УДК 517.98

М. І. Дмитришин

ОЗНАКИ ПОВНОТИ МНОЖИНИ КОРЕНЕВИХ ВЕКТОРІВ РЕГУЛЯРНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

Наведено ознаки повноти множини кореневих векторів регулярних еліптичних операторів у просторах L_p $(1 < p < \infty)$. При цьому використано відомі ознаки повноти кореневих векторів компактних операторів у гільбертовому просторі та розглянуто спеціальну шкалу нормованих просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора в банаховому просторі.

1. Розглянемо у просторі $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ регулярний еліптичний оператор порядку $2m$: $A : \mathcal{C}^1 \ni u \longmapsto \sum\limits_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(t) D^\alpha u(t) \in L_p(\Omega)$, $a_\alpha(t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ з областю визначення $\mathcal{C}^1 := \Big\{ u \in W_p^{2m}(\Omega) : B_j u(t)_{|\partial\Omega} = 0;\ j = 1, \ldots, m \Big\}$, де $W_p^{2m}(\Omega)$ — простір Соболєва і $B_j = \sum\limits_{|\alpha| \le k_j} b_{j,\alpha}(t) D^\alpha$, $b_{j,\alpha}(t) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ — набір граничних операторів.

Як звичайно, кажемо, що множина кореневих векторів регулярно еліптичного оператора є повною в просторі $L_p(\Omega)$, якщо замикання її лінійної оболонки збігається з $L_p(\Omega)$. Відомо, що, якщо оператор A в $L_2(\Omega)$ задається формулою: $Au = \tilde{A}u + \sum\limits_{|\alpha| \le 2m-1} \check{a}_\alpha(t) D^\alpha u$, $\check{a}_\alpha(t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, де $\tilde{A}$ — самоспряжений необмежений оператор з областю визначення $\mathcal{C}^1$, то множина кореневих векторів оператора A є повною в $L_2(\Omega)$ [5, теорема 5.6.3]. У статті [5] також наведено огляд робіт, присвячених проблемі повноти кореневих векторів еліптичних операторів у просторах $L_p(\Omega)$.

У пропонованій роботі наведено нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. При цьому використано відомі ознаки повноти кореневих векторів компактних операторів у гільбертовому просторі [2] та ознаки щільності множини цілих векторів експоненціального типу оператора A в банахових просторах [1, 4].

2. Надалі припускаємо, що резольвентна множина $\rho(A)$ оператора A непорожня. Відомо [5, § 5.4.4], що у такому випадку спектр $\sigma(A)$ оператора A складається з ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності без скінченних граничних точок. При цьому спектр $\sigma(A)$ і відповідні підпростори кореневих векторів не залежать від показника підсумовування p. Підпростори кореневих векторів містяться в просторі

$$C^\infty_{A,\{B_j\}}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : B_j A^k u_{\,|\,\partial\Omega} = 0; j = 1, \ldots, m; k \in \mathbb{Z}_+ \Big\},$$

що є замкненим підпростором локально опуклого простору $C^\infty(\overline{\Omega})$ (топологія простору $C^\infty(\overline{\Omega})$ визначається сім'єю півнорм $\sup\limits_{t \in \Omega} |D^\alpha u(t)|, 0 \le |\alpha| < \infty$).

Позначимо через $\{\lambda_i(R)\}_1^{\nu(R)}$ послідовність, що складається із усіх ненульових власних чисел резольвенти $R(\lambda, A)$ оператора A, пронумерованих у порядку спадання модулів, причому при нумерації кожне власне число рахується стільки разів, яка його алгебраїчна кратність; $\nu(R)$ — сума алгебраїчних кратностей всіх ненульових власних чисел оператора $R(\lambda, A)$.

