УДК 517.947

Л. С. Баб'як–Білецька, О. Л. Горбачук

ОДНА БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглядається неоднорідне еволюційне рівняння $\dfrac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t)$, *де лінійний оператор* A *є генератором півгрупи класу* C_0 *у банаховому просторі. Встановлено необхідні та достатні умови для існування і єдиності розв'язку* n *–точкової задачі.*

У роботі [3] досліджувалась двоточкова крайова задача $\dfrac{dv(t)}{dt} = Av(t)+ +f(t)+p$, $0 \le t \le t_1$, $v(0) = v_0$, $v(t_1) = v_1$, де A — лінійний замкнений оператор зі щільною в банаховому просторі E областю визначення $D(A)$, $f(t)$ — неперервна функція, визначена на $[0, t_1]$ зі значеннями у банаховому просторі E, p — параметр з простору E. Задача полягала в тому, щоб знайти параметр p, для якого рівняння має розв'язок $v(t)$, що задовольняє дві крайові умови, тобто знайти пару $(v(t), p)$.

До задач такого типу зводяться обернені задачі про визначення невідомого доданка у правій частині для рівняння з частинними похідними за заданою додатковою умовою у кінцевий момент часу.

У даній роботі дослідимо деякі обернені задачі для еволюційного рівняння першого порядку з параметрами у банаховому просторі і встановимо умови їх розв'язності. Зауважимо, що обернені задачі на скінченному інтервалі розглядались у працях У. А. Ранделла, А. Д. Іскендерова та Р. Г. Тагієва, Ю. С. Ейдельмана та інших [1–3, 5].

У банаховому просторі B розглянемо рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t), \qquad t \in [0, T), \tag{1}$$

з лінійним замкненим оператором A зі щільною областю визначення $D(A)$ в просторі B, де $f(t)$ — вектор–функція, задана на проміжку $[0, T)$, зі значеннями у просторі B. Вектор–функція $y(t)\colon [0, T) \to D(A)$ називається розв'язком рівняння (1) на $[0, T)$, якщо $y(t) \in C^1([0, T), B) \cap C([0, T), D(A))$ і задовольняє рівняння (1). Такий розв'язок рівняння називаємо класичним.

У багатьох застосуваннях доводиться розширяти поняття розв'язку, зокрема, розглядати слабкі розв'язки рівняння. Наведемо відповідне означення. Розглядається клас неперервно диференційовних вектор–функцій $\varphi(t)$ на $[0, T)$ зі значеннями у спряженому просторі B^* таких, що $\varphi(0) = 0$, $\varphi(T) = 0$ (при $T = \infty$ функція дорівнює нулеві в околі точки T) і $\varphi(t) \in D(A^*)$ для всіх $t \in [0, T)$, де A^* — спряжений оператор до A і $A^*(\varphi(t))$ — неперервно диференційовна функція у просторі B^* при $t \in \in [0, T)$. Згідно з [6], неперервна функція $y(t)$, $t \in [0, T)$ зі значеннями у просторі B називається слабким розв'язком (1), якщо виконується умова: $\int\limits_0^T \langle y(t), \varphi'(t)\rangle dt = -\int\limits_0^T \langle y(t), A^*(\varphi(t))\rangle dt - \int\limits_0^T \langle f(t), \varphi(t)\rangle dt$ для кожної функції $\varphi(t)$ із розглядуваного класу. Зауважимо, що класичний розв'язок завжди є слабким. Відомою є теорема про єдиність слабкого розв'язку рівняння (1) у рефлексивному банаховому просторі [8, с. 154, теорема 2.1].

Нехай далі у рівнянні (1) функція $f(t)$ є кусково–неперервною, тобто неперервною скрізь при $t \in [0,T)$, за винятком скінченного числа точок, і має вигляд

$$f(t) = \begin{cases} a_k, & t_{k-1} \le t < t_k, \quad k \in 1,...,n-1, \\ a_n, & t_{n-1} \le t < T, \end{cases} \tag{2}$$

де $a_k \in B$, $k \in 1,...,n$; t_k, $k \in 0,...,n$, — точки з $[0,T)$, $t_0 = 0$, $t_{n-1} < t_n < T$.

Розглянемо таку задачу: знайти функцію $y(t)$ та елементи $a_k \in B$ ($k \in 1,...,n$), такі, щоб вектор–функція $y(t)$ була слабким розв'язком рівняння (1) з правою частиною (2) і в заданих точках t_k ($k \in 0,...,n$) з проміжка $[0,T)$ набувала відповідно відомих значень $y_k \in D(A)$ ($k \in 0,...,n$), тобто

$$y(t_k) = y_k \in D(A), \qquad k \in 0,...,n. \tag{3}$$

Теорема. *Нехай* A — *генератор півгрупи* $U(t)$ *класу* (C_0) *і нуль не належить до точкового спектра* $\sigma_p(A)$ *оператора* A.

Для набору елементів $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$, *де* $y_k \in D(A)$ $(k \in 0,...,n)$, *задача* (1), (3) *з умовою* (2) *має розв'язок* $(y(t), a_1, a_2, \dots, a_n)$, *де* $a_k \in B$ $(k \in 1,...,n)$, *і вектор–функція* $y(t)$ *є слабким розв'язком рівняння* (1) *з неоднорідною частиною* (2), *що задовольняє умови* (3), *тоді й тільки тоді, коли виконується умова*

$$A(y_k - y_{k-1}) \in R[U(t_k - t_{k-1}) - I], \quad k \in 1,...,n, \tag{4}$$

де $R(\cdot)$ — *образ оператора* $(\cdot)$, I — *одиничний оператор.*

Д о в е д е н н я. *Достатність.* Нехай умова (4) виконується. Розв'язок $y(t)$ будуємо на проміжках $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in 0,...,n$, $t_0 = 0$, за відомою формулою [4, с. 158–159]

$$y(t) = U(t - t_{k-1})y_{k-1} + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} U(t-s)a_k ds, \quad t_{k-1} \le t < t_k, \ k \in 1,...,n. \tag{5}$$

На кожному з проміжків $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in 0,...,n$, цей розв'язок є класичним. Далі знайдемо параметри a_k, $k \in 1,...,n$, так, щоб виконувались умови (3). Бачимо, що $y(0) = U(0)y_0 = y_0$ і $y(t_k) = U(t_k - t_{k-1})y_{k-1} + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k - s)a_k ds = y_k$, $k \in 1,...,n$. Звідси $\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k - s)a_k ds = y_k - U(t_k - t_{k-1})y_{k-1}$, $k \in 1,...,n$. Застосуємо до обох частин цієї рівності оператор A [7, с. 5]:

$$A\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k - s)a_k ds\right) = A(y_k - U(t_k - t_{k-1})y_{k-1}), \qquad k \in 1,...,n. \tag{6}$$

Ця дія є оборотною, бо точка 0 не належить до точкового спектра $\sigma_p(A)$ оператора A. З іншого боку, перетворюючи ліву частину (6), використавши теорему 2.4 [7, с. 4–5], отримуємо, що $A\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} U(t_k - s)a_k ds\right) =$

$= A\left(\int\limits_0^{t_k - t_{k-1}} U(\eta) a_k d\eta \right) = \big(U(t_k - t_{k-1}) - I\big) a_k,\ k \in 1, ..., n.$ Тепер перетворимо праву частину (6):

$$A(y_k - U(t_k - t_{k-1}) y_{k-1}) = Ay_k - AU(t_k - t_{k-1}) y_{k-1} = Ay_k - U(t_k - t_{k-1}) Ay_{k-1} =$$

$$= Ay_k - U(t_k - t_{k-1}) Ay_{k-1} + Ay_{k-1} - Ay_{k-1} = A(y_k - y_{k-1}) - (U(t_k - t_{k-1}) - I) Ay_{k-1},$$

$k \in 1, ..., n$. Отже, отримаємо таку рівність:

$$(U(t_k - t_{k-1}) - I) a_k = A(y_k - y_{k-1}) - (U(t_k - t_{k-1}) - I) Ay_{k-1},\ k \in 1, ..., n. \quad (7)$$

Оскільки $y_k \in D(A)$, $k \in 0, ..., n$, і виконується умова (4), а також очевидно, що $(U(t_k - t_{k-1}) - I) Ay_{k-1} \in R(U(t_k - t_{k-1}) - I)$, $k \in 1, ..., n$, то весь вираз у правій частині рівності (7) належить $R(U(t_k - t_{k-1}) - I)$ при $k \in 1, ..., n$.

Отже, з умови (7) можна визначити шукані елементи a_k $(k \in 1, ..., n)$.

Розв'язок $y(t)$ рівняння (1) на $[0, T)$ буде неперервним, однак у точках t_i, $i \in 1, ..., n-1$, похідна його в класичному розумінні може не існувати. Враховуючи те, що функція $y(t)$ неперервна скрізь на $[0, T)$ і диференційовна всюди на $[0, T)$ за винятком скінченного числа точок t_i, $i \in 1, ..., n-1$, шляхом інтегруванням частинами можна переконатись, що функція $y(t)$ є слабким розв'язком рівняння (1) з неоднорідною частиною (2). Отже, для набору елементів $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$, де $y_k \in D(A)$, $k \in 0, ..., n$, задача (1), (3) з умовою (2) має розв'язок $(y(t), a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Необхідність. Нехай вектор–функція $y(t)$ є слабким розв'язком рівняння (1) з неоднорідною частиною (2) і задовольняє умови (3). З огляду на єдиність слабкого розв'язку [8] маємо, що функція $y(t)$ зображається у вигляді (5). Отже, має місце рівність (7). Звідси випливає, що права частина $A(y_k - y_{k-1}) - (U(t_k - t_{k-1}) - I) Ay_{k-1}$ належить до образу $R(U(t_k - t_{k-1}) - I)$, $k \in 1, ..., n$. Оскільки $(U(t_k - t_{k-1}) - I) Ay_{k-1}$ належить до образу оператора $U(t_k - t_{k-1}) - I$, то необхідно, щоб $A(y_k - y_{k-1}) \in R(U(t_k - t_{k-1}) - I)$, $k \in 1, ..., n$, тобто необхідно, щоб виконувалась умова (4). Теорему доведено. $\diamondsuit$

Наслідок 1. *Нехай A — генератор півгрупи $U(t)$ класу C_0 і задача* (1), (3) *за умови* (2) *має розв'язок вигляду $(y(t), a_1, a_2, \dots, a_n)$, де $y(t)$ — слабкий розв'язок рівняння* (1) *з неоднорідною частиною* (2) *що задовольняє умови* (3). *Цей розв'язок єдиний тоді й тільки тоді, коли*

$$1 \notin \sigma_p(U(t_k - t_{k-1})), \quad k \in 1, ..., n,$$

де $\sigma_p(\cdot)$ — точковий спектр оператора $(\cdot)$.

Д о в е д е н н я. *Достатність.* Нехай $1 \notin \sigma_p(U(t_k - t_{k-1}))$, $k \in 1, ..., n$. Методом від супротивного доведемо, що розв'язок задачі (1), (3) за умови (2) єдиний. Нехай задача має два різні розв'язки $(y(t), a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $(y^*(t), a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$, причому існує $k \in 1, ..., n$ таке, що $a_k \neq a_k^*$. Тому з (7) маємо наступне:

$$(U(t_k - t_{k-1}) - I) a_k = A(y_k - y_{k-1}) - (U(t_k - t_{k-1}) - I) Ay_{k-1}, \quad k \in 1, ..., n,$$

$$(U(t_k - t_{k-1}) - I) a_k^* = A(y_k - y_{k-1}) - (U(t_k - t_{k-1}) - I) Ay_{k-1}, \quad k \in 1, ..., n.$$

Віднявши ці рівності, отримаємо $(U(t_k - t_{k-1}) - I)(a_k - a_k^*) = 0$, $k \in 1, ..., n$, тобто $U(t_k - t_{k-1})(a_k - a_k^*) = a_k - a_k^*$, $k \in 1, ..., n$, а, отже, $a_k - a_k^*$ є власним вектором оператора $U(t_k - t_{k-1})$, $k \in 1, ..., n$, з власним значенням 1, а це суперечить умові. Припущення неправильне, тому $a_k = a_k^*$ при всіх $k \in 1, ..., n$. Функції

$y(t)$ і $y^*(t)$ на $[t_k, t_{k+1}]$, $k \in 1,...,n$, внаслідок єдиності розв'язку співпадають з класичним розв'язком.

Необхідність. Нехай існує єдиний розв'язок $(y(t), a_1, a_2, \ldots, a_n)$ задачі (1), (3) за умови (2). З рівності (7) отримаємо, що число 1 не належить до точкового спектра оператора $U(t_k - t_{k-1})$, $k \in 1,...,n$. Наслідок доведено. $\diamondsuit$

Наслідок 2. *Нехай A — генератор півгрупи $U(t)$ класу C_0 і задача* (1), (3) *за умови* (2) *має розв'язок $(y(t), a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де $y(t)$ є слабким розв'язком рівняння* (1) *з неоднорідною частиною* (2) *і задовольняє умови* (3). *Такий розв'язок єдиний тоді й тільки тоді, коли серед власних значень оператора A нема точок вигляду*

$$\mu_m = \frac{2\pi i m}{t_k - t_{k-1}}, \quad k \in 1,...,n, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Використавши теорему 2.4 [7, с. 46] про зв'язок точкового спектра півгрупи $U(t)$ та точкового спектра $\sigma_p(A)$ оператора A, маємо $e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(U(t)) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\}$. Далі застосовуючи наслідок 1 і роблячи відповідні обчислення спектра, отримаємо, що розв'язок задачі (1), (3) за умови (2) є єдиним тоді й тільки тоді, коли серед власних значень оператора A нема точок вигляду (8). $\diamondsuit$

1. *Искендеров А. Д.* Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений // Изв. АН АзССР. Серия физ.-тех. и мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 58–63.
2. *Искендеров А. Д., Тагиев Р. Г.* Обратная задача об определении правых частей эволюционных уравнений в банаховом пространстве // Научн. тр. Азерб. ун-та. – 1979. – № 1. – С. 51–56.
3. *Ейдельман Ю. С.* Двоточкова крайова задача для диференціального рівняння з параметром // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1983. – № 4. – С. 16–19.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1967. – 464 с.
5. *Эйдельман Ю. С.* Условия разрешимости обратных задач для эволюционных уравнений // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1990. – № 7. – С. 28–31.
6. *Lions J. L.* Equations differentialles operationnelles et problemes aux limites. – Springer, 1961. – 254 p.
7. *Pazy A.* Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations. – New–York: Springer–Verlag, 1983. – 280 p.
8. *Zaidman S.* Functional analysis and differential equations in abstract spaces. – London: D.C., 1981. – 226 p.

МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается неоднородное эволюционное уравнение $\dfrac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t)$, где линейный оператор A является генератором полугруппы класса C_0 в банаховом пространстве. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для существования и единственности решения n –точечной задачи.

SOME MANY–POINT PROBLEM FOR AN INHOMOGENEOUS EVOLUTIONARY EQUATION OF FIRST–ORDER IN BANACH SPACE

The inhomogeneous evolutionary equation $\dfrac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t)$, where the linear operator A is an infinitesimal generator of a C_0 semigroup in a Banach space, is considered. A necessary and sufficient condition for the existence and uniqueness of a solution for many–point problem is established.

Дрогоб. пед. ун-т ім. Івана Франка, Дрогобич,
Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
23.09.05