УДК 539.370

М. Ю. Швайко, М. М. Фількевич

АНАЛІТИЧНЕ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМАЦІЇ СТАЛІ-45 ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Вивчається можливість використання варіантів теорії ковзання [2] *і* [5] *для опису одержаної в експерименті* [2] *немонотонної деформації сталі-45 при навантаженні по дволанкових траєкторіях (розтяг з крученням тонкостінної трубки). Співставлення експериментальних і теоретичних даних підтверджує деяку перевагу варіанта теорії пластичності* [5]. *У порівнянні з* [2] *ця перевага проявляється як при складному, так і при простому навантаженнях, особливо в межах малих пластичних деформацій, сумірних з пружними на границі текучості.*

1. У математичному плані задача визначення деформації нелінійної моделі плоскопластичного середовища [5] при довільному навантаженні зводиться до визначення швидкості інтенсивності зсуву $\varphi_t'(\theta, t)$ і меж напрямків зсуву $-\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ із системи інтегральних рівнянь

$$\int\limits_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} R[\varepsilon_i^{(p)}(t), \lambda_k^*(t), \omega]\, \varphi_t'(\theta, t)\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos[\vartheta(t) - 2\theta_0 - 2\Phi_0], \tag{1}$$

$$\tau_s + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} R\,[\varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi), \omega]\, \varphi_\xi'(\theta, \xi)\, d\theta\, d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)],$$

$$\theta_0 \in [-\alpha_1(\xi), \alpha_2(\xi)]. \tag{2}$$

Тут і надалі використано прийняті раніше позначення [4, 5], зокрема, $\omega = |\theta - \theta_0|$ – кут між напрямком зсуву $n(\theta)$ і довільним напрямком $m(\theta_0)$ в площині деформування; t_0, t – початковий та довільний моменти пластичного деформування;

$$S(t) = \sqrt{S_1^2(t) + S_3^2(t)}, \qquad S_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\sigma_x(t) - \sigma_y(t)],$$

$$S_3(t) = \sqrt{2}\tau_{xy}(t), \quad \Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi(t_0), \quad 2\Phi_1 = \mathrm{arctg}\,(S_3(t)/S_1(t)),$$

$$\Phi_0 = \Phi_1(t_0), \quad \vartheta(t) = \mathrm{arctg}\,(dS_3/dS_1), \quad dt = \sqrt{dS_1^2 + dS_3^2}.$$

Постулюємо [4, 5], що універсальну функцію матеріалу $R\,[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*, \omega]$ можна подати у вигляді добутку двох функцій

$$R\,[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*, \omega] = \Pi\,[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*]\, F(\omega), \tag{3}$$

одна з яких (F) враховує перехресну взаємодію систем ковзання, а друга – вплив на R інтенсивності пластичної деформації $\varepsilon_i^{(p)}$ та її екстремальних значень λ_k^*, що відповідають зміні знаку швидкості $\dot{\varepsilon}_i^{(p)}$ на протилежний. У процесі пластичного деформування, для якого $\varepsilon_i^{(p)}$ є неспадною функцією часу ($\dot{\varepsilon}_i^{(p)} \ge 0$, $\lambda_k^* = \varepsilon_i^{(p)}$), замість виразу (3) приймаємо, що $R = \Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]F(\omega)$. Методику визначення $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$ наведено далі. Функцію зміцнення $F(\omega)$ з точністю до адитивної сталої будемо задавати [4] у вигляді

$$F(\omega) = a_0 + a_2 \cos 2\omega + a_3 \delta(\omega) + a_4 \delta\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right), \tag{4}$$

де $\delta(\omega)$ – дельта-функція Дірака, $a_i \sim \mathrm{const}$.

Розв'язок рівняння (1) для $F(\omega)$ (4) подається формулами [4]

$$\Pi\varphi_t'(\theta,t) = A_1(t)\cos[\vartheta(t) - 2\chi(t) - 2\Phi_0]\cos 2[\theta - \chi(t)] +$$
$$+ B_1(t)\sin[\vartheta(t) - 2\chi(t) - 2\Phi_0]\sin 2[\theta - \chi(t)] +$$
$$+ C_1(t)\cos[\vartheta(t) - 2\chi(t) - 2\Phi_0],$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{2a_0\alpha + a_3}{[a_3 + a_2(\alpha + 0.25\sin 4\alpha)](2a_0\alpha + a_3) - a_0 a_2 \sin^2 2\alpha},$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{a_3 + a_2(\alpha - 0.25\sin 4\alpha)}, \qquad C_1 = -A_1\frac{a_0\sin 2\alpha}{2a_0\alpha + a_3},$$

$$2\alpha = \alpha_2(t) + \alpha_1(t), \qquad 2\chi = \alpha_2(t) - \alpha_1(t). \tag{5}$$

Для компонент вектора швидкості плоскопластичної деформації $\dot{\mathbf{\Gamma}}^{(p)}$ маємо [4]

$$\dot{\Gamma}_1^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi_t'(\theta,t)\cos 2(\theta + \Phi_0)\,d\theta,$$

$$\dot{\Gamma}_3^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi_t'(\theta,t)\sin 2(\theta + \Phi_0)\,d\theta, \tag{6}$$

$$\dot{\Gamma}_1^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y), \qquad \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \sqrt{2}\,\dot{\varepsilon}_{xy},$$

або після обчислення інтегралів

$$\Pi\dot{\Gamma}_1^{(p)} = B_{11}\cos[\vartheta(t) - 2\chi(t) - 2\Phi_0]\cos 2(\chi(t) + \Phi_0) -$$
$$- B_{12}\sin[\vartheta(t) - 2\chi(t) - 2\Phi_0]\sin 2(\chi(t) + \Phi_0),$$

$$\Pi\dot{\Gamma}_3^{(p)} = B_{11}\cos[\vartheta(t) - 2\chi(t) - 2\Phi_0]\sin 2(\chi(t) + \Phi_0) +$$
$$+ B_{12}\sin[\vartheta(t) - 2\chi(t) - 2\Phi_0]\cos 2(\chi(t) + \Phi_0), \tag{7}$$

де

$$B_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}A_1\left[\alpha + 0.25\sin 4\alpha - \frac{a_0\sin^2 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha}\right],$$

$$B_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}B_1(\alpha - 0.25\sin 4\alpha).$$

У системі координат $B_1 S_\nu S_q$ (рис. 1) з початком в довільній точці траєкторії навантаження B_1 і повернутій відносно OS_1S_3 на кут $2[\chi(t) + \Phi_0]$ формули (7) набувають вигляду

$$\Pi d\Gamma_\nu^{(p)} = B_{11}(\alpha)dS_\nu,$$

$$\Pi d\Gamma_q^{(p)} = B_{12}(\alpha)dS_q. \tag{8}$$

Зокрема, у частковому випадку пропорційного навантаження ($d\mathbf{S}_\nu = d\mathbf{S}$) маємо

$$\Pi\, d\mathbf{\Gamma}^{(p)} = B_{11}(\alpha(S))\,d\mathbf{S}. \tag{9}$$

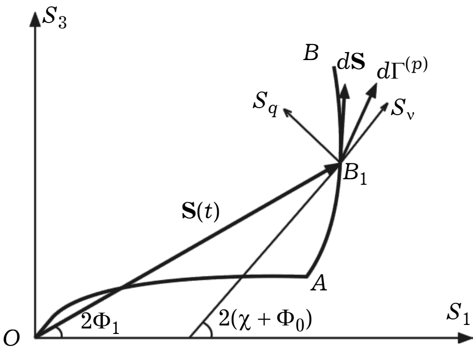

Рис.1

2. Функції $\alpha_1(t)$ і $\alpha_2(t)$ що входять в формули (5)–(9), визначаються інтегральним рівнянням (2). Його розв'язок істотно залежить від типу функції зміцнення $F(\omega)$ і геометрії траєкторії навантаження. Якщо деформація здійснюється без часткового гальмування систем ковзання, так що $\dot{\alpha}_{1,2}(t) \geq 0$ (монотонна деформація), то поставлена задача розв'язується аналітично [4] і для визначення меж напрямків зсуву $-\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ одержуємо

$$\alpha_{1,2}(t) = \alpha(t) \mp \Phi(t),$$

$$\frac{(a_3 + 2a_0\alpha)\cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha}{a_3 + a_2(\alpha - 0.25\sin 4\alpha)} = \frac{\sqrt{2}\tau_s}{S(t)}. \tag{10}$$

Крім цього, $\chi(t) = 0.5[\alpha_2(t) - \alpha_1(t)] = \Phi(t)$, $2(\chi(t) + \Phi_0) = 2\Phi_1(t)$ і вісь B_1S_ν локальної системи координат $B_1S_\nu S_q$ при монотонній деформації напрямлена вздовж вектора навантаження $\mathbf{S}(t)$. За цих умов визначальні рівняння (8) не залежать від орієнтації вектора $\mathbf{S}(t)$ у площині OS_1S_3 і задовольняють постулат ізотропії Ільюшина [1]. Постулат дозволяє одержані для плоскопластичної деформації формули (8) узагальнити на випадок п'ятивимірної траєкторії монотонного навантаження в девіаторному просторі напружень.

Можна показати [4], що монотонна деформація має місце, коли кут β між векторами $\mathbf{S}(t)$ і $\dot{\mathbf{S}}(t)$ у довільній точці траєкторії навантаження не перевершує деякого граничного значення β_0:

$$\beta \equiv \operatorname{arctg}\sqrt{\left(\frac{\mathbf{S}\dot{\mathbf{S}}}{S_k \dot{S}_k}\right)^2 - 1} \leq \beta_0,$$

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{2\sqrt{2}\tau_s}{Sf'(\alpha)}, \qquad f'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{a_0 \sin 2\alpha - (a_3 + 2a_0\alpha)\cos 2\alpha}{a_3 + a_2(\alpha - 0.25\sin 4\alpha)}\right].$$

3. Розглянемо тепер задачу визначення меж $-\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ множини напрямків зсуву при навантаженні по дволанковій траєкторії *OAB* (рис. 1), коли до точки *A* має місце описана вище монотонна деформація ($\dot{\alpha}_{1,2}(t) \geq 0$, $t < t_A$), а після злому – немонотонна, яка супроводжується частковим гальмуванням систем ковзання [5]. Якщо гальмування здійснюється з боку границі $-\alpha_1(t)$ (це має місце за умов $\dot{\Phi}(t) > 0$, $\beta > \beta_0$), то при переході через кутову точку траєкторії *OAB* (рис. 1) функція $\alpha_1(t)$ терпить розрив першого роду, так що $\alpha_1(t_A + 0) < \alpha_1(t_A - 0)$ і на цій межі згідно з рівнянням (2) виконується умова [5]

$$\varphi_t'(\theta, t)\big|_{\theta = -\alpha_1(t)} = 0, \qquad t \geq t_A + 0. \tag{11}$$

Із урахуванням формул (5) її можна записати ще так:

$$\operatorname{tg}(\vartheta - 2\chi - 2\Phi_0) = r(\alpha), \quad r(\alpha) = \frac{A_1 \cos 2\alpha + C_1}{B_1 \sin 2\alpha}. \tag{12}$$

Умова (12) є одним з рівнянь для визначення меж напрямків зсуву при немонотонній деформації, тобто, коли $\alpha_1(t) \leq \alpha_1(t_A - 0)$, $\alpha_2(t) \geq \alpha_2(t_A \pm 0)$, $t \geq t_A + 0$. У тому числі з цієї умови при переході через кутову точку отримуємо початкові умови для сформульованої нижче крайової задачі

$$\alpha_2(t_A) \equiv \alpha_2(t_A \pm 0) = \alpha_2^0,$$

$$\alpha(t_A + 0) \equiv \left(\alpha_2(t_A) + \alpha_1(t_A + 0)\right)/2 = \alpha^0, \tag{13}$$

де α^0 є розв'язком рівняння (12) при $t = t_A + 0$. Щоб одержати другу умову, розглянемо на цей раз інтегральне рівняння (2) в околі границі $\theta = \alpha_2(t)$. Запишемо його так:

$$R_m(\theta_0, t) \equiv R_m(\theta_0, t_A) + \int_{t_A}^{t} \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} \Pi\,[\varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi)]\, F(|\theta - \theta_0|)\varphi'_\xi(\theta, \xi)\, d\theta\, d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} S(t)\cos 2[\theta_0 - \Phi(t)], \qquad \theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]. \tag{14}$$

Тут функція опору зсуву $R_m(\theta_0, t_A)$ для $\theta_0 \ge \alpha_2(t_A)$ визначається формулою [4]

$$R_m(\theta_0, t_A) = \tau_s + A[a_2(\alpha_A - 0.25\sin 4\alpha_A)\cos 2\theta_0 +$$

$$+ a_0(\sin 2\alpha_A - 2\alpha_A \cos 2\alpha_A)],$$

$$A = \frac{\tau_s}{(a_3 + 2a_0\alpha_A)\cos 2\alpha_A - a_0 \sin 2\alpha_A}, \quad \alpha_A = \alpha_2(t_A) - \Phi(t_A).$$

Розглянемо рівність (14) для моментів часу $t = t_k > t_A + 0$ і $t = t_k + \Delta t_k$ при $\theta_0 = \alpha_2(t_k)$ та $\theta_0 = \alpha_2(t_k + \Delta t_k)$. З урахуванням $F(\omega)$ (4) відповідно отримаємо

$$R_m(\alpha_2(t_k), t_A) + \int_{t_A}^{t_k} \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} \left[a_0 + a_2 \cos 2(\alpha_2(t_k) - \theta)\right]\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}(\xi)]\,\varphi'_\xi(\theta, \xi)\, d\theta d\xi +$$

$$+ a_3 \int_{t_A}^{t_k} \Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}(\xi)]\varphi'_\xi(\alpha_2(t_k), \xi)\, d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t_k)\cos 2[\alpha_2(t_k) - \Phi(t_k)], \tag{15}$$

$$R_m(\alpha_2(t_k + \Delta t_k), t_A) + \int_{t_A}^{t_k + \Delta t_k} \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} \left[a_0 + a_2 \cos 2(\alpha_2(t_k + \Delta t_k) - \theta)\right] \times$$

$$\times\, \Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}(\xi)]\varphi'_\xi(\theta, \xi)\, d\theta d\xi + a_3 \int_{t_A}^{t_k + \Delta t_k} \Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}(\xi)]\varphi'_\xi(\alpha_2(t_k + \Delta t_k), \xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} S(t_k + \Delta t_k)\cos 2[\alpha_2(t_k + \Delta t_k) - \Phi(t_k + \Delta t_k)]. \tag{16}$$

Кожен з інтегралів у лівій частині (16) розіб'ємо на суму двох, по проміжках інтегрування $[t_A, t_k]$, $[t_k, t_k + \Delta t_k]$, і розглянемо різницю ΔR_m рівнянь (16) та (15). З точністю до малих величин Δt першого порядку маємо

$$\alpha_2(t_k + \Delta t_k) \approx \alpha_2(t_k) + \Delta\alpha_2^{(k)}, \qquad \alpha(t_k + \Delta t_k) \approx \alpha(t_k) + \Delta\alpha^{(k)},$$

$$\cos 2(\theta - \alpha_2^{(k)}(t_k + \Delta t_k)) \approx \cos 2(\theta - \alpha_2(t_k)) - 2\sin 2(\theta - \alpha_2(t_k))\Delta\alpha_2^{(k)}.$$

Якщо тепер різницю ΔR_m розвинути в ряди за малими Δt_k, $\Delta\alpha_2^{(k)}$, $\Delta\alpha^{(k)}$, то із вказаною вище точністю отримаємо

$$f_1(\alpha_2, \alpha)\Delta\alpha + f_2(\alpha_2, \alpha)\Delta\alpha_2 = \left[a_0 L_1(\alpha_2, \alpha) + a_2 L_2(\alpha_2, \alpha)\right]\Delta t. \tag{17}$$

Тут позначено

$$f_1(\alpha_2,\alpha) = 2\tau_S a_3 \frac{(a_3 + 2a_0\alpha)\cos 2\alpha_2 - 2a_0 \sin 2\alpha}{[(a_3 + 2a_0\alpha)\cos 2\alpha - 2a_0 \sin 2\alpha]^2} \sin 2\alpha ,$$

$$f_2(\alpha_2,\alpha) = 2a_2 L(\alpha_2,\alpha) - 2\tau_S a_3 \frac{\sin 2\alpha_2}{(a_3 + 2a_0\alpha)\cos 2\alpha - 2a_0 \sin 2\alpha} ,$$

$$L = \int_{t_A}^{t} \{A_1[\alpha \sin 2\alpha + 0.125(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)] \cos(\vartheta - 2\chi - 2\Phi_0) +$$

$$+ B_1[\alpha \cos 2\alpha - 0.125(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)] \sin(\vartheta - 2\chi - 2\Phi_0) +$$

$$+ 0.5(1 - \cos 4\alpha) C_1 \cos(\vartheta - 2\chi - 2\Phi_0)\} \, d\xi ,$$

$$L_1 = [A_1 \sin 2\alpha + 2C_1\alpha] \cos(\vartheta - 2\chi - 2\Phi_0) ,$$

$$L_2 = A_1[\alpha \cos 2(\alpha - \chi) + 0.125(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)] \cos(\vartheta - 2\chi - 2\Phi_0) +$$

$$+ B_1[\alpha \sin 2(\alpha - \chi) - 0.125(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)] \sin(\vartheta - 2\chi - 2\Phi_0) ,$$

індекс «(k)» при величинах $\alpha_2^{(k)}$, $\alpha^{(k)}$, $\Delta\alpha_2^{(k)}$, $\Delta\alpha^{(k)}$, t_k, Δt_k пропущено.

Система рівнянь (12), (17) разом з початковими умовами (13) є достатньою для визначення меж напрямків зсуву $-\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ у довільний момент часу $t > t_A + 0$ немонотонного навантаження по другій ланці траєкторії OAB (рис. 1). Спрямувавши $\Delta t \to 0$, зазначену систему рівнянь можна записати в такій диференціальній формі:

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{a_0 L_1(\alpha_2,\alpha) + a_2 L_2(\alpha_2,\alpha)}{f_1(\alpha_2,\alpha) B(\alpha_2,\alpha) + f_2(\alpha_2,\alpha)}, \qquad \dot{\alpha} = B(\alpha_2,\alpha)\dot{\alpha}_2 , \tag{18}$$

$$B(\alpha_2,\alpha) = \left\{1 - \left[\frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{A_1}{B_1}\right) - \frac{\operatorname{tg}(\vartheta - 2\alpha_2 + 2\alpha - \Phi_0)}{\cos^2 2\alpha}\right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\cos^2(\vartheta - 2\alpha_2 + 2\alpha - \Phi_0)}{\operatorname{tg} 2\alpha} \right\}^{-1} .$$

Отже, задачу про визначення меж зсуву $\mp\alpha_{1,2}(t)$ зведено до задачі Коші для диференціальних рівнянь (18) з початковими умовами (13). Числову реалізацію її розв'язку наведемо на прикладі дволанкової траєкторії, зображеної на рис. 2. У цьому випадку треба покласти $\Phi_0 = 0$, $\vartheta(t) \equiv \beta = \text{const}$.

Розіб'ємо ділянку AB траєкторії навантаження точками A_k на n рівних частин Δt, $k = 0, 1, \ldots, n$, також позначимо $A_0 = A$, $A_n = B$. Розглянемо систему (18) у момент часу $t_k = t_A + k\Delta t$, що відповідає точці A_k. Надаючи малий приріст Δt із точки A_k в точку A_{k+1}, одержимо

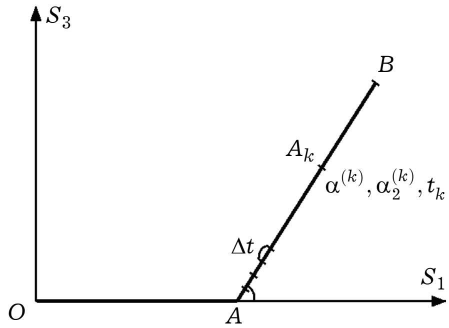

Рис. 2

$$\Delta\alpha_2^{(k)} = \frac{a_0 L_1(\alpha_2^{(k)}, \alpha^{(k)}) + a_2 L_2(\alpha_2^{(k)}, \alpha^{(k)})}{f_1(\alpha_2^{(k)}, \alpha^{(k)}) B(\alpha_2^{(k)}, \alpha^{(k)}) + f_2(\alpha_2^{(k)}, \alpha^{(k)})} \Delta t ,$$

$$\Delta\alpha^{(k)} = B(\alpha_2^{(k)}, \alpha^{(k)}) \, \Delta\alpha_2^{(k)} . \tag{19}$$

Співвідношення (19) є рекурентними формулами, які дозволяють послідовно визначити значення шуканих функцій $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ у будь-якій точці A_{k+1} за відомими їх значеннями в точці A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\alpha_2^{(k+1)} = \alpha_2^{(k)} + \Delta\alpha_2^{(k)} = \alpha_2^0 + \sum_{i=1}^{k} \Delta\alpha_2^{(i)} ,$$

$$\alpha_1^{(k+1)} = 2\alpha^{(k+1)} - \alpha_2^{(k+1)} = 2\alpha^0 + \sum_{i=1}^{k} \Delta\alpha^{(i)} - \alpha_2^{(k)} . \tag{20}$$

На основі формули (7) і розв'язку (20) визначимо прирости компонент вектора швидкості плоскопластичної деформації. Для довільної точки A_k отримаємо

$$\Delta\Gamma_1^{(p)(k)} = \frac{1}{\Pi_0^{(k)}} \{ B_{11}(\alpha^{(k)}) \cos(\beta - 2\chi^{(k)}) \cos 2\chi^{(k)} -$$

$$- B_{12}(\alpha^{(k)}) \sin(\beta - 2\chi^{(k)}) \sin 2\chi^{(k)} \} \Delta t ,$$

$$\Delta\Gamma_3^{(p)(k)} = \frac{1}{\Pi_0^{(k)}} \{ B_{11}(\alpha^{(k)}) \cos(\beta - 2\chi^{(k)}) \sin 2\chi^{(k)} +$$

$$+ B_{12}(\alpha^{(k)}) \sin(\beta - 2\chi^{(k)}) \cos 2\chi^{(k)} \} \Delta t ,$$

$$\Pi_0^{(k)} = \Pi_0 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, \Gamma^{(p)(k)} \right), \qquad \Gamma^{(p)(k)} = \sqrt{\left[\Gamma_1^{(p)(k)}\right]^2 + \left[\Gamma_3^{(p)(k)}\right]^2} . \tag{21}$$

Отже, знову маємо рекурентні співвідношення, які дозволяють виразити невідомі значення шуканих величин для точки A_{k+1} через вже знайдені в момент часу t_k:

$$\Gamma_{1,3}^{(p)(k+1)} = \Gamma_{1,3}^{(p)(k)} + \Delta\Gamma_{1,3}^{(p)(k)} = \Gamma_{1,3}^{(p)(0)} + \sum_{i=1}^{k} \Delta\Gamma_{1,3}^{(p)(i)} , \tag{22}$$

$$\Gamma_1^{(p)(0)} = \Gamma_A^{(p)}, \quad \Gamma_3^{(p)(0)} = 0 .$$

Варто зазначити, що оскільки одержані вище результати для немонотонної плоскопластичної деформації не залежать від орієнтації вектора $\mathbf{S}$ і, отже, задовольняють постулат ізотропії Ільюшина, то їх можна узагальнити на випадок довільних плоских траєкторій навантаження в п'ятивимірному девіаторному просторі напружень. Зокрема, при крученні з розтягом тонкостінної трубки (σ_x, τ_{xy}, ε_x, $\varepsilon_{xy} \ne 0$ – плоский напружений стан) маємо такі не рівні нулеві компоненти векторів $\mathbf{S}$ та $\mathbf{\Gamma}$:

$$S_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \sigma_x, \qquad S_3 = \sqrt{2}\, \tau_{xy}, \qquad \Gamma_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \varepsilon_x, \qquad \Gamma_3 = \sqrt{2}\, \varepsilon_{xy} ,$$

і у формулах попереднього параграфа потрібно зробити заміни $S_1 \to S_2$ та $\Gamma_1 \to \Gamma_2$.

4. Побудуємо функцію пластичності $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$, що входить у вихідні рівняння (1), (2), для випадку активних процесів ($\dot{\varepsilon}_i^{(p)} \ge 0$) пластичного деформування. Зокрема, такою є деформація при простому навантаженні.

На рис. 3 показано залежності між напруженнями та деформаціями, одержаними в експерименті [2] для сталі-45 при одноосьовому розтязі (світлі кружечки) і чистому зсуві (темні кружечки) в перерахунку на інтенсивність деформацій (ε_i) і безрозмірну інтенсивність напружень (σ_i/k_T). Відповідні точки побудовано за усередненими експериментальними даним при випробуванні 3-х тонкостінних зразків окремо на розтяг ($k_T = \sigma_T = 220$ МПа) і кручення ($k_T = \sqrt{3}\,\tau_T = 210\,\text{МПа}$). Задовільна апроксимація усередненої експериментальної залежності $\sigma_i/k_T \sim \varepsilon_i$ для сталі-45 задається формулою

$$\frac{\sigma_i}{k_T} = 1 - \frac{c_1}{k_T} + \frac{c_2}{k_T}(\varepsilon_i - \varepsilon_T + c_3)^n \tag{23}$$

при $c_1 = 1125\,\text{МПа}$, $c_2 = 1360\,\text{МПа}$, $c_3 = 0.023$, $n = 0.05$. На рис. 3 цій апроксимації відповідає суцільна лінія. Подання залежності (23) у безрозмірному вигляді дозволяє в значній мірі врахувати різницю в діаграмах $\sigma_i \sim \varepsilon_i$, одержаних в експерименті [2] на одноосьовий розтяг та чистий зсув, і при простому навантаженні наближено вважати залежність $\sigma_i/k_T \sim \varepsilon_i$ універсальною.

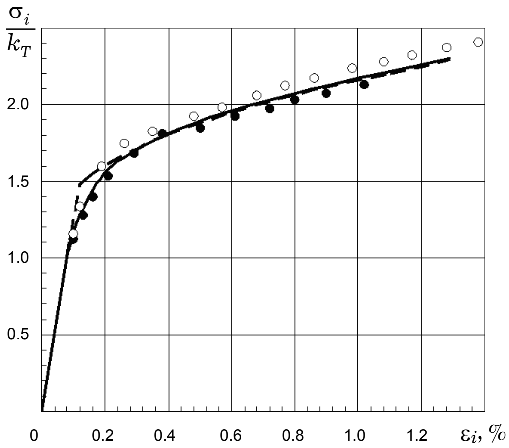

Рис. 3

Визначення функції пластичності проведемо методом послідовних наближень. У першому наближенні розглянемо випадок лінійної моделі середовища [3], в рамках якої приймається

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] \equiv K = \text{const}.$$

Показано [4], що в цьому випадку залежності (8) і (9) при монотонному, зокрема пропорційному, навантаженні можна проінтегрувати та записати в кінцевому вигляді:

$$K\Gamma^{(p)} = \Omega(S)\mathbf{S}, \qquad \Omega(S) = \frac{1}{2}\frac{\alpha - 0.25\sin 4\alpha}{a_3 + a_2(\alpha - 0.25\sin 4\alpha)}. \tag{24}$$

Якщо далі врахувати зв'язок

$$S = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_i, \qquad \Gamma^{(p)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\varepsilon_i^{(p)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E_i}\right),$$

то для теоретичної залежності $\sigma_i/k_T \sim \varepsilon_i$ в першому наближенні остаточно можемо записати

$$\frac{\sigma_i}{k_T} = \left[\frac{k_T}{E_i} + \frac{(\alpha - 0.25\sin 4\alpha)/3K}{a_3 + a_2(\alpha - 0.25\sin 4\alpha)}\right]^{-1}\varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \ge \varepsilon_T. \tag{25}$$

Тут функція $\alpha = \alpha(\sigma_i/k_T)$ визначається рівнянням (10), яке перепишемо так:

$$\frac{a_3 + a_2(\alpha - 0.25\sin 4\alpha)}{(a_3 + 2a_0\alpha)\cos 2\alpha - a_0\sin 2\alpha} = \frac{\sigma_i}{k_T}. \tag{26}$$

Шляхом мінімізації середньоквадратичних відхилень між точками експериментальної діаграми $\sigma_i/k_T \sim \varepsilon_i$ (23) та теоретичної (25) знаходимо значення $\Pi_0 \equiv K = \text{const}$ та коефіцієнти a_0, a_3 функції зміцнення $F(\omega)$:

$$K = 4.11\,\text{Мпа}, \qquad a_0 = 12.6, \qquad a_3 = 3.47. \tag{27}$$

Оскільки $F(\omega)$ визначається з точністю до адитивної сталої, то коефіцієнт a_2 покладено рівним одиниці. Коефіцієнт a_4 є одним з основних при визначенні ефекту Баушінгера, але він не впливає на функцію пластичності Π_0 при активних процесах деформування ($\dot{\varepsilon}_i^{(p)} \ge 0$) і тому його значення тут не наводимо.

Теоретичну криву $\sigma_i/k_T \sim \varepsilon_i$, побудовану за формулами (25)–(27), зображено на рис. 3 пунктирною лінією. Співставлення наведених тут результатів свідчить, що лінійна модель $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] \equiv K = \text{const}$ задовільно описує експериментальну залежність $\sigma_i/k_T \sim \varepsilon_i$ сталі-45 для значень деформацій $(4\div5)\,\varepsilon_T$ і більших. У випадку малих пластичних деформацій, сумірних з пружними на границі текучості, розбіжність за деформаціями може сягати величини порядку 40%. Крім цього, при переході з пружної у пластичну область деформування дотичний модуль $E_{it} = d\sigma_i/d\varepsilon_i$ на зазначеній кривій має розрив першого роду, величина якого досягає 690%. Розрив є недопустимим з фізичної точки зору, більше того, він закладається лінійними моделями [2, 3] у визначальні рівняння зв'язку $\dot{\varepsilon}_{mn} \sim \dot{\sigma}_{mn}$ і в остаточному підсумку призводить до парадоксу в теорії стійкості.

Для визначення функції пластичності $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$ у другому наближенні використаємо формули (9) і (23). З них відповідно можна одержати такі два вирази:

$$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \left[\frac{1}{E_i} + \frac{2B_{11}(\alpha)}{3\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]}\right]^{-1}, \qquad \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = c_2 n(\varepsilon_i - \varepsilon_T + c_3)^{n-1}, \tag{28}$$

де $B_{11}(\alpha)$ визначається формулою (7), а $\alpha = \alpha(\sigma_i/k_T)$ – рівнянням (26).

З першої з формул (28) отримуємо дотичний модуль $E_{it} = d\sigma_i/d\varepsilon_i$ теоретичної діаграми $\sigma_i/k_T \sim \varepsilon_i$, а з другої – експериментальної. Прирівнюючи ці модулі між собою, одержимо

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{c_2 n(\varepsilon_i - \varepsilon_T + c_3)^{n-1}} - \frac{1}{E_i}\right)^{-1} B_{11}(\alpha). \tag{29}$$

Задовільну апроксимацію функції пластичності (29) отримаємо за формулою

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] = d_1 + d_2(\varepsilon_i^{(p)})^{-r} \tag{30}$$

при $d_1 = -0.56$ МПа, $d_1 = 3.15$ МПа, $r = 0.29$. Графік цієї функції показано на рис. 4. Її значення $\Pi_0[0] = \infty$ забезпечує неперервність дотичного модуля на межі текучості ($\sigma_i = \sigma_T$). Теоретична діаграма $\sigma_i/k_T \sim \varepsilon_i$, побудована з використанням функції $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$ (30), по суті, співпадає з експериментальною, наведеною на рис. 3 суцільною лінією.

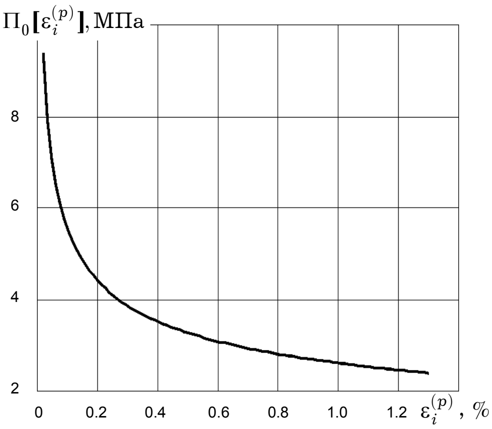

Рис. 4

5. Для встановлення міри адекватності варіантів теорії ковзання [2, 5] експерименту при складному навантаженні використаємо наведені в [2] дані, одержані при крученні з розтягом тонкостінних трубчатих зразків сталі-45 по дволанкових траєкторіях. Методика проведення експерименту та підготовки до випробування зразків детально описані в [2].

Експериментальні дані приросту деформацій від довантаження крутним моментом при постійній розтягувальній силі $\sigma_x/k_T = 1.72$ на рис. 5*а* показано світлими кружечками, хрестиками і трикутниками. Позначки у вигляді темних кружечків відповідають усередненим даним, одержаним для трьох зразків за однією і тією самою програмою їх навантаження. Пунктирну та суцільну криві побудовано на основі теорій пластичності [2] і [5] відповідно. На рис. 5, 6 позначено $\gamma_{xy}^{*} = \gamma_{xy}^{(p)}(t) - \gamma_{xy}^{(p)}(t_A)$, $\varepsilon_x^{*} = \varepsilon_x^{(p)}(t) - \varepsilon_x^{(p)}(t_A)$, де параметр t_A відповідає точці зламу траєкторії навантаження.

Аналогічні дані приросту деформації від довантаження розтягувальною силою при сталому крутному моменті $\sqrt{3}\,\tau_{xy}/k_T = 1.775$ наведено на рис. 5б.

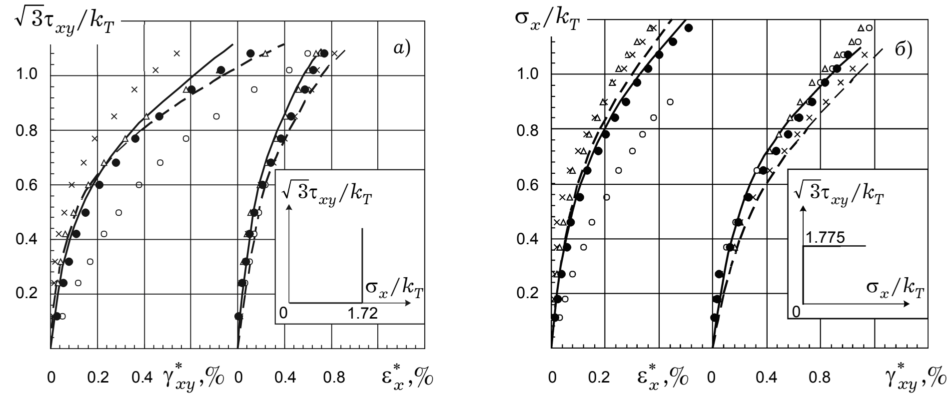

Рис. 5

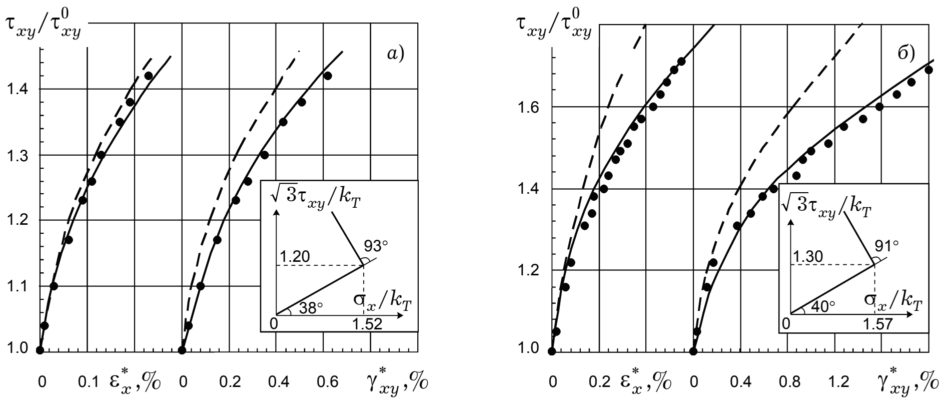

Рис. 6

Співставлення експериментальних і теоретичних результатів по дволанкових траєкторіях OAB ($\tau_{xy}^{0} = \tau_{xy}(t_A)$), повернутих відносно координатних осей на кути 40° і 38° відповідно, ілюструє рис. 6. Темні кружечки − експеримент, пунктирні та суцільні криві побудовано на основі теорій пластичності [2] і [5] відповідно.

Як зазначають самі автори роботи [2], відповідність теорії експерименту при складному навантаженні значною мірою залежить від того, наскільки точно є апроксимовані діаграми зміцнення при простому навантаженні. Ця проблема, що є суттєвою для лінійної [3] і квазілінійної [2] моделей, в нелінійній моделі [5] усувається введенням функції пластичності Π. Цим, у першу чергу, можна пояснити переваги варіанта теорії ковзання [5] при описі одержаної в експерименті [2] деформації сталі-45 як при простому, так і при складних типах навантаження.

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
2. *Леонов М. Я., Рычков Б. А.* Развитие концепции скольжения в теории пластичности // Физ.-хим. механика материалов. – 1982. – № 4. – С. 3–12.
3. *Леонов М. Я., Швайко Н. Ю.* Сложная плоская деформация // Докл. АН СССР. – 1964. – **159**, № 2. – С. 1007–1010.
4. *Швайко М. Ю.* До теорії пластичності, заснованої на концепції ковзання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 114–124.
5. *Швайко Н. Ю.* К теории пластичности, основанной на концепции скольжения // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 11. – С. 12–24.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ СТАЛИ-45 ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Исследуется возможность использования вариантов теории скольжения [2] *и* [5] *для описания немонотонной деформации стали-45 при нагружении по двухзвенным траекториям* (*растяжение с кручением тонкостенной трубки*). *Сопоставление экспериментальных и теоретических данных подтверждает некоторое преимущество варианта теории пластичности* [5]. *Это преимущество проявляется в условиях как сложного, так и простого нагружения, особенно в пределах малых пластических деформаций, соизмеримых с упругими на границе текучести.*

ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF DEFORMATION OF STEEL-45 UNDER COMPLEX LOADING

Potentialities of the sliding theory versions [2, 5] *for description the steel 45 non-monotonous deformation under loading along two-linked trajectories* (*tension-torsion of the thin-walled tube*) *are studied. The advantage of version* [5] *is confirmed confronting the experimental data to the theoretical ones. This advantage becomes apparent both under complex and simple loading, especially within small plastic strains comparable to elastic strains on the yield limit.*

Дніпропетр. нац. ун-т, Дніпропетровськ

Одержано
11.01.06