УДК 515.12

Н. М. Пирч

М–ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПАР І ВІДОБРАЖЕНЬ

Досліджуються зв'язки між поняттями М*–еквівалентності пар тихоновських просторів і* М*–еквівалентності відображень тихоновських просторів. Також наведено класифікацію пар–ретрактів.*

1. Вступ. Теорія М–еквівалентних просторів бере свій початок з праці М. І. Граєва [1], у якій він побудував перший приклад негомеоморфних просторів із топологічно ізоморфними вільними топологічними групами. На початку 90–х років ця теорія дістала новий цікавий напрям розвитку, і пов'язаний він із запропонованим О. Окунєвим поняттям М–еквівалентних відображень. У праці [8] встановлено топологічні властивості, які зберігаються і які не зберігаються відношенням М–еквівалентності відображень. У праці [10] було запропоновано методи побудови М–еквівалентних відображень, подано ряд властивостей відображень між топологічними просторами, що не зберігаються відношенням М–еквівалентності відображень, подано класифікацію відображень, що мають праві обернені. У праці [4] було введено і досліджено поняття М–еквівалентності пар топологічних просторів, що дало змогу відповісти на ряд питань про підгрупи вільних топологічних груп тихоновських просторів. Метою цієї роботи є дослідити зв'язки між М–еквівалентністю пар та М–еквівалентністю відображень.

Усі топологічні простори вважаються тихоновськими. Нехай X — топологічний простір.

Означення 1. Вільною топологічною групою простору X називається топологічна група $F(X)$ з такими властивостями:

1) X — підпростір в $F(X)$;

2) X породжує $F(X)$ алгебраїчно;

3) для кожного неперервного відображення $f : X \to G$ в топологічну групу G існує і є єдиним неперервний гомоморфізм $f* : F(X) \to G$, що продовжує f.

Нехай X — топологічний простір, Y — підпростір в X. Тоді через $G(Y,X)$ позначається підгрупа в $F(X)$, породжена множиною Y. При необхідності будемо скорочено писати $G(Y)$.

Означення 2 [8]. Неперервні відображення $f : X_1 \to Y_1$ і $g : X_2 \to Y_2$ називаються М–еквівалентними, якщо існують топологічні ізоморфізми $i : F(X_1) \to F(X_2)$ і $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$ такі, що $j \circ f^* = g^* \circ i$, де $f^* : F(X_1) \to F(Y_1)$, $g^* : F(X_2) \to F(Y_2)$ — гомоморфізми, що продовжують відображення f, g.

Якщо Y є підпростором топологічного простору X, то скажемо, що простори X та Y утворюють пару. Будемо позначати її через (X,Y).

Означення 3. Пара топологічних просторів (X, X_1) називається М–еквівалентною парі топологічних просторів (Y, Y_1), якщо існує топологічний ізоморфізм $f : F(X) \to F(Y)$ такий, що $f(G(X_1, X)) = G(Y_1, Y)$.

Аналогічно до вільної топологічної групи $F(X)$ для тихоновського простору X також розглядаються конструкції вільної абелевої топологічної групи $A(X)$ та вільного локально опуклого простору $L(X)$ [2]. Аналогічно до означень 2 і 3, використовуючи конструкції вільної абелевої топологічної групи та вільного локально-опуклого простору, отримаємо означення відповідно А–еквівалентних та L–еквівалентних відображень і пар. Надалі в тексті М–еквівалентні відображення будемо позначати через $f \overset{\mathrm{M}}{\sim} g$, А–еквівалентні відображення будемо позначати через $f\overset{\mathrm{A}}{\sim}g$, L–еквівалентні відображення будемо позначати через $f\overset{\mathrm{L}}{\sim}g$. Надалі в тексті M–еквівалентні пари топологічних просторів будемо позначати через $(X, X_1)\overset{\mathrm{M}}{\sim}(Y, Y_1)$, A–еквівалентні пари топологічних просторів будемо позначати через $(X, X_1)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(Y, Y_1)$, L–еквівалентні пари топологічних просторів будемо позначати через $(X, X_1)\overset{\mathrm{L}}{\sim}(Y, Y_1)$.

Пара топологічних просторів (X, X_1) називається топологічно еквівалентною парі топологічних просторів (Y, Y_1), якщо існує гомеоморфізм $f : X \to Y$ такий, що $f(X_1) = Y_1$.

У **п. 2** цієї роботи досліджуємо зв'язки між M–еквівалентністю пар і M–еквівалентністю відображень. У **п. 3**, що базується на результатах попереднього пункта та праці [10], подано класифікацію пар ретрактів.

2. M–еквівалентність пар і M–еквівалентність відображень.

Твердження 1. *Нехай A — підпростір топологічного простору X, B — підпростір топологічного простору Y. Якщо вкладення $t_A : A \to X$ і $t_B : B \to Y$ є M–еквівалентими, то $(X, A)\overset{\mathrm{M}}{\sim}(Y, B)$.*

Д о в е д е н н я. Нехай $i : F(A) \to F(B)$, $j : F(X) \to F(Y)$ — топологічні ізоморфізми такі, що $j \circ t_A^* = t_B^* \circ i$, де $t_A^* : F(A) \to F(X)$, $t_B^* : F(B) \to F(Y)$ — гомоморфізми, що продовжують відображення t_A і t_B. Нехай $x \in A$, тоді $(t_B^* \circ i)(t_A^{-1}(x)) \in G(B)$. Отже, $j(A) \subseteq G(B)$. Аналогічно перевіряється, що $j^{-1}(B) \subseteq G(A)$. Таким чином, $(X, A)\overset{\mathrm{M}}{\sim}(Y, B)$. $\diamondsuit$

Наступне твердження дає відповідь на питання, коли вірна імплікація, обернена до твердження 1. Підпростір A топологічного простору X називається P–вкладеним, якщо кожна неперервна псевдометрика, задана на A, може бути продовжена до неперервної псевдометрики на X.

Твердження 2. *Якщо $(X, A)\overset{\mathrm{M}}{\sim}(Y, B)$ і простори A і B є P–вкладеними у X та Y відповідно, то вкладення $t_A : A \to X$ і $t_B : B \to Y$ є M–еквівалентними відображеннями.*

Д о в е д е н н я. Нехай $j : F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $j(G(A, X)) = G(B, Y)$. Позначимо через i звуження ізоморфізму j на $G(A, X)$. У праці [11] доведено, що для довільного P–вкладеного підпростору A простору X група $G(A, X)$ ізоморфна $F(A)$, аналогічне твердження для вільних абелевих топологічних груп і вільних локально опуклих просторів було встановлене у [5]. Таким чином, можемо розглядати i як ізоморфізм між $F(A)$ та $F(B)$. Легко переконатись, що $j \circ t_A^* = t_B^* \circ i$, тобто відображення t_A і t_B є M–еквівалентні. $\diamondsuit$

Нехай A є підпростором топологічного простору X, B є підпростором топологічного простору Y, $t_A : A \to X$ і $t_B : B \to Y$ — відповідні вкладення. Після останніх двох тверджень виникає природне питання: чи еквівалентними є умови M–еквівалентності пар (X, A) і (Y, B) та M–еквівалентності відображень t_A і t_B? Наступний приклад дає негативну відповідь.

Приклад 1. У праці [4] встановлено, що існують пари топологічних просторів (X, A) і (Y, B) такі, що $(X, A)\overset{\mathrm{M}}{\sim}(Y, B)$, підпростір A є P–вкладеним у простір X, підпростір B не є P–вкладеним у простір Y. Тоді топологічна група $F(A)$ топологічно ізоморфна підгрупі $G(A, X)$, отже, t_A^* є гомоморфним вкладенням, тоді як t_B^* не є гомоморфним вкладенням [11].

Отже, встановлено зв'язки між M–еквівалентністю пар і M–еквівалентністю відображень–вкладень. Постає питання: чи має M–еквівалентність пар опис на мові M–еквівалентності сюр'єктивних відображень? Для відповіді на це запитання використаємо теорему 1, яка є незначною модифікацією теореми 3.10 з [3].

Група цілих чисел з дискретною топологією є топологічною групою. Будемо позначати її через Z. Скажемо, що ізоморфізм $i : F(X) \to F(Y)$ є спеціальним, якщо композиція $e_Y^* \circ i$ є постійним відображенням, де $e_Y^* : F(Y) \to Z$ є гомоморфізмом, що продовжує функцію $e_Y : Y \to Z$, яка тотожно дорівнює 1 на просторі Y.

Теорема 1. *Якщо* $(X, A)\overset{\mathrm{M}}{\sim}(Y, B)$, *то існує спеціальний топологічний ізоморфізм* $i : F(X) \to F(Y)$ *такий, що* $i(G(A)) = G(B)$.

Нехай $A \subseteq X$, $\varphi : F(X) \to Z$ — неперервний гомоморфізм такий, що $\varphi(G(A)) = Z$. Позначимо через $\mathrm{ord}_A\varphi = \{\min |k| : k \in \varphi(A)\backslash\{0\}\}$.

Лема 1. *Якщо* $\mathrm{ord}_A\varphi > 1$, *то існує топологічний ізоморфізм* $j : F(X) \to F(X)$ *такий, що* $j(G(A)) = G(A)$ *і* $\mathrm{ord}_A(\varphi \circ j) < \mathrm{ord}_A\varphi$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\mathrm{ord}_A\varphi = q > 1$. Тоді існує елемент a_0 в A, такий, що $\varphi(a_0) = s$, $|s| = q$. З того, що $j(G(A)) = G(A)$, випливає, що $\varphi(A)$ породжує Z, отже, існує $p \in \varphi(A)$, що не ділиться на q. Поділимо p на q з остачею: $p = ms + r$, де $0 < r < q = |s|$.

Нехай $X_k = X \cap \varphi^{-1}(k)$ для кожного $k \in Z$. Тоді X_k — відкрито–замкнений підпростір в X. Означимо відображення $j_0 : X \to F(X)$ так: $j_0(x) = x$, якщо $x \notin X_p$, і $j_0(x) = a_0^{-m}x$, якщо $x \in X_p$, де $X_p = X \cap \varphi^{-1}(p)$. Нехай $j : F(X) \to F(X)$ — гомоморфізм, який продовжує відображення $j_0(x)$. Відображення $j_0(x)$ є неперервне на кожному X_k, тому з того, що множини X_k є відкрито–замкнені в X для всіх цілих k, випливає, що відображення $j_0(x)$ є неперервним на X. Означимо відображення $h_0 : X \to F(X)$ за формулою $h_0(x) = x$, якщо $x \notin X_p$, і $h_0(x) = a_0^m x$, якщо $x \in X_p$. Нехай $h : F(X) \to F(X)$ — гомоморфізм, який продовжує відображення $h_0(x)$. Перевіримо, що h — неперервний гомоморфізм, обернений до j. Якщо $x \notin X_p$, то $l_0(x) = h_0(x) = x$, тому $l \circ h(x) = l \circ h_0(x) = l(x) = l_0(x) = x$. Якщо ж $x \in X_p$, то $l \circ h(x) = l \circ h_0(x) = l(a_0^m x) = (l_0(a_0))^m l_0(x) = a_0^m a_0^{-m} x = x$. Аналогічно доводиться, що $h \circ l(x) = x$ для всіх $x \in X$. Отже, j — топологічний ізоморфізм. Нехай $a_1 \in X_p \cap A$. Тоді $\varphi \circ j(x_1) = \varphi(a_0^{-m}x_1) = -m\varphi(a_0) + \varphi(x_1) = -ms + p = r < q$. Очевидно, що $j(G(A)) = G(A)$. $\diamondsuit$

Знижуючи порядок гомоморфізму φ за допомогою леми 1, за скінченну кількість кроків отримаємо наступну лему.

Лема 2. *Існує топологічний ізоморфізм* $j : F(X) \to F(X)$ *такий, що* $j(G(A)) = G(A)$ *і* $\mathrm{ord}_A(\varphi \circ j) = 1$.

Отже, існує топологічний ізоморфізм $j : F(X) \to F(X)$ такий, що для деякого елемента a_0 з A має місце рівність $\varphi \circ j(a_0) = 1$ або $\varphi \circ j(a_0) = -1$ і $j(G(A)) = G(A)$. У випадку, коли має місце рівність $\varphi\circ j(a_0) = -1$, розглянемо ізоморфізм α, заданий для елементів простору X за правилом: $\alpha(x) = x$, якщо $\varphi \circ j(x) \neq -1$, і $\alpha(x) = x^{-1}$, якщо $\varphi \circ j(x) = -1$. Очевидно, α — топологічний ізоморфізм такий, що $\alpha \circ \alpha$ є тотожним ізоморфізмом групи $F(X)$, причому $(\varphi \circ \alpha \circ j)(a_0) = 1$ і $(\varphi \circ \alpha \circ j)(G(A)) = G(A)$. Таким чином, доведено таке твердження.

Лема 3. *Для кожного неперервного гомоморфізму* $\varphi : F(X) \to Z$ *такого, що* $\varphi(G(A)) = Z$, *існують топологічний ізоморфізм* $j : F(X) \to F(X)$ *і* $a_0 \in A$ *такі, що* $j(G(A)) = G(A)$ *і* $(\varphi \circ j)(a_0) = 1$.

Лема 4. *Для кожного неперервного гомоморфізму* $\varphi : F(X) \to Z$ *такого, що* $\varphi(G(A)) = G(A)$, *існує топологічний ізоморфізм* $u : F(X) \to F(X)$ *такий, що* $u(G(A)) = G(A)$ *і* $(\varphi \circ u)(X) = 1$.

Д о в е д е н н я. Виберемо ізоморфізм $j : F(X) \to F(X)$ і елемент $a_0 \in A$ за лемою 3. Позначимо $F_k = X \cap (\varphi\circ j)^{-1}(k)$ для кожного $k \in Z$. Тоді множини

F_k, $k \in Z$, є відкрито–замкнені в X, причому $a_0 \in F_1$. Означимо відображення $l_0 : X \to F(X)$ за правилом $l_0(x) = a_0^{-k+1}x$, якщо $x \in F_k$, $k \in Z$, і нехай $l : F(X) \to F(X)$ — гомоморфізм, що продовжує відображення l_0. Очевидно, відображення l_0 неперервне, а, отже, неперервним є гомоморфізм l. Відображення $l_0^* : X \to F(X)$, означене за формулою $l_0^*(x) = a_0^{k-1}x$, якщо $x \in F_k$, $k \in Z$, є неперервним, а, отже, неперервним є гомоморфізм $l^* : F(X) \to F(X)$, що його продовжує. Нехай $x \in F_k$, $k \in Z$, тоді $l \circ l^*(x) = = l(a_0^{k-1}x) = (l_0(a_0))^{k-1}l_0(x) = a_0^{k-1}a_0^{1-k}x = x$. Аналогічно перевіряється, що $l^* \circ l(x) = x$ для всіх $x \in X$. Отже, l^* — гомоморфізм, обернений до l, тому l є топологічним автоморфізмом групи $F(X)$.

Нехай $u = j \circ l$, тоді $u : F(X) \to F(X)$ — топологічний ізоморфізм. Доведемо, що u — автоморфізм групи $F(X)$, який задовольняє умови леми 4. Нехай $x \in X$, тоді $x \in F_k$ при деякому $k \in Z$. Тоді $\varphi(u(x)) = \varphi(j(l(x))) = = \varphi(j(a_0^{-k+1}x)) = \varphi(j(a_0))(-k+1) + \varphi(j(x)) = -k+1+k = 1$. Оскільки $j(G(A)) = G(A)$ і $l(G(A)) = G(A)$, то $u(G(A)) = G(A)$. $\diamondsuit$

Д о в е д е н н я теореми 1. Нехай $i : F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $i(G(A)) = G(B)$. Нехай $e_y^* : F(X) \to Z$ — гомоморфізм, що продовжує функцію e_Y, яка тотожно дорівнює 1 на просторі Y. Очевидно, $e_Y^* \circ i(G(A)) = e_Y^*(G(B)) = Z$. Застосовуючи лему 4 до гомоморфізму $\varphi = = e_Y^* \circ i$, отримаємо спеціальний ізоморфізм $i^* = i \circ u : F(X) \to F(Y)$ такий, що $i^*(G(A)) = G(B)$. $\diamondsuit$

Нехай $f : X \to Y$ — сюр'єктивне відображення. Найсильніша зі всіх тихоновських топологій на Y, щодо яких відображення f є неперервним, називається R–факторною топологією на множині Y (породженою відображенням f). Сюр'єктивне відображення $f : X \to Y$ називається R–факторним, якщо топологія простору Y збігається з R–факторною топологією, породженою f.

Твердження 3. *Нехай X, Y — тихоновські простори, $A \subseteq X, B \subseteq Y$ — їхні замкнені підмножини, $q_A : X \to X/A$, $q_B : X \to X/B$ — R–факторні відображення. Якщо пари (X, A) і (Y, B) є M–еквівалентні, то відображення q_A і q_B є M–еквівалентні.*

Д о в е д е н н я твердження 3 випливає з теореми 1 та теореми 3.9 з [3].

Твердження, аналогічне до твердження 3, вірне також для A–еквівалентних та L–еквівалентних пар і відображень.

Нехай $q : G \to H$ — гомоморфізм двох топологічних груп, e_H — одиничний елемент групи H. Тоді множина $q^{-1}(e_H)$ називається ядром гомоморфізму q і позначається через $\ker(q)$.

Твердження 4. *Нехай X, Y — тихоновські простори, $A \subseteq X, B \subseteq Y$ — їхні замкнені підмножини, $q_A : X \to X/A$, $q_B : X \to X/B$ — R–факторні відображення. Якщо відображення q_A і q_B є A–еквівалентні, то пари (X, A) і (Y, B) є A–еквівалентні.*

Д о в е д е н н я. За твердженням 3.9 праці [10] існують спеціальні топологічні ізоморфізми $i : A(X) \to A(Y)$ і $i : A(X/A) \to A(Y/B)$ такі, що $j \circ q_A^* = q_B^* \circ i$, де $q_A^* : A(X) \to A(X/A)$ і $q_B^* : A(Y) \to A(Y/B)$ гомоморфізми, що продовжують відображення q_A і q_B. Нехай $a \in A$ і $i(a) = W$. Розглянемо відображення $h : Y \to A(Y)$, означене за формулою $h(y) = y - W + b$, де $b \in B$. Продовжимо відображення h до неперервного гомоморфізму $h^* : A(Y) \to \to A(Y)$. Як встановлено у праці [10], гомоморфізм h^* є топологічним ізоморфізмом таким, що $h^*(W) = b$. Розглянемо тепер ізоморфізм $g : A(X) \to A(Y)$, заданий як $g = h^* \circ i$. Покажемо, що $g(A) \subseteq G(B)$. Нехай $a_1 \in A$. Тоді $g(a_1) = g(a_1 - a) + g(a) = g(a_1 - a) + b$. Отже, нам достатньо показати, що $g(a_1 - a) \in G(B)$. Оскільки $(a_1 - a) \in \ker(q_A^*)$, то $i(a_1) - i(a) \in \ker(q_B^*)$.

Отже, $i(a_1)-i(a)=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+...+\lambda_n b_n$, де $b_i\in B$ і $\sum\lambda_i=0$. Таким чином, $g(a_1-a)=h^*\circ i(a_1-a)=h^*(i(a_1)-i(a))=h^*(\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+...+\lambda_n b_n)=$ $=\sum\lambda_i h(b_i)=\sum\lambda_i(b_i-W+b)=\sum\lambda_i b_i+\left(\sum\lambda_i\right)(W-b)=\sum\lambda_i b_i\in G(B)$.

Аналогічно перевіряється, що $g^{-1}(B)\subseteq G(A)$, тобто $(X,A)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(Y,B)$. $\diamondsuit$

Наслідок 1. *Нехай $A\subseteq X, B\subseteq Y$, тоді відображення q_A і q_B є* A*–еквівалентні тоді й тільки тоді, коли пари (X,A) і (Y,B) є* A*–еквівалентні.*

Твердження, аналогічне до наслідку 1, виконується і для відношення L–еквівалентності.

