УДК 512.588

І. І. Ліщинський

ПРО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ МАЙЖЕ–КІЛЕЦЬ

Досліджується вплив scp^+ *–диференціювань і узагальнених диференціювань Дейфа на комутативність майже–кільця.*

0. Всюди нижче N — ліве майже–кільце, тобто на N визначено дві алгебраїчні операції: додавання „ $+$” та множення „ $\cdot$”, стосовно яких $(N,+)$ — (не обов'язково абелева) група з нейтральним елементом 0, $(N,\cdot)$ — напівгрупа, та має місце співвідношення $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (закон лівої дистрибутивності) для будь–яких $x,y,z\in N$ (як звичайно, „ $\cdot$” в записах далі опускається). Майже–кільце N називається 0–симетричним, якщо $0x=0=x0$ для $x\in N$. Якщо група $(N,+)$ абелева, то прийнято говорити, що майже–кільце N абелеве; якщо ж напівгрупа $(N,\cdot)$ абелева, прийнято говорити, що майже–кільце N комутативне. Для $x,y\in N$ елемент $[x,y]=xy-yx$ — їх комутатор, а $(x,y)=$ $=xy+yx$ — їх антикомутатор. Відображення $D:N\to N$ таке, що $D(xy)=$ $=xD(y)+D(x)y$ для всіх $x,y\in N$, називається мультиплікативним диференціюванням. Якщо, крім того, $D(x+y)=D(x)+D(y)$, то D називається диференціюванням. Наведемо деякі приклади.

1) Нехай $R=\{0,1\}$ — ліве майже–кільце з наведеними нижче таблицями додавання „ $+$” і множення „ $\cdot$” :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	0	1

Зрозуміло, що R абелеве, але не є 0-симетричним і не є комутативним. Зі співвідношення $D(0)=D(0+0)=D(0)+D(0)$ випливає, що $D(0)=0$. З іншого боку, $D(1)=D(0\cdot 1)=0\cdot D(1)+D(0)\cdot 1=0\cdot D(1)+1$. Якщо $D(1)=1$, то $1=D(1)=0\cdot 1+1=0$, а це неможливо. Якщо ж $D(1)=0$, то $0=D(1)=0\cdot 0+1=1$, що також неможливо. Це показує, що R не має жодного диференціювання. Мультиплікативних диференціювань це кільце також не має.

Покажемо, що нульове відображення $\Theta:N\to N$, де $\Theta(n)=0$ для всіх n із N, є диференціюванням лівого майже–кільця N тоді й тільки тоді, коли N є 0–симетричним.

Нехай x,y — довільні елементи із N. Тоді $0=\Theta(xy)=x\Theta(y)+\Theta(x)y=$ $=x\cdot 0+0\cdot y=0\cdot y$ в тому й тільки в тому випадку, коли $\Theta:N\to N$ є диференціюванням.

2) Нехай $R=\{0,1,2,3\}$ — ліве майже–кільце, додавання „ $+$” і множення „ $\cdot$” в якому визначаються наведеними таблицями Келі

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	1	2	3

Зрозуміло, що R є 0–симетричним і абелевим, але не комутативним. Нехай $D:R\to R$ — яке–небудь диференціювання R. Тоді $D(0)=D(0+0)=$

$= D(0) + D(0)$, а тому $D(0) = 0$. Знайдемо образ $D(1)$ елемента $1 \in R$. Оскільки $1 = 1^2$, то $D(1) = 1 \cdot D(1) + D(1) \cdot 1 = D(1) + D(1) \cdot 1$, звідки $D(1) \cdot 1 = 0$, тобто $D(1) = 0$. Таким чином, R має тільки єдине нульове диференціювання.

Диференціюванням майже-кілець присвячено небагато робіт. Один із напрямів таких досліджень — це знаходження властивостей диференціювань, які імплікують комутативність майже–кільця. Так, Белл і Мейсон [1] довели, що ліве майже-кільце N без дільників нуля з комутуючим диференціюванням D (тобто $xD(x) = D(x)x$ для всіх $x \in N$) обов'язково абелеве. Пізніше ці автори досліджували вплив наявності scp-диференціювання D в майже-кільці N (тобто $[x, y] = [D(x), D(y)]$ для довільних $x, y \in N$) на комутативність N. Праці [4] і [5] присвячено scp-диференціюванням в асоціативних кільцях.

