

АНАЛІЗ ПРУЖНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ З НЕСТАЛОЮ КУТОВОЮ ШВИДКІСТЮ В АКУСТИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Вивчається плоский деформований стан пружного кругового циліндра, що обертається навколо своєї осі симетрії зі змінною кутковою швидкістю. Вважається, що циліндр оточений ідеальною стисливою рідиною (газом). Точний розв'язок задачі одержано з використанням інтегрального перетворення Фур'є за часом. Обчислення виконано для випадку обертання у воді циліндра, виготовленого з армко-заліза. Проаналізовано спектральні хвильові характеристики для переміщень і напружень. Для випадку коливань куткової швидкості за монохроматичним законом досліджено умови резонансного підсилення амплітуд радіального переміщення і компонент тензора напружень у пружному циліндрі.

1. Вступ. У технічних пристроях часто зустрічаються деталі у вигляді пружного кругового циліндра, що обертається зі змінною кутковою швидкістю. При цьому обертальне тіло зазвичай перебуває в рідині або газі, внаслідок чого в оточуюче середовище випромінюються звукові хвилі. Спектральні амплітуди цих хвиль мають резонансний характер [6, 10, 11]. При випромінюванні звуку в діапазоні резонансних частот інтенсивність акустичної енергії може бути досить значною. Це вказує на те, що динамічні характеристики тіла обертання також характеризуються резонансним розподілом. При цьому внаслідок випромінювання звуку в зовнішнє середовище і перевідбиття збіжно-розбіжних хвиль деформації на поверхні циліндра в матеріалі циліндра виникає складний розподіл радіального переміщення і напружень. Це особливо важливо брати до уваги в діапазоні резонансних частот, коли вказані характеристики пружно-деформованого стану суттєво відрізняються від статичних і можуть досягати критичних значень. У реальних конструкціях циліндр і оточуюча його рідина (газ) займають об'єми скінченних розмірів. Проте розв'язування задачі з урахуванням цих факторів надто складне і не є доцільним при прагненні виявити та проаналізувати головні механізми хвилеутворення у циліндрі, що обертається. Тому на першому етапі дослідження цієї комплексної проблеми виникає необхідність виконати математичне моделювання вказаних динамічних процесів в межах максимально спрощеної постановки задачі з подальшим її наближенням до реальності на вищих етапах.

У цій статті вивчається динамічна задача гідропружності для кругового циліндра, що обертається навколо своєї осі симетрії і перебуває в умовах плоскої деформації. Вважається, що пружний циліндр має безмежну довжину, а його кутова швидкість обертання однакова в усіх поперечних перерізах. Припускається також, що оточуюча рідина (газ) займає весь простір. Аналогічна задача вивчалась в роботі [6], але у ній основний акцент зроблено на дослідженні характеристик випроміненого звуку.

2. Спектральні характеристики переміщень і напружень в круговому циліндрі. Розглянемо пружний круговий циліндр безмежної довжини, оточений стисливою ідеальною (нев'язкою) рідиною або газом. Циліндр обертається навколо своєї осі симетрії зі змінною за часом кутковою швидкістю, внаслідок чого виникає відцентрова сила, що теж є функцією часу [4]. Ця відцентрова сила є джерелом збудження у пружному матеріалі хвиль деформації, а оскільки тіло обертання перебуває в контакті із зовнішнім акустичним середовищем, то відповідно й джерелом випромінених звукових хвиль. Обертальне тіло та оточуюча його рідина (газ) взаємно впливають на формування у них акустичних хвиль. Структура генерованого звуку вивча-

лась в роботах [6, 10, 11]. У цій статті зосередимо основну увагу на процеси, що відбуваються в циліндрі.

Динамічна рівновага пружного циліндра, що обертається навколо своєї осі симетрії зі змінною за часом кутовою швидкістю, описується за допомогою диференціального рівняння [3, 12]

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \rho_s r \Omega^2(t) = \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (1)$$

де $u(r, t)$ – радіальне переміщення; $\Omega(t)$ – змінна кутова швидкість; t – час; λ, μ – сталі Ляме; ρ_s – густина пружного матеріалу; r – радіальна полярна координата з початком відліку, розташованому на осі симетрії циліндра; a – радіус циліндра.

Радіальні $\sigma_r(r, t)$, кільцеві $\sigma_\theta(r, t)$ та осьові $\sigma_z(r, t)$ напруження в круговому циліндрі відповідно визначаються із співвідношень [3]

$$\sigma_r = \lambda e + 2\mu e_r, \quad \sigma_\theta = \lambda e + 2\mu e_\theta, \quad \sigma_z = \lambda e, \quad (2)$$

де $e_r(r, t)$, $e_\theta(r, t)$ – радіальна та кільцева компоненти тензора деформації:

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{u}{r}, \quad e = e_r + e_\theta. \quad (3)$$

Амплітуда тиску в акустичній рідині $p(r, t)$ визначається хвильовим рівнянням [8]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad a \leq r < \infty, \quad (4)$$

де c – швидкість звуку. При цьому тиск $p(r, t)$ і радіальне переміщення частинок $w(r, t)$ у звуковому полі руху пов'язані співвідношенням

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad a \leq r < \infty, \quad (5)$$

де ρ – густина акустичного середовища.