Постає природне питання: нехай $(X_1,Y_1)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(X_2,Y_2)$ і $(Y_1,Z_1)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(Y_2,Z_2)$, чи вірно тоді, що $(X_1,Z_1)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(X_2,Z_2)$? Наступний приклад дає негативну відповідь на нього.

Приклад 2. Нехай $X_1=X_2=[0,1]\cup\{2\}$ – підпростори дійсної прямої з топологією, породженою евклідовою метрикою, $Y_1=Y_2=\{0\}\cup\{1\}\cup\{2\}$, $Z_1=\{0\}\cup\{1\}$, $Z_2=\{0\}\cup\{2\}$. Тоді пари (X_1,Y_1) і (X_2,Y_2) є топологічно еквівалентними, і пари (Y_1,Z_1) і (Y_2,Z_2) є топологічно еквівалентними. Але (X_1,Z_1) і (X_2,Z_2) не є A–еквівалентними, оскільки факторпростори (X_1/Z_1) і (X_2/Z_2) не є A–еквівалентними, оскільки перший з них є незв'язним, а другий — зв'язним. Позначимо через $f_i:Z_i\to Y_i$, $g_i:Y_i\to X_i$ вкладення топологічних просторів. Тоді композиції $g_i\circ f_i$ — це вкладення топологічних просторів $Z_i\to X_i$. За твердженням 2 $f_1\overset{\mathrm{A}}{\sim}f_2$ і $g_1\overset{\mathrm{A}}{\sim}g_2$. За твердженням 1 відображення $g_1\circ f_1$ і $g_2\circ f_2$ не є A–еквівалентні. Отже, отримали приклад двох пар A–еквівалентних відображень, композиції яких не є A–еквівалентними.

3. A –еквівалентність пар ретрактів.

Теорема 2. *Нехай X_1,X_2 — тихоновські простори, $r_1:X_1\to K_1, r_2:X_2\to K_2$ — їхні ретракції. Тоді наступні умови еквівалентні :*

(I) *ретракції r_1 і r_2 є* A*–еквівалентними відображеннями;*

(II) R*–факторні відображення $r_1:X_1\to X_1/K_1$ і $r_2:X_2\to X_2/K_2$ є* A*–еквівалентними відображеннями;*

(III) *вкладення $t_i:K_i\to X_i$ є* A*–еквівалентними відображеннями;*

(IV) *пари (X_1,K_1) і (X_2,K_2) є* A*–еквівалентними;*

(V) *простір K_1 є* A*–еквівалентний простору K_2, а* R*–факторпростір X_1/K_1 є* A*–еквівалентний* R*–факторпростору X_2/K_2.*

Д о в е д е н н я. Еквівалентність тверджень (I), (II) і (V) встановлена у праці [10]. Еквівалентність тверджень (III) і (IV) випливає з тверджень 1 і 2. Еквівалентність тверджень (II) і (IV) випливає з наслідку 1. $\diamondsuit$

Ретракції r_1 і r_2 топологічного простору X називаються ортогональними, якщо $r_1\circ r_2$ і $r_2\circ r_1$ є постійними відображеннями [9].

Наслідок 2. *Нехай $r_i:X\to K_i$ при $i=1,2,$ — ортогональні ретракції топологічного простору X. Тоді пари (X,K_1) і (X,K_2) є* A*–еквівалентними тоді й тільки тоді, коли топологічні простори K_1 і K_2 є* A*–еквівалентні.*

Д о в е д е н н я. З твердження 3.2 [9] випливає, що $(X_1/K_1)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(X_2/K_2)$, як тільки $K_1\overset{\mathrm{A}}{\sim}K_2$. Отже, з теореми 2 випливає доведення наслідку. $\diamondsuit$

З теореми 2 і з твердження 6.6 праці [10] випливає наступне твердження.