З іншого боку, в праці [3] досліджувалися диференціювання Дейфа різних типів. Нагадаємо, D називається диференціюванням Дейфа типу 1, якщо $D([x, y]) = [x, y]$, і диференціюванням Дейфа типу 2, якщо $D([x, y]) = -xy+$ $+yx$, де x, y — довільні елементи майже–кільця N. Дейф і Белл [3] встановили, що із наявності в напівпервинному кільці R диференціювання Дейфа D типу 1 або типу 2 випливає, що R комутативне. Гонган [6] дещо узагальнив попередній результат, розглядаючи напівпервинні кільця R з диференціюванням D, для яких $D([x, y]) - [x, y] \in Z$ або $D([x, y]) + [x, y] \in Z$ для будь–яких елементів x, y деякого ненульового ідеалу I із R. Белл і Мейсон [2] показали, що первинне майже–кільце N, яке має диференціювання Дейфа типу 1, комутативне. Аналогічний результат для диференціювань Дейфа типу 2 встановлено в [5].

Зазначимо також, що в нашій роботі $Z = Z(N) = \{z \in N | zn = nz$ для всіх $n \in N\}$ — мультиплікативний центр майже–кільця N. Крім того, $c \in N$ називається D–константою, якщо $D(c) = 0$ для диференціювання D лівого майже–кільця N.

Усі інші означення і факти загальноприняті і їх можна знайти в [7].

1. Узагальнені scp–диференціювання. У цій частині досліджуємо зв'язок scp$^+$–диференціювань з комутативністю майже–кільця. Будемо говорити, що диференціювання $D : N \to N$ називається scp$^+$–диференціюванням майже–кільця N, якщо $(x, y) = (D(x), D(y))$ для довільних елементів $x, y \in N$.

Лема 1. *Якщо D — scp$^+$–диференціювання 0–симетричного лівого майже–кільця N, то D–константи антикомутують з довільним елементом майже–кільця N. Якщо, крім того, N містить одиницю 1, то $(N, +)$ — абелева група.*

Д о в е д е н н я. Нехай c — D–константа. Тоді $(c, x) = (D(c), D(x)) =$ $= (0, D(x)) = 0$ для всіх $x \in N$. Якщо N містить одиницю 1, то $0 = (1, x+$ $+y) = x+y+x+y$. До обох сторін останньої рівності додаємо зліва $-y-x$ і, використовуючи $0 = (1, x) = x+x$, $0 = (1, y) = y+y$, отримуємо $x+y = y+x$. $\diamondsuit$

Теорема. *Нехай A — ненульовий ідеал 0–симетричного лівого майже–кільця N, який не містить дільників нуля із N. Якщо N має таке ненульове диференціювання D, що $xD(x) = D(x)x$ і $(x, y) = (D(x), D(y))$ для всіх $x, y \in A$, то N — антикомутативне кільце.*

Д о в е д е н н я. Нехай D — ненульове диференціювання майже–кільця N таке, що $uD(u) = D(u)u$ для довільного $u \in A$. Тоді, диференціюючи рівність $u(u + x) = u^2 + ux$, де $u \in A$ і $x \in N$, отримуємо $uD(u + x) + D(u)(u + x) =$ $= uD(u)+D(u)u+uD(x)+D(u)x$, що після спрощення матиме вигляд $uD(x)+$ $+D(u)u = D(u)u + uD(x)$. Додаючи до останньої рівності справа вираз

$-uD(x) - uD(u)$, одержуємо $u(D(x) + D(u) - D(x) - D(u)) = 0 = uD(x+ +u-x-u)$. Оскільки A не містить дільників нуля із N, то $D(x+u-x-u)= = 0$ для всіх $u \in A$ і $x \in N$.

Оскільки A — ідеал майже–кільця N, то $D(yx + yu - yx - yu) = 0$ для будь–яких елементів і $x, y \in N$, тобто $0 = D(yx + yu - yx - yu) = D(y(x + u- -x - u)) = yD(x + u - x - u) + D(y)(x + u - x - u)$.

Оскільки $D(x+u-x-u) = 0$, то з останньої рівності одержуємо $D(N)(x+ +u - x - u) = \{0\}$. Припустимо, що $u, x \in A$. За умовою, D — ненульове диференціювання майже–кільця N, а тому $x + u - x - u = 0$ для всіх $u, x \in A$, тобто $(A, +)$ — абелева група. Якщо тепер $w \in A \setminus \{0\}$ і $x, y \in N$, маємо $0 = wx+wy-wx-wy = w(x+y-x-y)$, звідки випливає, що $x+y-x-y = 0$, а отже, $(N, +)$ — абелева група.

Нехай надалі D — таке диференціювання майже–кільця N, що $xD(x) = = D(x)x$ і $(x, y) = (D(x), D(y))$ для всіх $x, y \in A$. Використовуючи рівність, $(xD(y)+D(x)y)z = xD(y)z+D(x)yz$, де $x, y, z \in A$ (див. лему 1 [1]), отримуємо

$$(x, xy) = (D(x), D(xy)) = (D(x), xD(y) + D(x)y) = x(D(x)D(y) + D(y)D(x))+$$

$$+D(x)(D(x)y + yD(x)) = x(D(x), D(y)) + D(x)(D(x), y).$$

Проте, з іншого боку, $(x, xy) = x(x, y) = x(D(x), D(y))$.

Отже, $D(x)(D(x), y) = 0$. Оскільки A не містить дільників нуля із майже–кільця N, то $(D(x), y) = 0$. Підставляючи $xD(y)$ замість елемента y в рівність $(D(x), y) = 0$, отримаємо $0 = (D(x), xD(y)) = x(D(x), D(y)) = = x(x, y)$ для довільних елементів $x, y \in N$ $x, y \in A$. Це показує, що A задовольняє антикомутативний закон для множення. Якщо тепер $a \in A \setminus \{0\}$, $x, y \in N$, то $0 = (a, ax) = a(a, x)$, а звідси $0 = (ax, ay) = -a^2(x, y)$, тобто N — антикомутативне кільце. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Наслідок. *Нехай N — 0–симетричне ліве майже–кільце. Якщо N має ненульове комутуюче* scp^+ *–диференціювання, то N — антикомутативне кільце.*

Д о в е д е н н я випливає з доведеної вище теореми, якщо замість A покладемо N. $\diamondsuit$

Наведемо ще низку властивостей майже–кільця, яке має ненульове scp^+ –диференціювання.

Лема 2. *Якщо 0–симетричне ліве майже–кільце N містить одиницю 1 і* scp^+ *–диференціювання D, то $(zx + z)y = zxy - zy$ для всіх $x, y, z \in N$.*

Д о в е д е н н я. Оскільки $D(1) = 0$, то $(x + 1, y) = (D(x + 1), D(y)) = = (D(x), D(y)) = (x, y)$. Звідси отримуємо рівність $(x + 1)y = xy - y$ для всіх $x, y \in N$. Домноживши останню рівність на z зліва, отримуємо бажаний результат. $\diamondsuit$

Лема 3. *Нехай N — ненульове 0–симетричне ліве майже–кільце таке, що $aN = N$ для всіх $a \in N \setminus \{0\}$. Якщо N має* scp^+ *–диференціювання, то $x = -x$ для кожного елемента $x \in N$.*

Д о в е д е н н я. Із рівності $aN = N$, де $a \in N \setminus \{0\}$, випливає, що N не має дільників нуля. Крім того, якщо $y \in N \setminus \{0\}$, то існує $e \in N$ таке, що $ye = y$, $ye^2 = ye$ і $y(e^2 - e) = 0$. Отже, e — ненульовий ідемпотент. Із рівності $e(ex - x) = 0$ для всіх $x \in N$ випливає й те, що e є лівою одиницею майже–кільця N. Тоді для довільного диференціювання D майже–кільця N маємо $D(e) = D(e^2) = eD(e) + D(e)e = D(e) + D(e)e$. Таким чином, $D(e)e = 0$, $e \neq 0$, а тому $D(e) = 0$.

Нехай тепер D — scp^+ –диференціювання майже–кільця N. Тоді $xe = -ex = -x$ для довільного $x \in N$ за лемою 1. З другого боку, $xe = xe^2 = -xe = -(-x) = x$ для всіх $x \in N$, що й треба було довести. $\diamondsuit$

2. Узагальнені диференціювання Дейфа. Розглянемо наступні узагальнення диференціювань Дейфа. Нехай N — ліве майже–кільце, $i \in \mathbb{N}$. Будемо говорити, що диференціювання $D : N \to N$ називається

- диференціюванням Дейфа типу i, якщо $D^i([x, y]) = [x, y]$;
- диференціюванням Дейфа типу $-i$, якщо $D^i([x, y]) = -[x, y]$;
- диференціюванням Дейфа типу $+i$, якщо $D^i((x, y)) = (x, y)$.

Отримано такі результати.

Твердження 1. *Нехай N — ліве майже–кільце, $i \in \mathbb{N}$. Якщо $D^n(x) = 0$ для всіх $x \in N$, де $n \in \mathbb{N}$ і D — диференціювання Дейфа типу i (відповідно диференціювання Дейфа типу $-i$), то N — комутативне кільце.*

Д о в е д е н н я. Нехай $n \leq i$. Рівність $D^n([x, y]) = 0$, де $x, y \in N$, диференціюємо $i - n$ разів. Отримуємо, що $[x, y] = D^i([x, y]) = D^{i-n}(0) = 0$ (відповідно $D^i([x, y]) = -[x, y] = D^{i-n}(0) = 0$) для всіх $x, y \in N$, тобто N — комутативне кільце.

Нехай тепер $n > i$. Тоді $D^n([x, y]) = D^{n-i}(D^i([x, y])) = D^{n-i}([x, y]) = 0$ для всіх $x \in N$. Таким самим чином продовжуємо до тих пір, доки не отримаємо степінь, який менший або дорівнює i, а для цього випадку доведення вже отримано.

Твердження 2. *Нехай N — ліве майже–кільце. Якщо $D^n(x) = 0$ для всіх $x \in N$, де $n \in \mathbb{N}$ і D — диференціювання Дейфа типу $+i$, то N — антикомутативне кільце.*

Д о в е д е н н я аналогічне до доведення твердження 1.

1. *Bell H. E., Mason G.* On derivation in near–rings// Near–rings and near–fields, G.Betch (ed.). – Amsterdam: North–Holland, – 1987. – P. 31–35.
2. *Bell H. E., Mason G.* On derivation in near–rings and rings// Math. J. Okayama Univ. – 1992. – No 34. – P. 135–144.
3. *Daif M. N., Bell H. E.* Remarks on derivations on semiprime rings// Inter. J. Math. Math. Sci. – 1992. – **15**, No 1. – P. 205–206.
4. *Deng Q., Ashraf M.* On strong commutativity preserving mappings// Results in Math. – 1996. – No 30. – P. 259–263.
5. *Deng Q., Serifyenigül M., Argaç N.* On commutativity of near-rings with derivations// Math. Proc. Royal Irish Acad. – 1998. – **98A**, No 2. – P. 217–222.
6. *Hongan M.* A note on semiprime rings with derivation// Int. J. Math. Math. Sci. – 1997. – **20**, No 2. – P. 413–415.
7. *Pilz G.* Near–Rings (2nd Edition). – North–Holland, Amsterdam. – 1983.

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ ПОЧТИ–КОЛЕЦ

Исследовано влияние scp^+ –дифференцирований и обобщенных дифференцирований Дейфа на коммутативность почти–кольца.

ON DERIVATIONS OF NEAR–RINGS

We study the connections of scp^+ –derivations and generalized Daif–derivations with the commutativity of a near–ring.

Одержано
03.04.06

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів