdots + F_1 G_k).$$

Позначимо через $H_s^n(\ell_1)$ алгебру цілих симетричних функцій на ℓ_1, яка породжена поліномами $F_1, \ldots, F_n$. У роботі [1] доведено, що відображення

$$\mathcal{F}_n^{\mathbf{F}} \colon f(t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(F_1(x), \ldots, F_n(x))$$

є топологічним ізоморфізмом алгебри $H(\mathbb{C}^n)$ на $H_s^n(\ell_1)$.

Нехай $x, y \in \ell_1$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Покладемо $x \bullet y :=$ $= (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$. Означимо

$$\mathcal{T}_y(f)(x) := f(x \bullet y).$$

Будемо називати операцію $x \mapsto x \bullet y$ симетричним зсувом, а оператор $\mathcal{T}_y$ — оператором симетричного зсуву. Легко бачити, що $f(x \bullet y)$ — симетрична функція при фіксованому y, якщо f — симетрична функція. У [5] показано, що $\mathcal{T}_y$ — топологічний ізоморфізм алгебри симетричних аналітичних функцій в себе. Відзначимо одну очевидну властивість симетричного зсуву:

$$F_k(x \bullet y) = F_k(x) + F_k(y) \tag{2}$$

для довільного натурального k.

Теорема 1. *Нехай $y \in \ell_1$ і вектор $(F_1(y), \ldots, F_n(y)) \in \mathbb{C}^n$ ненульовий. Тоді оператор симетричного зсуву $\mathcal{T}_y$ буде гіперциклічним на $H_s^n(\ell_1)$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $a = (F_1(y), \ldots, F_n(y)) \in \mathbb{C}^n$. Оскільки $a \neq 0$, то, згідно з теоремою Годфруа—Шапіро, T_a — гіперциклічний оператор на $H(\mathbb{C}^n)$. Нехай f — деякий гіперциклічний вектор оператора T_a. Покладемо

$$g(x) = \mathcal{F}_n^{\mathbf{F}}(f)(x) = f(F_1(x), \ldots, F_n(x)).$$

Згідно з властивістю (2),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_y(g)(x) &= g(x \bullet y) = f(F_1(x) + F_1(y), \ldots, F_n(x) + F_n(y)) = \\ &= \mathcal{F}_n^{\mathbf{F}}(f)(t + a) = \mathcal{F}_n^{\mathbf{F}}(T_a(f)(t)). \end{aligned}$$

Оскільки множина $(T_a^k(f))_{k=1}^{\infty}$ щільна в $H(\mathbb{C}^n)$, то множина $(\mathcal{T}_y^k(g))_{k=1}^{\infty} =$ $= (\mathcal{F}_n^{\mathbf{F}}(T_a^k(f)))_{k=1}^{\infty}$ — щільна в $H_s^n(\ell_1)$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Лема 1. *Нехай $(P_k)_{k=1}^{\infty}$ — деякий однорідний алгебраїчний базис в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ і $y \in \ell_1$. $P_k(y) = 0$ для $1 \le k \le n$ тоді й тільки тоді, коли $F_k(y) = 0$ для $1 \le k \le n$.*

Д о в е д е н н я. Оскільки $(P_k)_{k=1}^{\infty}$ — алгебраїчний базис, то для довільного m, $F_m(x) = q_m(P_1(x), \dots, P_m(x))$ для деякого полінома q_m на $\mathbb{C}^m$. Якщо $P_k(y) = 0$, то $P_k(ty) = t^k P_k(y) = 0$. Тому $F_m(ty) = t^m F_m(y) \equiv q_m(0)$. Отже, $F_m(y) = 0$. Оскільки $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ — однорідний алгебраїчний базис, то вірне і обернене твердження. $\diamondsuit$

Лема 2. *Нехай $\mathbf{P} = (P_k)_{k=1}^{\infty}$ — деякий однорідний алгебраїчний базис в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Тоді відображення*

$$\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}} \colon f(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(P_1(x), \dots, P_n(x))$$

є топологічним ізоморфізмом з $H(\mathbb{C}^n)$ в $H_s^n(\ell_1)$.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що $\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}}$ — гомоморфізм. У [1] доведено, що для довільного вектора $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ існує елемент $x \in \ell_1$ такий, що $P_1(x) = t_1, \dots, P_n(x) = t_n$. Тому відображення $\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}}$ ін'єктивне. Покажемо, що воно сюр'єктивне. Нехай $u \in H_s^n(\ell_1)$ і $u = \sum u_k$ — розвинення Тейлора на однорідні поліноми. Для кожного полінома u_k існує поліном q_k на $\mathbb{C}^n$ такий, що $u_k = q_k(P_1, \dots, P_n)$. Покладемо $f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t_1, \dots, t_n)$. Оскільки f є степеневим рядом, який збігається для довільного вектора $(t_1, \dots, t_n)$, то f — ціла аналітична функція на $\mathbb{C}^n$. Очевидно, що $\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}}(f) = u$. Неперервність $\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}}$ випливає з відомої теореми про автоматичну неперервність ізоморфізма між двома комутативними скінченно породженими алгебрами Фреше [9, с.43]. Лему доведено. $\diamondsuit$

Наступна лема є результатом безпосередніх обчислень.

Лема 3. $G_n(x \bullet y) = \sum_{i=0}^{n} G_i(x) G_{n-i}(y)$, *де для зручності приймаємо, що* $G_0 = 1$.

Теорема 2. *Нехай $y \in \ell_1$ такий, що вектор $(F_1(y), \dots, F_n(y))$ ненульовий і $\mathbf{P}$ — довільний однорідний алгебраїчний базис на $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Тоді оператор*

$$T_{\mathbf{P},y} := (\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}})^{-1} \mathcal{T}_y \mathcal{F}_n^{\mathbf{P}}$$

є гіперциклічним оператором на $H(\mathbb{C}^n)$.

Д о в е д е н н я. Нехай u — гіперциклічний вектор оператора $\mathcal{T}_y$ на $H_s^n(\ell_1)$. Покладемо $f(t) := (\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}})^{-1}(u)$. Тоді

$$[(\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}})^{-1} \mathcal{T}_y \mathcal{F}_n^{\mathbf{P}}]^m f = [(\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}})^{-1} \mathcal{T}_y^m \mathcal{F}_n^{\mathbf{P}}] f = (\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}})^{-1} \mathcal{T}_y^m(u).$$

Оскільки $(\mathcal{T}_y^m(u))_{m=1}^{\infty}$ — щільна множина в $H_s^n(\ell_1)$ і $(\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}})^{-1}$ — ізоморфізм з $H_s^n(\ell_1)$ в $H(\mathbb{C}^n)$, то $[(\mathcal{F}_n^{\mathbf{P}})^{-1} \mathcal{T}_y^m(u)]_{m=1}^{\infty} = (T_{\mathbf{P},y}^m f)_{m=1}^{\infty}$ — щільна множина в $H(\mathbb{C}^n)$. Отже, f — гіперциклічний вектор оператора $T_{\mathbf{P},y}$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Знайдемо вигляд оператора $T_{\mathbf{P},y}$, коли $\mathbf{P} = \mathbf{G}$. Згідно з лемою 3,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_y \mathcal{F}_n^{\mathbf{G}} f(t_1, \dots, t_n) &= T_y f(G_1(x), \dots, G_n(x)) = f(G_1(x \bullet y), \dots, G_n(x \bullet y)) = \\ &= f\Big(G_1(x) + G_1(y), \dots, \sum_{i=0}^{n} G_i(x) G_{n-i}(y)\Big). \end{aligned}$$

Тому

$$T_{\mathbf{G},y}f(t_1,\ldots,t_n) = f\Big(t_1+b_1,\ldots,\sum_{i=0}^{k} t_i b_{k-i},\ldots,\sum_{i=0}^{n} t_i b_{n-i}\Big), \tag{3}$$

де $t_0 = 1$, $b_0 = 1$, $b_k = G_k(y)$ для $1 \le k \le n$. Зауважимо, що, згідно з лемою 1, якщо $\mathcal{T}_y$ — гіперциклічний оператор, то $(b_1,\ldots,b_n)$ — ненульовий вектор.

Наслідок. *Якщо $n > 1$, то на $H(\mathbb{C}^n)$ існує гіперциклічний оператор композиції, який не комутує зі зсувом.*

Д о в е д е н н я. Покажемо, що $T_{\mathbf{G},y}$ не комутує з T_a. Згідно з (3)

$$T_a \circ T_{\mathbf{G},y}f(t_1,\ldots,t_n) = f\Big(t_1+b_1+a_1,\ldots,\sum_{i=0}^{n} t_i b_{n-i}+a_n\Big),$$

$$T_{\mathbf{G},y} \circ T_a f(t_1,\ldots,t_n) = f\Big(t_1+b_1+a_1,\ldots,\sum_{i=0}^{n} (t_i+a_i) b_{n-i}\Big).$$

Очевидно, що $T_a \circ T_{\mathbf{G},y} \ne T_{\mathbf{G},y} \circ T_a$, якщо a і b — ненульові вектори і $n > 1$. Наслідок доведено. $\diamondsuit$

1. *Alencar R., Aron R., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric holomorphic functions on l_p // Bull. London Math. Soc., 2003. – **35**. – P. 55–64.
2. *Aron R. and Bès J.* Hypercyclic differentiation operators// Contemporary Mathematics, 1999. – **232**. – P. 39–46.
3. *Bès J.* Three problems on hypercyclic operators// Ph. D. Thesis. Kent State University, 1998.
4. *Birkhoff G. D.* Demonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières// C. R. Acad. Sci. Paris, 1929. – **189**. – P. 473–475.
5. *Cherneha I., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* A symmetrization device// Preprint.
6. *Dineen S.* Complex Analysis in Infinite Dimensional Spaces. – London: Springer, 1999. – 543 p.
7. *Godefroy G. and Shapiro J. H.* Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds// J. Funct. Anal., 1991. – **98**. – P. 229–269.
8. *Gonzalez M., Gonzalo R. and Jaramillo J.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces// J. London Math. Soc., 1999. – **59**. – P. 681–697.
9. *Hussian T.* Multiplicative Functionals on Topological Algebras//Research Notes Math. Piman Advanced Publ. Program 85. Boston–London–Melbourne, 1983.

ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ НА ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Построен пример гиперциклического оператора композиции в пространстве целых аналитических функций на $\mathbb{C}^n$, который не коммутирует с оператором сдвига.

HYPERCYCLIC OPERATORS OF COMPOSITION ON SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

We construct an example of hypercyclic composition operator on the space of entire functions on $\mathbb{C}^n$ which does not commute with the translation operator.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.09.05