Нехай $R_{\mathcal{R}} = \dfrac{1}{2}[R(\lambda,A)+R(\lambda,A)^*]$, $R_{\mathcal{J}} = \dfrac{1}{2i}[R(\lambda,A)-R(\lambda,A)^*]$ — ермітові компоненти оператора $R(\lambda,A)$ в гільбертовому просторі $L_2(\Omega)$. Нагадаємо, що оператор $R(\lambda,A)$ є дисипативним, якщо його уявна компонента $R_{\mathcal{J}}$ є невід'ємним оператором, тобто, якщо скалярний добуток $(R_{\mathcal{J}}u \mid u) \geq 0$ для всіх $u \in L_2(\Omega)$.

Нехай $S \in \mathfrak{L}[L_2(\Omega)]$ — компактний оператор, $R(K)$ — образ оператора $K \in \mathfrak{L}[L_2(\Omega)]$. Числа $s_n(S) = \inf_{\dim R(K)\leq n} \|S-K\|$, $n = 0,1,2,\ldots$, називаються апроксимаційними числами. Через $\mathfrak{S}_q$ $(1 \leq q \leq \infty)$ позначимо нормований ідеал компактних операторів $\mathfrak{S}_q = \Big\{ S \in \mathfrak{L}[L_2(\Omega)],\ \|S\|_{\mathfrak{S}_q} = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^q(S) \Big)^{1/q} < \infty \Big\}$.

Теорема 1. *Нехай $R(\lambda,A)$ — дисипативний оператор в $L_2(\Omega)$ з уявною компонентою $R_{\mathcal{J}} \in \mathfrak{S}_1$ і виконується одна із наступних умов:*

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu(R)} |\operatorname{Im}\lambda_i(R)| = \|R_{\mathcal{J}}\|_{\mathfrak{S}_1}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n s_n(R(\lambda,A)) = 0$,

(iii) $\displaystyle\lim_{\tau\to\infty} \frac{n_+(\tau,R_{\mathcal{R}})}{\tau} = 0$ *або* $\displaystyle\lim_{\tau\to\infty} \frac{n_-(\tau,R_{\mathcal{R}})}{\tau} = 0$,

де $n_\pm(\tau,R_{\mathcal{R}})$ — кількість характеристичних чисел компоненти $R_{\mathcal{R}}$ відповідно в інтервалах $[0,\tau]$ і $[-\tau,0]$.

Тоді множина кореневих векторів оператора A є повною в просторі $L_p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$.

Д о в е д е н н я. Покладемо, без обмеження загальності, $0 \in \rho(A)$. Тоді, згідно з результатами [5, § 5.4.3], при всіх $1<p<\infty$ справджується така оцінка:

$$c_1\|u\|_{W_p^{2m}(\Omega)} \leq \|Au\|_{L_p(\Omega)} \leq c_2\|u\|_{W_p^{2m}(\Omega)}, \qquad u \in \mathcal{C}^1, \tag{1}$$

де постійні $c_1, c_2 > 0$. Звідси і з компактності вкладень $W_p^{2m}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ [5, теорема 3.2.5] випливає компактність оператора A^{-1} в $L_p(\Omega)$. Застосовуючи тепер теореми 2.2, 4.2, 4.1 [2, гл. V], при виконанні відповідно умов (i)–(iii), отримуємо повноту множини кореневих векторів оператора A^{-1} в просторі $L_2(\Omega)$. Оскільки кореневі вектори операторів A і A^{-1} співпадають, то звідси випливає повнота кореневих векторів оператора A в $L_2(\Omega)$.

Використовуючи (1), за індукцією отримуємо

$$c_1\|u\|_{W_p^{2mk}(\Omega)} \leq \|A^k u\|_{L_p(\Omega)} \leq c_2\|u\|_{W_p^{2mk}(\Omega)}, \qquad u \in \mathcal{C}^k.$$

Звідси випливає, що область визначення $\mathcal{C}^k = \big\{u \in \mathcal{C}^{k-1} \colon Au \in \mathcal{C}^{k-1}\big\}$ оператора A^k співпадає із замкненим підпростором $\tilde{W}_p^{2mk}(\Omega)$ простору $W_p^{2mk}(\Omega)$. Тому $\mathcal{C}^\infty := \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k = \bigcap_{k=0}^{\infty} \tilde{W}_p^{2mk}(\Omega) = C^\infty_{A,\{B_j\}}(\overline{\Omega})$, звідки отримуємо повноту кореневих векторів оператора A в $C^\infty_{A,\{B_j\}}(\overline{\Omega})$, а отже, і в $C^\infty(\overline{\Omega})$. Далі залишається скористатись щільністю множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ у просторі $L_p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$ [5, теорема 3.2.2]. $\diamondsuit$