Твердження 5. *Нехай простір Y_i є ретрактом топологічного простору X_i, а простір Z_i є ретрактом топологічного простору Y_i при $i=1,2$, причому $(X_1,Y_1)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(X_2,Y_2)$ і $(Y_1,Z_1)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(Y_2,Z_2)$. Тоді $(X_1,Z_1)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(X_2,Z_2)$.*

Кожен зліченний компактний простір можемо подати як простір ординалів з порядковою топологією [1, прикл. 1.3.27]. Нехай α — зліченний ординал, W — множина всіх ординалів, менших або рівних α. На W існує природне відношення порядку. Розглянемо топологію на W, породжену базою B, що складається зі всіх інтервалів $(y,x]=\{z\in W: y<z\le x\}$, $y<x\le\alpha$, і

одноточкової множини $\{0\}$, де 0 — порядковий тип порожньої множини. Тоді W з топологією, породженою В, є компактним гаусдорфовим простором.

Для ординала α через $\alpha+1$ позначається наступник ординала α [7, с. 24].

Теорема 3. *Нехай X, Y — зліченні компактні простори, A, B — їхні замкнені підпростори. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(I) $(X,A)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(Y,B)$;

(II) *Існують зліченні ординали $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ такі, що простір A гомеоморфний до простору ординалів α_1+1 з порядковою топологією, простір X/A гомеоморфний до простору ординалів α_2+1, простір B гомеоморфний до простору ординалів β_1+1, простір X/B є гомеоморфним до простору ординалів β_2+1, і виконуються нерівності $\max(\alpha_i,\beta_i) < \min(\alpha_i,\beta_i)^\omega$ при $i=1,2$.*

Д о в е д е н н я. Оскільки замкнений підпростір нульвимірного метризованого простору є його ретрактом [6], то з теореми 2 маємо, що $(X,A)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(Y,B)$ тоді й тільки тоді, коли $(X/A)\overset{\mathrm{A}}{\sim}(Y/B)$ і $A\overset{\mathrm{A}}{\sim}B$. Як показав М. І. Граєв у праці [1], два зліченні компактні простори X та Y є А–еквівалентними тоді й тільки тоді, коли існують зліченні ординали α і β такі, що простір X гомеоморфний до простору ординалів $\alpha+1$ з порядковою топологією, простір Y гомеоморфний до простору ординалів $\beta+1$ з порядковою топологією, і виконується нерівність $\max(\alpha,\beta) < \min(\alpha,\beta)^\omega$. Для доведення теореми залишається зауважити, що простори $X/A, Y/B, A, B$ є зліченні компактні. $\diamondsuit$

1. *Граев М. И.* Свободные топологические группы //Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1948. – **12**, № 3. – С. 279–324.
2. *Марков А. А.* О свободных топологических группах //Докл. АН СССР. – 1941. – **31**. – С. 299–302.
3. *Окунев О. Г.* М–эквивалентность произведений //Тр. Моск. Мат. Общ. – 1995. – **56**. – С. 192–205.
4. *Пирч Н. М.* М–еквівалентність пар // Прикл. проблеми математики і механіки. – 2004. – Вип. **2**. – С. 74–79.
5. *Ткаченко М. Г.* О полноте свободных абелевых топологических групп //Докл. АН СССР . – 1983. – **269**, № 2 . – С. 299–303.
6. *Ткаченко М. Г.* О спектральном разложении свободных групп //Успехи математических наук. – 1984. – **39**, № 2. – С. 191–192.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 751 с.
8. *Okunev O. G.* A method for consructing examples of M–equivalent spaces //Topology Appl. – 1990. – **36**. – P. 157–171; Correction: Topology Appl. – 1993. – **49**. – P. 191–192.
9. *Pyrch N. M.* Orthogonal retractions and the relation of M–equivalence //Мат. студії. – 2003. – **20**. – P. 151–161.
10. *Pyrch N. M.* On M–equivalence of mappings //Мат. студії. – 2005. – **24**. – P. 21–30.
11. *Sipacheva O. V.* Free topological groups of spaces and their subspaces //Topology Appl. – 2000. – **101**. – P. 181–212.

М–ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПАР И ОТОБРАЖЕНИЙ

Исследуется связь между М*–эквивалентностью отображений и* М*–эквивалентностью пар тихоновских пространств. Приводится классификация пар–ретрактов.*

M–EQUIVALENCE OF PAIRS AND MAPPINGS

In the paper we investigate relation between the M*–equivalence of mappings and* M*–equivalence of pairs of Tychonov spaces. We also give the classification of the retract pairs.*

Одержано 26.08.05

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів