УДК 512.544

Л. В. Йоник

ГРУПИ З УМОВОЮ МІНІМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП, ЯКІ НЕ Є РОЗШИРЕННЯМИ СКІНЧЕННИХ ГРУП ЗА ДОПОМОГОЮ НІЛЬПОТЕНТНИХ

Охарактеризовано групи без неодиничних досконалих секцій, які задовольняють умову мінімальності для підгруп, що не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп.

0. Нехай $\mathfrak{X}$ — клас груп, замкнений стосовно підгруп. Кажуть, що група G задовольняє умову мінімальності для підгруп, які не є $\mathfrak{X}$–групами, якщо для будь–якого строго спадного ланцюга $G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n > \ldots$ підгруп G_n із G знайдеться такий індекс $n_0 \in \mathbb{N}$, що G_m є $\mathfrak{X}$–групою для будь–якого $m \geq n_0$. У наших дослідженнях замість $\mathfrak{X}$ береться клас FN (відповідно FA), який складається із груп, кожна з яких є розширенням скінченної групи за допомогою нільпотентної (відповідно абелевої) групи. Коротко групи із класу FN (відповідно FA) називають FN–групами (відповідно FA–групами). Зрозуміло, що група G є FN–групою тоді й тільки тоді, коли член нижнього центрального ряду $\gamma_k G$ скінченний для деякого $k \in \mathbb{N}$. У цій статті досліджуються групи з умовою мінімальності для підгруп, які не є FN–групами. Таку умову позначатимемо через Min–$\overline{FN}$. Зазначимо, що умову Min–$\overline{FN}$ задовольняють черніковські групи та мінімальні не–FN–групи (тобто групи, які не є FN–групами, в той час, як всі їх власні підгрупи належать до класу FN). Мінімальні не–FN–групи охарактеризував М. Ксу [13]. Із його результатів, зокрема, випливає, що нескінченна група G, яка не є скінченно породженою, буде мінімальною не–FN–групою тоді й тільки тоді, коли вона належить до одного із типів:

(α) G — недосконала мінімальна не–FA–група (тобто група, яка не є FA–групою, але всі її власні підгрупи є такими);

(β) G — недосконала мінімальна ненільпотентна група з власними субнормальними підгрупами;

(γ) G — локально нільпотентна досконала мінімальна ненільпотентна група.

Пізніше В. Мехрес [11] встановив, що групи з субнормальними власними підгрупами завжди розв'язні. Останнім часом групи із субнормальними та нільпотентними власними підгрупами прийнято називати групами типу Гайнекена–Могамеда. Як відомо, такі групи є p–групами й існує незліченна множина попарно неізоморфних груп типу Гайнекена–Могамеда (див., наприклад, [8, 10, 11]). Структуру недосконалих мінімальних не–FA–груп описали В. В. Беляєв і Н. Ф. Сесекін [1, 2]. З їх досліджень випливає, що G — нескінченна недосконала мінімальна не–FA–група в тому й тільки в тому випадку, коли вона метабелева з черніковським комутантом G' і належить до одного із трьох типів:

(α_1) $G = \langle b, a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots \rangle$, де $b^{p^n} = 1$, $[a_i, a_j] = 1$, $[b, a_0] = 1$, $[b, a_i] = a_{i-1} (i \neq 0)$, $a_0^p = 1$;

(α_2) $G = \langle b, a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots \rangle$, де $b^{p^n} = a_0$, $[a_i, a_j] = 1$, $[b, a_i] = a_{i-1} (i \neq 0)$, $a_0^p = 1$;

 ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. – 49, № 2. – С. 12-16.

(α_3) $G = (A_1 \times \ldots \times A_\nu) \rtimes \langle b \rangle$, A_i — квазіциклічна p–група, $b^{q^n} = 1$, p, q — різні прості числа, $A_i = \langle a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots \rangle$, $a_{ij}^p = a_{i,j-1}, a_{i0}^p = 1$, причому $b^{-1}a_{ij}b = a_{i+1,j}$ для $i \neq \nu$ та $b^{-1}a_{ij}b = a_{1j}^{c_1} \cdot \ldots \cdot a_{\nu j}^{c_\nu}$, де c_ν — цілі p–адичні числа, які є коефіцієнтами незвідного многочлена $x^\nu - c_1x^{\nu-1} - \ldots - c_{\nu-1}x - c_\nu$, що ділить многочлен $\dfrac{x^q - 1}{x - 1}$ над кільцем цілих p–адичних чисел.

Зазначимо, що раніше О. Д. Артемович [4, 5] досліджував групи із умовою мінімальності для не майже нільпотентних підгруп.

У цій статті охарактеризуємо групи, які не мають неодиничних досконалих секцій і задовольняють умову Min–$\overline{FN}$. Доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай G — група, яка не має неодиничних досконалих секцій. Тоді група G задовольняє умову* Min–$\overline{FN}$ *в тому й тільки в тому випадку, коли вона належить до одного з типів:*

1° *G — FN–група;*

2° *G — майже нільпотентна група;*

3° *G містить таку нормальну підгрупу A скінченного індексу, що*

$$A = A_0 \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \quad (n \geq 1),$$

де A_i — група з нільпотентним комутантом $A_i' = A' \leq A_0$ і подільною черніковською p_i–групою A_i/A_i' $(i = 1, \ldots, n)$, A_0 — нільпотентна підгрупа з подільною черніковською фактор–групою A_0/A' (зокрема, A_0/A' одинична) і, крім того, $p_1, \ldots, p_n$ — попарно різні прості числа.

У цій статті p — просте число, $\mathbb{C}_{p^\infty}$ — квазіциклічна p–група, $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел. Якщо G — група, то $Z(G)$ — центр, $G', G'', \ldots$ — послідовні комутанти, а $\gamma_n G$ — член її нижнього центрального ряду.

Нагадаємо, що група G називається HM^*–групою, якщо її комутант G' гіперцентральний, а фактор–група G/G' — подільна черніковська група (детальніше див. [5, 6]). Деякі приклади HM^*–груп, які не є p–групами, побудовано в [5]. Якщо $G \neq G'$, то кажуть, що група G недосконала.

Інші означення і факти стандартні і їх можна знайти, наприклад, у монографіях [3] і [12].

1. Попередньо наведемо властивості груп з умовою Min–$\overline{FN}$, необхідні для доведення теореми.

Лема 1. *Нехай G — група, яка задовольняє умову* Min–$\overline{FN}$, *A — її підгрупа. Тоді вірні такі твердження:*

1) *A задовольняє умову* Min–$\overline{FN}$;

2) *якщо A — нормальна підгрупа в G, то фактор–група G/A задовольняє умову* Min–$\overline{FN}$;

3) *якщо A — нормальна підгрупа в G, яка не є FN-групою, то G/A задовольняє умову мінімальності для підгруп.*

Д о в е д е н н я легко отримати.

Зауваження. Будь–яка NF–група (тобто майже нільпотентна група) G задовольняє умову Min–$\overline{FN}$.

Справді, якщо H — нільпотентна нормальна підгрупа скінченного індексу в G, а $G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n > \ldots$ — будь–який строго спадний ланцюг із G, то G_nH/H — одинична група для деякого $n \in \mathbb{N}$, а значить, G_n — FN–група. Це означає, що G задовольняє умову Min–$\overline{FN}$.

Нагадаємо, група G, кожні дві власні підгрупи A, B якої породжують власну підгрупу $\langle A, B \rangle$ в G, називається нерозкладною.

Лема 2. *Нехай G — недосконала група, всі власні підгрупи якої є FN–групами. Тоді G — FN–група або G' — періодична підгрупа з нерозкладною фактор–групою G/G'.*

Д о в е д е н н я. Якщо G/G' — розкладна група, то G — добуток певних двох своїх власних нормальних підгруп A і B. Оскільки $\gamma_n A$ і $\gamma_m B$ — скінченні нормальні підгрупи в G для деяких $n, m \in \mathbb{N}$, то

$$\overline{G} = G/(\gamma_n A) \cdot (\gamma_m B) = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

— добуток двох нормальних нільпотентних підгруп. Отже, G — FN–група. Тому надалі припускаємо, що G/G' — нерозкладна група, а G не є FN–групою. Зрозуміло, що $\gamma_k(G')$ — скінченна нормальна підгрупа в G для деякого $k \in \mathbb{N}$, а G/G' — p–група для певного простого числа p.

Доведемо, від супротивного, що комутант G' періодичний. Зрозуміло, що G' містить таку G–інваріантну підгрупу T, що $\gamma_k(G') \leq T$ та $\overline{G} = G'/T$ без скруту. Без обмеження загальності вважаємо, що $\overline{G}'$ — абелева група без скруту. Тоді $\overline{G}'$ — правий $\mathbb{Z}[\overline{G}/\overline{G}']$–модуль, де дія індукується спряженням на G', і за лемою 2.3 [7] знайдеться такий власний підмодуль $\overline{N}$ в $\overline{G}'$, що $\overline{G}'/\overline{N}$ — q–група, де q — просте число, відмінне від p, а це веде до суперечності. Таким чином, G' — періодична група. Лему доведено. $\diamondsuit$

Лема 3. *Нехай G — недосконала група, всі власні нормальні підгрупи якої є FN–групами. Тоді G задовольняє умову* $\mathrm{Min}\text{–}\overline{FN}$ *в тому й тільки в тому випадку, коли вірне одне із тверджень:*

1) *G — FN–група;*
2) *G — майже нільпотентна група;*
3) *G — мінімальна не–FN–група.*

Д о в е д е н н я. ($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Припустимо, що G не є FN–групою і, як наслідок, не є скінченно породженою. Тоді, за лемою 2, комутант G' — періодична π–група для деякої множини простих чисел π, а G/G' — p–група для деякого простого числа p.

Припустимо, що G містить власну нормальну підгрупу M скінченного індексу. Тоді $\gamma_k M$ — скінченна підгрупа для деякого $k \in \mathbb{N}$ і $S = M \cap C_G(\gamma_k M)$ — підгрупа скінченного індексу в G. Оскільки

$$S/(S \cap \gamma_k M) \cong S\gamma_k M/\gamma_k M \leq M/\gamma_k M$$

і $S \cap \gamma_k M \leq Z(S)$, то S — нільпотентна підгрупа. Отже, G — NF–група.

Тепер нехай G не містить власних нормальних підгруп скінченного індексу і, як наслідок, $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$. Оскільки $\gamma_l(G')$ — скінченна нормальна підгрупа в G для деякого $l \in \mathbb{N}$, то $\gamma_l(G') \leq Z(G)$, а тому G' — нільпотентна підгрупа.

Якщо F — скінченно породжена підгрупа з G, то $G'F$ — власна нормальна підгрупа в G. Але тоді $\gamma_s(G'F)$ — скінченна нормальна підгрупа для певного $s \in \mathbb{N}$ і $\gamma_s(G'F) \leq Z(G)$. Це означає, що $G'F$ — нільпотентна підгрупа. Звідси випливає, що G — локально скінченна p–група, кожна нормальна підгрупа якої нільпотентна. Припустимо, що G містить підгрупу K, яка не є FN–групою. Тоді $G = G'K$. Нехай

$$\overline{G} = G/G''(K \cap G') = \overline{G}' \rtimes \overline{K}.$$

Припустимо, що

$$\overline{G} = \overline{T_0} \geq \overline{T_1} \geq \ldots \geq \overline{T_n} \geq \ldots \tag{1}$$

— спадний ланцюг нормальних підгруп в $\overline{G}$. Тоді $\overline{T_n} \leq \overline{G'}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, а значить, ланцюг (1) обривається. Це означає, що $\overline{G}$ задовольняє умову мінімальності для нормальних підгруп Min– n. За наслідком із [12, том 2, с. 156] $\overline{G}$ — черніковська група і

$$G' = G''(K \cap G') = K \cap G'.$$

Отже, $K = G$ і G — мінімальна не– FN –група. Лему доведено. $\diamondsuit$

2. Доведення теореми. ($\Rightarrow$) Нехай G — група, яка задовольняє Min– $\overline{FN}$ і яка не має неодиничних досконалих секцій. Розглянемо два можливих випадки.

1) У групі G всі нормальні підгрупи є FN –групами. Тоді, за лемами 2 і 3, G — група одного із типів $\mathbf{1}^\circ$, $\mathbf{2}^\circ$ або $\mathbf{3}^\circ$ із умови теореми.

2) Група G містить власну нормальну підгрупу, яка не є FN –групою. Тоді G має такий скінченний спадний ланцюг

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_{n-1} > G_n,$$

що G_{i+1} — нормальна підгрупа в G_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, G_n не є FN –групою, але всі її нормальні підгрупи належать до класу FN. З огляду на результати праць [13] та [2] G_n — група типу Гайнекена–Могамеда або одного із типів (α_1), (α_2), (α_3). Позначимо $H = G_n$.

Якщо H — група типу (α_3), то H — черніковська група (як скінченна послідовність розширень черніковських груп за допомогою черніковських груп з огляду на лему 1), тобто H — група типу (2) із умови теореми.

Припустимо тепер, що H — група типу Гайнекена–Могамеда або одного із типів (α_1), (α_2). Тоді H' — нільпотентна або абелева підгрупа, яка є нормальною в групі G_{n-1}, причому фактор–група G_{n-1}/H' черніковська.

Через A_{n-1} позначимо підгрупу скінченного індексу в G_{n-1} таку, що A_{n-1}/H' — подільна частина фактор–групи G_{n-1}/H'. Тоді $A'_{n-1} = H'$. Враховуючи, що $A_{n-1}A^h_{n-1}/H'$ — черніковська група для будь–якого елемента $h \in G_{n-2}$ і H' не містить власних H –інваріантних підгруп скінченного індексу, отримуємо, що A_{n-1} — нормальна підгрупа в G_{n-2}. Подібним чином міркуючи далі, через скінченне число кроків отримаємо, що G містить таку нормальну підгрупу A скінченного індексу, що $A' = H'$ і A/A' — подільна черніковська група. Як наслідок,

$$A = A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \quad (n \geq 1),$$

де A_i/A' — подільна черніковська силовська p_i –підгрупа групи A/A' $(i = 1, \ldots, n)$, $p_1, \ldots, p_n$ — різні прості числа. Якщо A_s — FN –група для деякого s $(1 \leq s \leq n)$, то вона абелева. З огляду на зроблене припущення знайдеться такий індекс m $(1 \leq m \leq n)$, що A_m не є FN –групою. Тоді, як і вище, A_m містить субнормальну підгрупу E, власні нормальні підгрупи якої належать до класу FN. Нескладно довести, що $E' = A'_n = H'$. Таким чином, A_n — HM^* –група з нільпотентним комутантом A'_n, а G — група типу (3) із умови теореми.

($\Leftarrow$) випливає безпосередньо. Теорему доведено. $\diamondsuit$

1. *Беляев В. В.* Группы типа Миллера-Морено// Сиб. мат. ж. – 1978. – **29**, № 3. – С. 509–514.
2. *Беляев В. В., Сесекин Н. Ф.* О бесконечных группах типа Миллера–Морено// Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1975. – **26**. – P. 369–376.
3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами систем подгрупп. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.

4. *Artemovych O. D.* Groups with the minimal condition on non–„abelian-by-finite" subgroups// Мат. студії. – 2004. – **22**. – P. 215–219.
5. *Artemovych O. D.* Groups with the minimal condition on non–„nilpotent-by-finite" subgroups// Serdica Math. J. – 2002. – **28**. – P. 153–162.
6. *Asar A. O.* On non-nilpotent p-groups and the normalizer condition// Turkish J. Math. – 1994. – **18**. – P. 114–129.
7. *Bruno B., Phillips R. E.* A note on groups with nilpotent-by-finite proper subgroups// Archiv Math. – 1995. – **65**. – P. 369–374.
8. *Hartley B.* A note on normalizer condition// Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1973. – **74**. – P. 11–15.
9. *Heineken H., Mohamed I. J.* A groups with trivial centre satisfying the normalizer condition// J. Algebra. – 1968. – **10**. – P. 368–376.
10. *Menegazzo F.* Groups of Heineken–Mohamed// J.Algebra. – 1995. – **171**. – P. 807–825.
11. *Möhres W.* Auflösbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind// Archiv Math. – 1990. – **54**. – P. 232–235.
12. *Robinson D. J. S.* Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups. — Springer: Verlag (Part 1, 1970; Part 2, 1972).
13. *Xu M.* Groups whose proper subgroups are finite–by–nilpotent// Archiv Math. – 1996. – **66**. – P. 353–359.

ГРУППЫ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ РАСШИРЕНИЯМИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ПРИ ПОМОЩИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ

Получена характеризация групп, не имеющих неединичных совершенных секций и удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп, не являющихся расширениями конечных групп при помощи нильпотентных групп.

GROUPS WITH THE MINIMAL CONDITION ON NON–„FINITE–BY–NILPOTENT" SUBGROUPS

We characterize the groups in which no non–trivial section is perfect and such that any stricly descending series of non–„finite–by–nilpotent" subgroups is finite.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано 03.04.06