Позначимо через θ_R розхил кута з вершиною в початку координат, з яким співпадає замикання множини всіх значень $(R(\lambda,A)u \mid u)$, $u \in L_2(\Omega)$. Використовуючи теорему 6.1 [2, гл. V], подібно до доведення теореми 1, отримуємо такий критерій повноти.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) $\theta_R = \dfrac{\pi}{q},\ q \ge 1,$

2) $s_n(R(\lambda, A)) = o(n^{-1/q}),\ n \to \infty.$

Тоді множина кореневих векторів оператора A *є повною в просторі* $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

Використовуючи теорему 6.2 [2, гл. V], отримуємо підсилення теореми 2 для випадку $q > 1$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови:*

1) $\theta_R = \dfrac{\pi}{q},\ q > 1,$

2) $s_n([e^{i\alpha}R]_{\mathcal{J}}) = o(n^{-1/q}),\ n \to \infty,$

для деякого α. *Тоді множина кореневих векторів оператора* A *є повною в просторі* $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

Компактний оператор S має скінченний порядок, якщо $S \in \mathfrak{S}_q$ для деякого $q < \infty$. Нижню грань чисел q, для яких $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} s_n^q(S) < \infty$, називають порядком оператора S і позначають $q(S)$.

Використовуючи теорему 8.1 [2, гл. V], подібно до доведення теореми 1, отримуємо критерій повноти кореневих векторів оператора A в $L_p(\Omega)$, що виключає умову дисипативності резольвенти $R(\lambda, A)$ в $L_2(\Omega)$.

Теорема 4. *Нехай* $R(\lambda, A) = S(I + P)$, *де* S — *самоспряжений оператор і* $q(S) < \infty$, P — *компактний оператор в* $L_2(\Omega)$. *Тоді множина кореневих векторів оператора* A *є повною в просторі* $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

3. Кожному елементу $u \in \mathcal{C}^\infty$ поставимо у відповідність послідовність елементів $\left\{ (A/\nu)^{\mathfrak{s}(k)} u \colon k \in \mathbb{Z}_+ \right\}$ в $L_\rho(\Omega)$ $(1 < \rho < \infty)$, де $0 < \nu < \infty$ і $\mathfrak{s}\colon \mathbb{Z}_+ \ni k \longrightarrow \mathfrak{s}(k) \in \mathbb{Z}_+$ — перестановки в $\mathbb{Z}_+$, що задовольняють умову $\left\| (A/\nu)^{\mathfrak{s}(k)} u \right\| \ge \left\| (A/\nu)^{\mathfrak{s}(k+1)} u \right\|$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Для будь–яких чисел $1 \le p,\ q \le \infty$ означимо підпростір $l^\nu_{q,p}(A) = \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty : \|u\|_{l^\nu_{q,p}} < \infty \right\}$ з нормою

$$\|u\|_{l^\nu_{q,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (k+1)^{\frac{p}{q}-1} \left\| (A/\nu)^{\mathfrak{s}(k)} u \right\|^p \right)^{1/p} & : \quad 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (k+1)^{1/q} \left\| (A/\nu)^{\mathfrak{s}(k)} u \right\| & : \quad p = \infty. \end{cases}$$

Надалі покладаємо $l^\nu_1(A) := l^\nu_{1,1}(A)$, $l^\nu_\infty(A) := l^\nu_{\infty,\infty}(A)$. Простори $l^\nu_\infty(A)$, $l^\nu_1(A)$ складаються із векторів експоненціального типу і означені відповідно в роботах [3] та [4].

Підпростори $l^\nu_{q,p}(A)$ є інваріантними відносно A і виконуються неперервні вкладення $l^\nu_{q,p}(A) \hookrightarrow L_\rho(\Omega)$, $l^\nu_{q,p}(A) \hookrightarrow l^\mu_{q,p}(A)$, $\mu > \nu$. Тому можна визначити інваріантне відносно A об'єднання $l_{q,p}(A) := \bigcup \left\{ l^\nu_{q,p}(A) \colon \nu > 0 \right\}$.

Теорема 5. *Нехай* $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$. *Множина кореневих векторів оператора* A *є повною в просторі* $L_\rho(\Omega)$ $(1 < \rho < \infty)$ *тоді й тільки тоді, коли* $\overline{l_{q,p}(A)} = L_\rho(\Omega)$.

Д о в е д е н н я. Для чисел $0 < \theta < 1$, $1 \le p \le \infty$, дотримуючись позначень роботи [5], означимо інтерполяційні простори $(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A))_{\theta,p} = \Big\{u \in l_1^\nu(A) + l_\infty^\nu(A) : \|u\|_{\left(l_1^\nu,\, l_\infty^\nu\right)_{\theta,p}} < \infty\Big\}$ з нормою

$$\|u\|_{\left(l_1^\nu,\, l_\infty^\nu\right)_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty \tau^{-p\theta-1} K^p\left(\tau, u, l_1^\nu, l_\infty^\nu\right) d\tau\right)^{1/p} & : \quad 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{0<\tau<\infty} \tau^{-\theta} K\left(\tau, u, l_1^\nu, l_\infty^\nu\right) & : \quad p = \infty, \end{cases} \tag{2}$$

де $K\left(\tau, u, l_1^\nu, l_\infty^\nu\right) = \inf\limits_{u=u^0+u^1} \left(\left\|u^0\right\|_{l_1^\nu} + \tau \left\|u^1\right\|_{l_\infty^\nu}\right)$ для $u^0 \in l_1^\nu(A)$ і $u^1 \in l_\infty^\nu(A)$.

Покажемо, що для довільних $1 < q < \infty$ і $1 \le p \le \infty$ з точністю до еквівалентності норм виконується рівність

$$(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A))_{1-1/q,p} = l_{q,p}^\nu(A). \tag{3}$$

Розглянемо простори $l_{q,p} = \left\{\mathfrak{u} \colon \|\mathfrak{u}\|_{l_{q,p}} < \infty\right\}$ всіх послідовностей $\mathfrak{u} = \{u_k \in L_\rho(\Omega) \colon k \in \mathbb{Z}_+\}$ з нормою

$$\|\mathfrak{u}\|_{l_{q,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} (k+1)^{\frac{p}{q}-1} \|u_k^*\|^p\right)^{1/p} & : \quad 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} (k+1)^{1/q} \|u_k^*\| & : \quad p = \infty, \end{cases}$$

де послідовність $\{u_k^* \in L_\rho(\Omega) \colon k \in \mathbb{Z}_+\}$ складається із елементів послідовності $\{u_k \in L_\rho(\Omega) \colon k \in \mathbb{Z}_+\}$, розміщених у порядку незростання норм $\|u_0^*\| \ge \|u_1^*\| \ge \ge \|u_2^*\| \ldots$. Покладемо $l_1 := l_{1,1}$, $l_\infty := l_{\infty,\infty}$ і розглянемо інтерполяційний простір $\left(l_1, l_\infty\right)_{\theta,p} = \Big\{\mathfrak{u} \in l_1 + l_\infty : \|\mathfrak{u}\|_{(l_1,\, l_\infty)_{\theta,p}} < \infty\Big\}$ з нормою вигляду (2), в якій функціонал $K(\tau, u, l_1^\nu, l_\infty^\nu)$ замінено на $K(\tau, \mathfrak{u}, l_1, l_\infty) = \inf\limits_{\mathfrak{u}=\mathfrak{u}^0+\mathfrak{u}^1} \left(\|\mathfrak{u}^0\|_{l_1} + \tau\|\mathfrak{u}^1\|_{l_\infty}\right)$, де $\mathfrak{u}^0 \in l_1$, $\mathfrak{u}^1 \in l_\infty$. Згідно з теоремою 1.18.3/1 [5], виконується рівність $l_{q,p} = \left(l_1, l_\infty\right)_{\theta,p}$, $\|\mathfrak{u}\|_{l_{q,p}} \sim \|\mathfrak{u}\|_{(l_1, l_\infty)_{\theta,p}}$, $\theta = 1 - 1/q$.

Нехай $u_k = (A/\nu)^k u$ і $\mathfrak{u} = \left\{(A/\nu)^k u \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\}$, де $u \in \mathcal{C}^\infty$. Позначимо через $\mathcal{I}_\nu \colon \mathcal{C}^\infty \ni u \longrightarrow \mathfrak{u} \subset L_\rho(\Omega)$ лінійне відображення на деякий простір послідовностей в $L_\rho(\Omega)$. Тоді простір $l_{q,p}^\nu(A)$ ізометричний підпростору послідовностей в $L_\rho(\Omega)$ і відповідна ізометрія реалізується звуженням відображення $\mathcal{I}_\nu$, а саме $\mathcal{I}_\nu \colon l_{q,p}^\nu(A) \ni u \longrightarrow \mathcal{I}_\nu(u) = \mathfrak{u} \in l_{q,p}$, $\|u\|_{l_{q,p}^\nu} = \|\mathfrak{u}\|_{l_{q,p}}$. Зокрема, така ізометрія справедлива також для $p = q = 1$ і $p = q = \infty$. Для K–функціоналів інтерполяційних просторів $(l_1,\, l_\infty)_{\theta,p}$ і $(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A))_{\theta,p}$ виконуються оцінки $K\left(\tau, \mathcal{I}_\nu(u), l_1, l_\infty\right) = \inf\limits_{\mathcal{I}_\nu(u)=\mathcal{I}_\nu(u_0)+\mathcal{I}_\nu(u_1)} (\|\mathcal{I}_\nu(u_0)\|_{l_1} + \tau\|\mathcal{I}_\nu(u_1)\|_{l_\infty}) \le \le \|\mathcal{I}_\nu\|_{l_1^\nu \to l_1} K\!\left(\tau \dfrac{\|\mathcal{I}_\nu\|_{l_\infty^\nu \to l_\infty}}{\|\mathcal{I}_\nu\|_{l_1^\nu \to l_1}}, u, l_1^\nu, l_\infty^\nu\right)$. Покладаючи $\bar{\tau} = \tau\|\mathcal{I}_\nu\|_{l_\infty^\nu \to l_\infty} \|\mathcal{I}_\nu\|_{l_1^\nu \to l_1}^{-1}$, отримуємо $\|\mathcal{I}_\nu(u)\|_{(l_1,\, l_\infty)_{\theta,p}} \le \|\mathcal{I}_\nu\|_{l_1^\nu \to l_1} \dfrac{\|\mathcal{I}_\nu\|_{l_\infty^\nu \to l_\infty}^\theta}{\|\mathcal{I}_\nu\|_{l_1^\nu \to l_1}^\theta} \|u\|_{\left(l_1^\nu,\, l_\infty^\nu\right)_{\theta,p}} = \|u\|_{\left(l_1^\nu,\, l_\infty^\nu\right)_{\theta,p}}$. Застосовуючи подібні оцінки для оберненого відображення $\mathcal{I}_\nu^{-1}$, визначеного на образі $\mathcal{I}_\nu\left(l_1^\nu(A),\, l_\infty^\nu(A)\right)_{\theta,p}$ відображення $\mathcal{I}_\nu$, отримуємо $\|\mathcal{I}_\nu(u)\|_{(l_1,\, l_\infty)_{\theta,p}} = = \|u\|_{\left(l_1^\nu,\, l_\infty^\nu\right)_{\theta,p}}$, $u \in (l_1^\nu(A),\, l_\infty^\nu(A))_{\theta,p}$. Таким чином, рівність (3) встановлено.

Із рівності (3) безпосередньо випливає $l_1^\nu(A) \subset l_{q,p}^\nu(A)$ для всіх $1 < q < \infty$, $1 \le p \le \infty$. Тому

$$\bigcup \left\{l_1^\nu(A) \colon \nu > 0\right\} \subset \bigcup \left\{l_{q,p}^\nu(A) \colon \nu > 0\right\}. \tag{4}$$

Згідно з результатами роботи [4], лінійна оболонка $\mathfrak{R}(A)$ кореневих векторів оператора A співпадає з простором

$$\bigcup\left\{l_1^{\nu}(A)\colon \nu>0\right\} = \Big\{u\in W_{\rho}^{2m}(\Omega)\colon \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-k}\|A^k u\|_{L_{\rho}(\Omega)}<\infty,$$
$$B_jA^ku_{|\,\partial\Omega}=0;\ j=1,\dots,m;\ k\in\mathbb{Z}_+\Big\},$$

а тому з урахуванням (4) маємо вкладення $\mathfrak{R}(A)\subset l_{q,p}(A)$.

Оскільки $l_{\infty}^{\nu}(A)\subset l_1^{\nu+\varepsilon}(A)$ для довільного $\varepsilon>0$, то справджується вкладення $\bigcup\left\{l_{\infty}^{\nu}(A)\colon \nu>0\right\}\subset\bigcup\left\{l_1^{\nu}(A)\colon \nu>0\right\}$. Звідси і з рівності (3) маємо обернене вкладення $l_{q,p}(A)\subset\mathfrak{R}(A)$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Якщо коефіцієнти $a_{\alpha}(t)$ оператора A є сталими, то $l_{q,p}(A)$ при $1<q<\infty$, $1\le p\le\infty$ співпадає з простором

$$\mathcal{E}(A)=\Big\{u\in\operatorname{Exp}(\mathbb{C}^n)_{|\,\Omega}\colon B_jA^ku_{|\,\partial\Omega}=0;\ j=1,\dots,m;\ k\in\mathbb{Z}_+\Big\},$$

де $\operatorname{Exp}(\mathbb{C}^n)$ — простір цілих аналітичних функцій експоненціального типу над $\mathbb{C}^n$, звуження яких на Ω належать простору $L_{\rho}(\Omega)$. У цьому випадку із теореми 5 отримуємо

Наслідок. *Множина кореневих векторів оператора A зі сталими коефіцієнтами $a_{\alpha}(t)$ є повною в просторі $L_{\rho}(\Omega)$ тоді й тільки тоді, коли* $\overline{\mathcal{E}(A)}=L_{\rho}(\Omega)$.

1. *Горбачук М. Л.* Ознаки повноти множини цілих векторів експоненціального типу необмеженого оператора // Доп. НАН України. – 2001. – № 6. – С. 7–11.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
3. *Радыно Я. В.* Пространство векторов экспоненциального типа //Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 791–793.
4. *Lopushansky O. V., Dmytryshyn M. I.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum // Мат. студії. – 1998. – **9**, № 1. – С. 70–77.
5. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. – Berlin: Springer, 1995. – 664 p.

ПРИЗНАКИ ПОЛНОТЫ МНОЖЕСТВА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ РЕГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Приведены признаки полноты множества корневых векторов регулярных эллиптических операторов в пространствах L_p $(1<p<\infty)$. При этом использованы известные признаки полноты корневых векторов компактных операторов в гильбертовом пространстве и рассмотрена специальная шкала нормированных пространств целых векторов экспоненциального типа замкнутого оператора в банаховом пространстве.

THE COMPLETENESS CRITERIONS OF ROOT VECTORS OF REGULAR ELLIPTIC OPERATORS

The completeness criterions of root vectors of regular elliptic operators in spaces of L_p $(1<p<\infty)$ are given. For this purpose we use the known completeness criterions of root vectors of compact operators in Hilbert space and consider one special scale of normed spaces of exponential type vectors of closed operator in Banach space.

Прикарп. нац. ун-т ім. В.Стефаника,
Івано–Франківськ

Одержано
03.04.06