На поверхні розділу двох середовищ виконуються граничні умови

$$\sigma_r + p = 0, \quad r = a, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad r = a. \quad (7)$$

Для розв'язування задачі використаємо інтегральне перетворення Фур'є за часом [1]

$$f^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad i = \sqrt{-1},$$

де ω – кутова частота (параметр інтегрального перетворення). При цьому береться до уваги принцип причинності [8], згідно з яким, якщо $\Omega(t) = 0$ при $t \leq t_1$, $t_1 \geq -\infty$, то виконуються початкові умови

$$u = 0 = p, \quad t \leq t_1.$$

Застосувавши до рівнянь (1) і (4) Фур'є-перетворення, одержимо в трансформантах звичайні диференціальні рівняння:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(k_L^2 - \frac{1}{r^2} \right) \right] u^F(r, \omega) + r K_L^2(\omega) = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (8)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 \right) p^F(r, \omega) = 0, \quad a \leq r < \infty, \quad (9)$$

де $k = \omega/c$ – хвильове число в акустичному середовищі; $k_L = \omega/c_L$ – хвильове число в пружному тілі; $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_s}$ – швидкість поздовжніх хвиль у матеріалі циліндра; $K_L(\omega)$ – додаткове «хвильове число», пов'язане з часовою модуляцією кутової швидкості обертання циліндра; $K_L^2(\omega) = \Omega^F(\omega)/c_L^2$, причому

$$\Omega^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2(t) e^{i\omega t} dt.$$

Граничні умови (6), (7) в Фур'є-трансформантах набудуть вигляду

$$\sigma_r^F + p^F = 0, \quad r = a, \quad (10)$$

$$u^F = w^F, \quad r = a, \quad (11)$$

при цьому функції $p^F(r, \omega)$ і $u^F(r, \omega)$ повинні бути аналітичними у верхній півплощині $\text{Im } \omega > 0$ та сингулярними, але інтегровними при $\text{Im } \omega = 0$ [8].

Тоді в полі Фур'є-трансформант одержимо точні розв'язки рівнянь (8), (9) у вигляді

$$\frac{1}{\lambda + 2\mu} p^F(r, \omega) = \frac{K_L^2}{k_L^2} B H_0^{(1)}(kr), \quad a \leq r < \infty, \quad (12)$$

$$\frac{1}{a} u^F(r, \omega) = \frac{K_L^2}{k_L^2} [A J_1(k_L r) - r], \quad 0 \leq r \leq a, \quad (13)$$

і за ними, а також трансформованими співвідношеннями (2), (3), (5) отримаємо й Фур'є-перетворення радіальних переміщень в акустичному середовищі та напружень у циліндрі

$$\frac{1}{a} w^F(r, \omega) = \frac{K_L^2}{k_L^2} \left[-\frac{\alpha_s}{\alpha x_L} B H_1^{(1)}(kr) \right], \quad a \leq r < \infty, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\lambda + 2\mu} \sigma_{\theta, r}^F(r, \omega) = \frac{K_L^2}{k_L^2} [A x_L J_{02}^{\pm}(k_L r) - 2(1 - \alpha)], \quad 0 \leq r \leq a, \quad (15)$$

$$\sigma_z^F(r, \omega) = \frac{1 - 2\alpha}{2(1 - \alpha)} [\sigma_r^F(r, \omega) + \sigma_{\theta}^F(r, \omega)], \quad 0 \leq r \leq a, \quad (16)$$

де

$$J_{02}^{\pm}(k_L r) = (1 - \alpha) J_0(k_L r) \pm \alpha J_2(k_L r).$$

Тут A , B – сталі інтегрування; $J_n(z)$ – функції Бесселя, $H_n^{(1)}(z)$, $n = 0, 1$, – функції Ганкеля першого роду; $\alpha = \rho c$ і $\alpha_s = \rho_s c_L$ – хвильові опори в акустичному середовищі та пружному матеріалі відповідно; $\alpha = c_T^2 / c_L^2$; $c_T = \sqrt{\mu / \rho_s}$ – швидкість поперечних хвиль в матеріалі циліндра; $x_L = k_L a$.

Задовольняючи граничні умови (10), (11), визначимо сталу інтегрування A у вигляді

$$A = \Delta_A / \Delta,$$

де

$$\Delta = H_0^{(1)}(x) J_1(x_L) - \frac{\alpha_s}{\alpha} H_1^{(1)}(x) J_{02}^-(x_L),$$

$$\Delta_A = H_0^{(1)}(x) - 2(1 - \alpha) \frac{\alpha_s}{\alpha x_L} H_1^{(1)}(x).$$

Тоді на основі формул (13), (15) і (16) отримаємо такі вирази для комплексних амплітуд переміщень і напружень в циліндрі:

$$\begin{aligned} u^F(r, \omega) &= aX_L^2 U^F(r, \omega), \quad 0 \leq r \leq a, \\ \sigma_\gamma^F(r, \omega) &= (\lambda + 2\mu)X_L^2 \Sigma_\gamma^F(r, \omega), \quad 0 \leq r \leq a, \quad \gamma = \{r, \theta, z\}, \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} X_L &= K_L a, \\ U^F(r, \omega) &= \frac{1}{x_L^3 \Delta} \left[x_L H_0^{(1)}(x) \Phi_{0u}(k_L r) - \frac{x_s}{x} H_1^{(1)}(x) \Phi_{1u}(k_L r) \right], \\ \Sigma_{\theta, r}^F(r, \omega) &= \frac{1}{x_L^2 \Delta} \left[H_0^{(1)}(x) \Phi_{0\sigma}^\pm(k_L r) - \frac{x_s}{x} H_1^{(1)}(x) \Phi_{1\sigma}^\pm(k_L r) \right], \\ \Sigma_z^F(r, \omega) &= \frac{1 - 2\alpha}{2(1 - \alpha)} \left[\Sigma_r^F(r, \omega) + \Sigma_\theta^F(r, \omega) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

причому

$$\begin{aligned} \Phi_{0u}(k_L r) &= J_1(k_L r) - (r/a)J_1(x_L), \\ \Phi_{1u}(k_L r) &= 2(1 - \alpha)J_1(k_L r) - (k_L r)J_{02}^-(x_L), \\ \Phi_{0\sigma}^\pm(k_L r) &= x_L J_{02}^\pm(k_L r) - 2(1 - \alpha)J_1(x_L), \\ \Phi_{1\sigma}^\pm(k_L r) &= J_{02}^\pm(k_L r) - J_{02}^-(x_L). \end{aligned}$$

Зокрема,

$$\begin{aligned} \Phi_{0u}(k_L r) \Big|_{r=a} &= \Phi_{0u}(k_L r) \Big|_{r=0} = \Phi_{1u}(k_L r) \Big|_{r=0} = \Phi_{1\sigma}^-(k_L r) \Big|_{r=a} = 0, \\ \Phi_{1u}(k_L r) \Big|_{r=a} &= -\Phi_{0\sigma}^-(k_L r) \Big|_{r=a} = x_L J_2(x_L), \\ \Phi_{0\sigma}^\pm(k_L r) \Big|_{r=0} &= (1 - \alpha)[x_L - 2J_1(x_L)], \\ \Phi_{1\sigma}^\pm(k_L r) \Big|_{r=0} &= 2(1 - \alpha)\{x_L[1 - J_0(x_L)] - \alpha[x_L - 2J_1(x_L)]\}. \end{aligned} \quad (19)$$

При одержанні співвідношень (19) враховано рекурентні формули для циліндричних функцій [9].

3. Залежності переміщень і напружень в циліндрі від часу. Припустимо, що коливання кутової швидкості обертання циліндра відносно сталого значення цієї швидкості мають гармонічний характер

$$\Omega(t) = \Omega_0(1 + \varepsilon_0 \sin \omega_0 t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (20)$$

де Ω_0 – стала кутова швидкість; ε_0 – малий безрозмірний параметр, що характеризує амплітуду збурення кутової швидкості; ω_0 – кругова частота осциляцій.

Тоді для додаткового хвильового числа K_L матиме місце така спектральна залежність [1]:

$$\begin{aligned} (K_L a)^2 &= 2\pi X_{L0}^2 \left\{ (1 + 0.5\varepsilon_0^2)\delta(\omega) - i\varepsilon_0[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] - \right. \\ &\quad \left. - 0.25\varepsilon_0^2[\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0)] \right\}, \end{aligned}$$

де $\delta(z)$ – дельта-функція Дірака; $X_{L0} = \Omega_0 a / c_L$.

Застосувавши до співвідношень (17), (18) обернене інтегральне перетворення Фур'є

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad -\infty < t < \infty,$$

і врахувавши властивості дельта-функції [1] і циліндричних функцій [9], одержимо

$$\begin{aligned} u(r, t) &= aX_{L0}^2 U(r, t), \\ \sigma_\gamma(r, t) &= (\lambda + 2\mu)X_{L0}^2 \Sigma_\gamma(r, t), \quad 0 \leq r \leq a, \quad \gamma = \{r, \theta, z\}, \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} U(r, t) &= (1 + 0.5\varepsilon_0^2)U(r) - 2\varepsilon_0 \operatorname{Im}[U^F(r, \omega_0) \exp(-i\omega_0 t)] - \\ &\quad - 0.5\varepsilon_0^2 \operatorname{Re}[U^F(r, 2\omega_0) \exp(-2i\omega_0 t)], \quad 0 \leq r \leq a, \\ \Sigma_\gamma(r, t) &= (1 + 0.5\varepsilon_0^2)\Sigma_\gamma(r) - 2\varepsilon_0 \operatorname{Im}[\Sigma_\gamma^F(r, \omega_0) \exp(-i\omega_0 t)] - \\ &\quad - 0.5\varepsilon_0^2 \operatorname{Re}[\Sigma_\gamma^F(r, 2\omega_0) \exp(-2i\omega_0 t)], \quad 0 \leq r \leq a, \quad \gamma = \{r, \theta, z\}, \end{aligned} \quad (22)$$

де $U(r) = \lim_{\omega \rightarrow 0} U^F(r, \omega)$, $\Sigma_\gamma(r) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \Sigma_\gamma^F(r, \omega)$ – відповідні функції для переміщень і напружень у статичному випадку [5]:

$$\begin{aligned} U(r) &= \sum_{n=1}^2 u_n (r/a)^{2n-1}, \\ \Sigma_\gamma(r) &= \sum_{n=1}^2 \sigma_{\gamma n} (r/a)^{2(n-1)}, \quad \gamma = \{r, \theta, z\}, \end{aligned}$$

причому

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2-\alpha}{8(1-\alpha)}, & u_2 &= -\frac{1}{8}, & \sigma_{r1} &= -\sigma_{r2} = \sigma_{\theta 1} = \frac{2-\alpha}{4}, \\ \sigma_{\theta 2} &= -\frac{2-3\alpha}{4}, & \sigma_{z1} &= \frac{(2-\alpha)(1-2\alpha)}{4(1-\alpha)}, & \sigma_{z2} &= -\frac{1-2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

З аналізу формул (22) випливає, що структурно переміщення і напруження в обертальному циліндрі при кутовій швидкості, заданій співвідношенням (20), характеризуються трьома складовими: статичними компонентами та коливними компонентами на основній і подвійній частоті. Зазначимо, що, незважаючи на те, що відносна амплітуда коливань кутової швидкості може бути малою, третіми членами у формулах (22), що містять параметр ε_0^2 , нехтувати, взагалі кажучи, не можна. Як буде показано далі, амплітуди функцій $U^F(r, \omega)$, $\Sigma_\gamma^F(r, \omega)$, $\gamma = \{r, \theta, z\}$, мають резонансний характер. З цього випливає, що другі компоненти в згаданих формулах матимуть максимальні значення на частотах $\omega_0 = \omega_{\text{res}}$, а треті – на частотах, у два рази менших від других, тобто резонанси в цих компонентах виникатимуть різночасно.

4. Числові розрахунки. Обчислення виконаємо для випадку пружного циліндра, виготовленого з армко-заліза $\rho_s = 7700 \text{ кг/м}^3$, $c_L = 5960 \text{ м/с}$, $c_T = 3240 \text{ м/с}$ [2], який обертається у воді $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1493 \text{ м/с}$ [7].

На рис. 1 подано графіки модулів функцій $U^F(r, \omega)$ (рис. 1а), $\Sigma_\gamma^F(r, \omega) = \sigma_\gamma^F / (\lambda + 2\mu)$, $\gamma = \{r, \theta, z\}$ (рис. 1б–1г), що характеризують спектральні амплітуди відповідно радіального переміщення, а також радіального, кільцевого та осевого напружень в обертальному циліндрі залежно від безрозмірної частоти x і радіальної координати r/a . У вибраному діапазоні частот ($0 < x < 12$) чітко окреслений резонанс основного тону коливань циліндра (на частоті $x \approx 8.43$), при якому спектральні амплітуди значно перевищують відповідні статичні величини. При цьому амплітуди для радіального переміщення досягають максимального значення на зовнішній поверхні циліндра, а для напружень – на осі симетрії тіла.

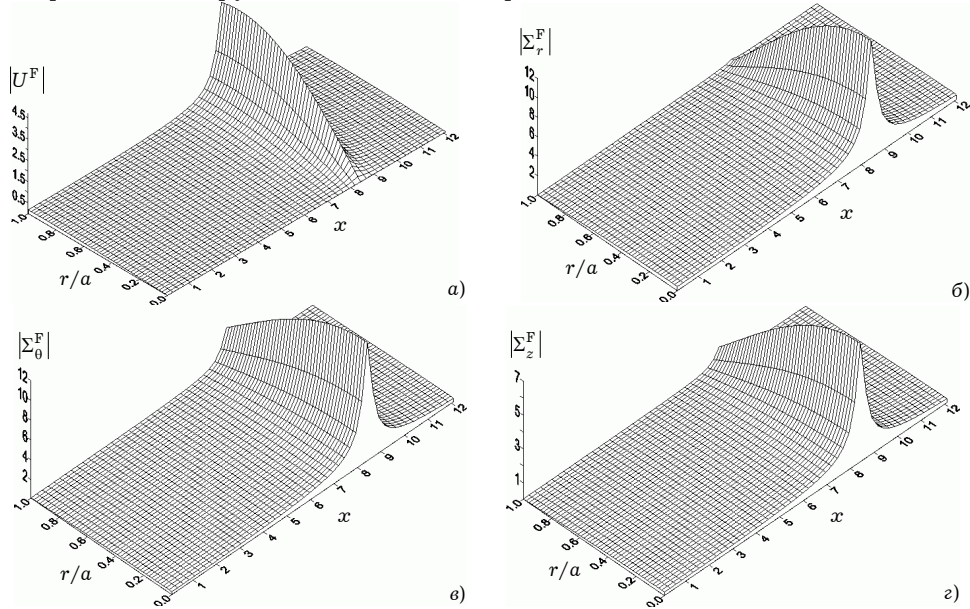


Рис. 1

Рис. 2 ілюструє ці ж самі амплітуди, але в значно ширшому діапазоні частот ($0 < x < 200$), в місцях максимального прояву монопольних резонансів, тобто для переміщень – на поверхні $r/a = 1$, а для напружень – на геометричній осі $r/a = 0$. Оскільки амплітуди резонансів вищих гармонік набагато менші від амплітуди резонансу основного тону, то для отримання співрозмірного зображення спектральних кривих на осі абсцис застосовано децибельну шкалу.

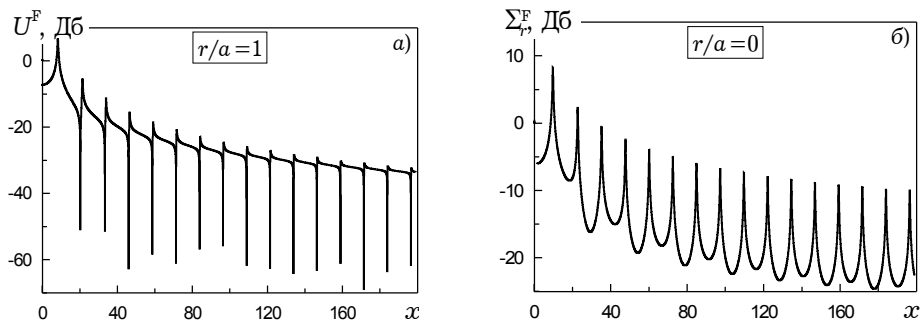


Рис. 2

На рис. 3 зображено більш детально тонку структуру частотно-просторового розподілу спектру для радіальних переміщень (у звичайному масштабі) для $0 < x < 100$. Графіки демонструють процес хвилеутворення в циліндрі. Зокрема, для заданого типу матеріалу циліндра й оточуючого сере-

довища у вибраному частотному проміжку міститься 7 резонансних профілів амплітуд стоячих циліндричних хвиль. Форма кожного профілю має уздовж радіуса коливний характер. Кількість максимумів амплітуд коливань визначається співвідношенням довжини хвилі в акустичному середовищі до радіуса металевого циліндра.

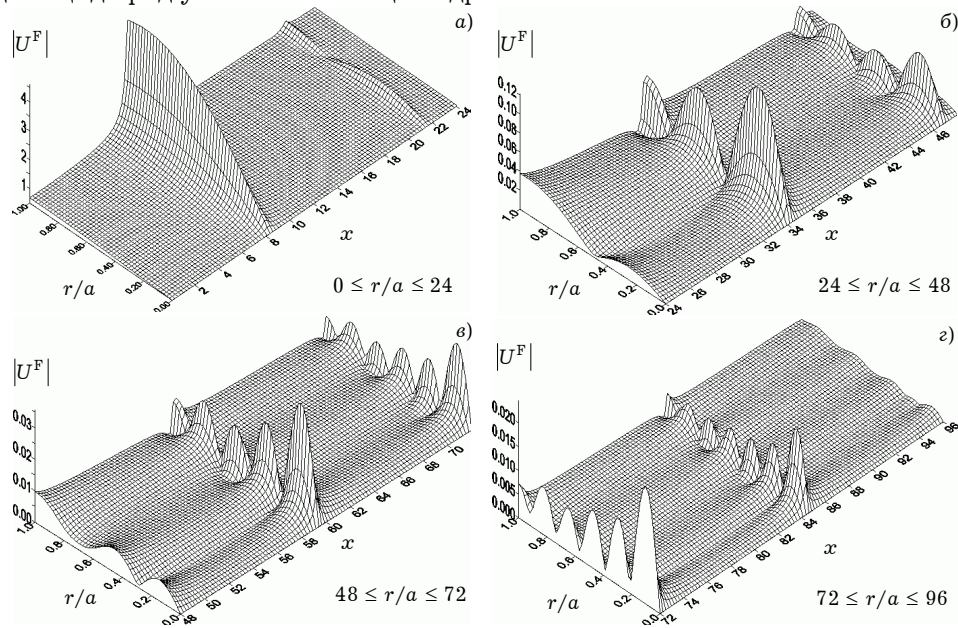


Рис. 3

Рис. 4 містить фазові портрети резонансів радіальних переміщень при $r/a = 1$ на проміжках $0 < x < 100$ і $100 < x < 200$. З рис. 4а випливає, що внаслідок різномасштабності амплітуд резонансних кривих дані для резонансів вищих порядків практично губляться на фоні резонансу основного тону. Картина різко змінюється в діапазоні вищих частот (рис. 4б), де резонанси співрозмірні і всі фазові портрети добре помітні.

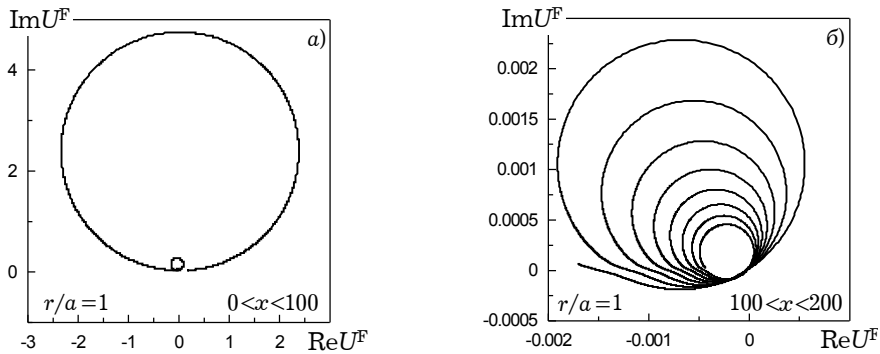


Рис. 4

Рис. 5 зображує розподіли безрозмірних переміщень і напружень по радіусу циліндра при фіксованому значенні часу $t = 0$ і при неперервно змінних частотах коливань кутової швидкості ω_0 з відносною амплітудою коливань $\varepsilon_0 = 0.3$ (це значення використовуватимемо в усіх підрахунках). Частотний діапазон містить монопольний резонанс основного тону, який, як видно з графіків, для даного моменту часу має деструктивний характер. Крім основного резонансу на безрозмірній частоті $x_{0,\text{res}} = 8.43$, який описується другими членами формул (22), помітний також додатковий резонанс,

що описується третіми членами цих формул, на частоті, вдвічі меншій від $x_{0,res}$. Останній резонанс при незначних амплітудах коливань кутової швидкості фактично зливається з фоном, основу якого складає статична частина характеристик.

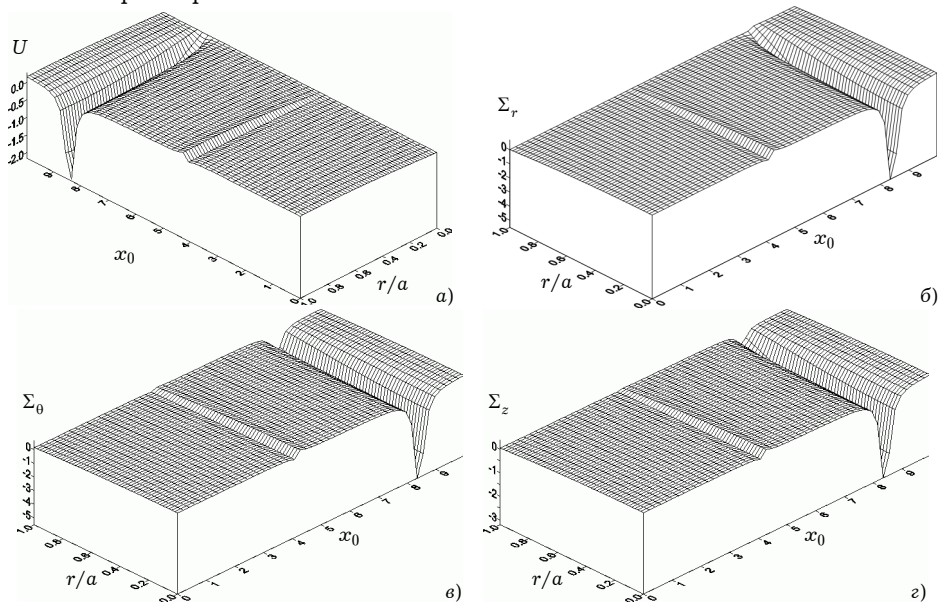


Рис. 5

Динаміку пружно-деформованого стану ілюструє рис. 6 на прикладі радіального напруження у різні моменти часу, які вибрані таким чином, щоб фаза хвилі на резонансній частоті основного тону ($x_{0,res} = 8.43$) змінювалась на 90° . Графіки показують, що протягом одного періоду коливань кутової швидкості хвильова картина різко змінюється: резонанси з конструктивних стають деструктивними і, навпаки, тобто циліндр на частотах, близьких до резонансних, зазнає циклічних змін знаку переміщень і напружень.

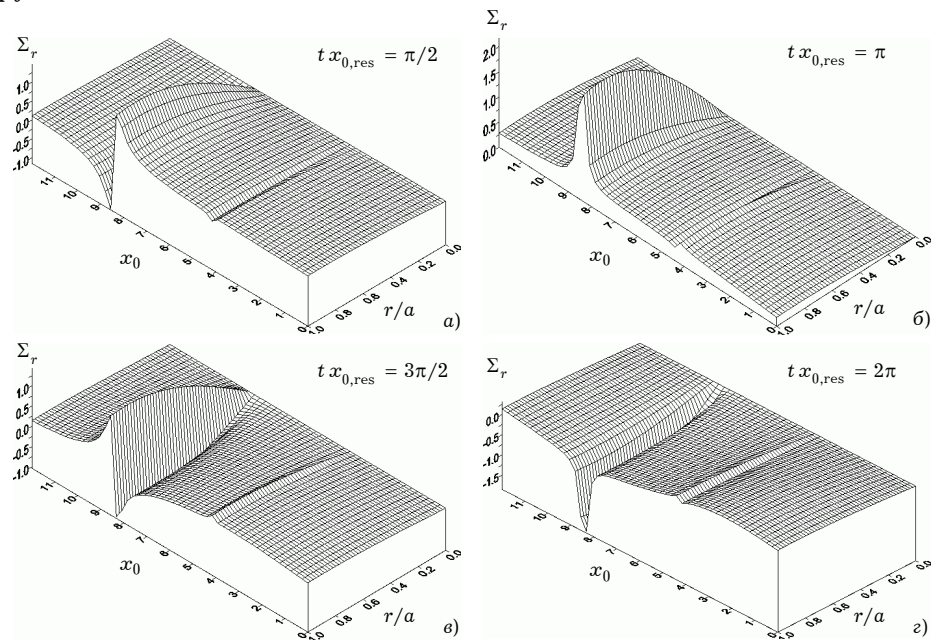


Рис. 6

Рис. 7 відображає цей факт на прикладі триперіодичної зміни з часом амплітуд переміщення і радіального напруження (для кільцевих і осьових напружень характер зміни є подібним до характеру радіальних напружень), генерованих на резонансній частоті основного тону $x_{0,res} = 8.43$ при $\epsilon_0 = 0.3$.

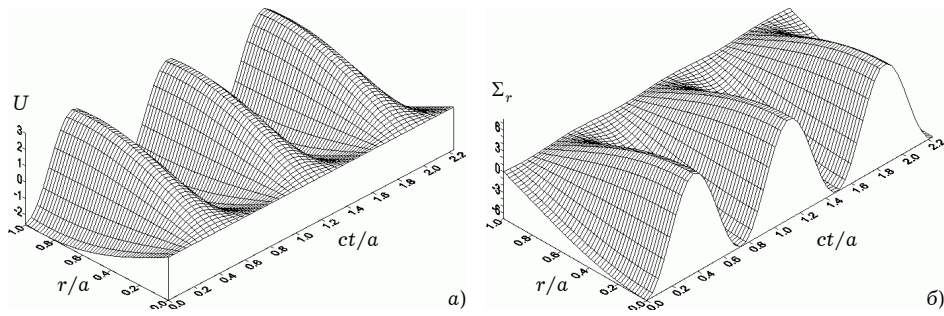


Рис. 7

Зауважимо, що абсолютні значення переміщень і напружень відповідно визначаються також нормуючими множниками aX_{L0}^2 і $(\lambda + 2\mu)X_{L0}^2$, де X_{L0} – досить мала величина. Наприклад, для циліндра з радіусом $a = 0.25$ м, що обертається з кутовою швидкістю $\Omega_0 = 1256$ рад/с, матимемо $X_{L0} = 0.001$.

5. Висновки. Обертання пружного кругового циліндра з несталою кутовою швидкістю у стисливій рідині або в газі є причиною випромінювання звуку в оточуюче середовище і виникнення хвиль деформації в самому циліндрі. У свою чергу, зовнішнє акустичне середовище, яке реально, як правило, контактує з обертальними об'єктами, виявляє значний вплив на формування динамічного пружно-деформованого стану в циліндрі, особливо на резонансні характеристики. Насамперед рідина або газ, які відбирають частину акустичної енергії, відіграють демпфуючу роль, що проявляється у скінченності ширин і амплітуд спектральних ліній резонансного збудження переміщення і напружень у циліндрі. З аналізу випливає, що частотні характеристики хвиль деформації містять нескінченну кількість високочастотних спектральних ліній монополюного типу, що є наслідком суперпозиції збіжних і розбіжних циліндричних хвиль в осесиметричному пружному тілі. Однак внаслідок впливу зовнішньої стислої рідини обертони зі збільшенням їхнього порядку швидко спадають за амплітудою. Тому практичне значення має лише резонанс основного типу коливань, амплітуда якого на порядок вища від наступних. Тим не менше при високочастотному збудженні хвиль треба мати на увазі також резонанси вищих порядків.

При монохроматичному збудженні коливань кутової швидкості обертання циліндра у ньому виникають хвильові стани на основній і подвійній частоті, які накладаються на статичні стани, викликані обертанням зі сталою кутовою швидкістю. Дослідження показали, що оскільки на практиці відносна амплітуда коливань кутової швидкості є малою, то вплив другої гармоніки в порівнянні з першою гармонікою є незначним і має фоновий характер (порядку статичних величин).

Проведені числові розрахунки виявили складний просторовий характер розподілу переміщень і напружень у циліндрі в резонансному діапазоні частот. Насамперед, спостерігається немонотонність (коливність) амплітуд хвиль деформації на резонансних частотах зі зміною радіальної координати. У частотному спектрі це пов'язано з кількістю довжин стоячих хвиль, що укладаються по поперечному перерізу циліндра. У динамічному режимі це явище є наслідком фазового співпадіння або неспівпадіння біжучих циліндричних хвиль. Підрахунки для переміщень і напружень у фіксовані моменти часу і для вибраного типу матеріалу об'єкту показали, що при коливанні на основному резонансі по радіусу циліндра укладається чверть

довжини хвилі. Зміна фази хвиль призводить до знакозміності динамічних характеристик. На практиці це може спричинити передумови ненадійності дії відповідного конструктивного елемента.

1. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. – Москва: Наука, 1977. – 287 с.
2. Векслер Н. Д. Информационные задачи гидроупругости. – Таллинн: Валгус, 1988. – 246 с.
3. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – Москва: Высш. шк., 1975. – 526 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. – Москва: Наука, 1979. – 939 с.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. – Москва–Ленинград: ОНТИ НКТП, 1935. – 674 с.
6. Піддубняк О. П. Випромінювання звуку пружним круговим циліндром, що обертається навколо своєї осі зі змінною кутовою швидкістю // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2003. – **46**, № 3. – С. 106–115.
7. *Политехнический словарь* / Глав. ред. И. И. Артоболевский. – Москва: Сов. энциклопедия, 1976. – 608 с.
8. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. – Москва: Мир, 1978. – 548 с. – Т. 1.
9. Янке Е., Эмде Ф., Лёв Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. – Москва: Наука, 1968. – 344 с.
10. Pidubniak O. P., Pidubniak N. G. Sound radiation by a hollow circular elastic cylinder rotated in water with a variable angular velocity // *Arch. Acoust.* – 2003. – **28**, No. 4. – P. 339–354.
11. Pidubniak O., Pidubniak N. Sound radiation by an elastic circular hollow cylinder rotated in air with a variable angular velocity // *Мат. проблеми механіки неоднорідних структур.* – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2003. – С. 355–358.
12. Singh A, Puri P. Naprężenia w rurze cylindrycznej obracającej się ze zmienną prędkością kątową // *Rozpr. Inż.* – 1963. – **11**, № 3. – S. 449–463.

АНАЛИЗ УПРУГО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ С НЕПОСТОЯННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Изучается плоское деформированное состояние упругого кругового цилиндра, вращающегося вокруг своей оси симметрии с переменной угловой скоростью. Предполагается, что цилиндр окружен идеальной сжимаемой жидкостью (газом). Точное решение задачи получено с использованием интегрального преобразования Фурье по времени. Вычисления выполнены для случая вращения в воде цилиндра, изготовленного из армко-железа. Выполнен анализ спектральных волновых характеристик для радиальных смещений и радиальных, кольцевых и осевых напряжений. Для случая монохроматических колебаний угловой скорости исследованы условия резонансного усиления амплитуд радиального смещения и компонент тензора напряжений в упругом цилиндре.

ANALYSIS OF STRAIN-STRESS STATE OF CIRCULAR CYLINDER ROTATING IN ACOUSTIC MEDIUM WITH NON-CONSTANT ANGULAR VELOCITY

A plane strain-state of an elastic circular cylinder of infinite length rotating about its axis of symmetry with a non-uniform angular velocity is studied. We assumed that the cylinder is surrounded by an ideal compressible non-viscous fluid (gas). The exact solution of this hydro-elasticity problem is obtained applying the Fourier transform over time. Calculations are carried out for the case of rotation the Armco iron cylinder immersed in water. The spectral wave characteristics for the displacements and stresses are analyzed. The conditions of resonance amplitudes intensification of a radial displacement and stress tensor components in an elastic cylinder for the case of monochromatic oscillation of angular velocity are investigated.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
Політехніка Лодзька, Лодзь, Польща

Одержано
04.07.05