

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА СФЕРИЧНА ОБОЛОНКА З СИСТЕМОЮ ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНИХ ТРІЩИН

Задача про граничну рівновагу сферичної оболонки з довільно розміщеними прямолінійними в плані наскрізними тріщинами зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно сумісно з умовами обмеженості зусиль і моментів біля тріщин та умовами пластичності тонких оболонок. Як приклад розглянуто оболонку з чотирма тріщинами.

Розробці теорії і методів розв'язування задач про напружено-деформований стан і граничну рівновагу оболонок з тріщинами присвячено значну кількість робіт вітчизняних і зарубіжних авторів. Досить повний їх перелік та аналіз наведено в монографіях [5, 6, 10, 13, 14] та оглядових статтях [4, 7, 9, 15, 16]. Аналіз опублікованих робіт показує, що значна більшість досліджень проведена без урахування зон пластичного деформування біля вершин тріщин. Досліджень напруженого стану та граничної рівноваги пружно-пластичних оболонок з тріщинами відносно мало. При цьому розглянуто оболонки, ослаблені, зазвичай, однією тріщиною. У цій роботі розглянуто оболонку, ослаблену системою довільно орієнтованих прямолінійних в плані тріщин.

Розглянемо пружно-пластичну ізотропну безмежну сферичну оболонку, ослаблену системою k довільно орієнтованих прямолінійних в плані тріщин, які не перетинаються. Під терміном безмежна розуміємо таку оболонку, границі якої розміщені настільки далеко, що не впливають на збурений напружений стан, зумовлений наявністю тріщин. Вважатимемо, що оболонка знаходиться під дією зовнішнього навантаження і до берегів кожної тріщини прикладені рівні за величиною і протилежно напрямлені зусилля та моменти так, що під час деформування оболонки береги тріщин не контактують. Приймаємо, що матеріал оболонки є ідеально пружно-пластичним або зі зміцненням. Властивості матеріалу, величину навантаження і розміри тріщин вважатимемо такими, що на їх продовженні вузькою смугою по всій товщині оболонки розвиваються пластичні деформації. Поза цими зонами матеріал пружний. Відповідно з аналогом δ_c -моделі [5, 8] замінимо зони пластичних деформацій поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію зони пластичних деформацій на пружний об'єм – невідомими зусиллями та моментами, що протидіють розкриттю тріщини. Тобто пружно-пластичну задачу про граничну рівновагу сферичної оболонки з системою k тріщин заданої довжини зводимо до задачі про пружну рівновагу аналогічної оболонки з системою k фіктивних тріщин невідомої довжини, до берегів яких, крім заданих, прикладені невідомі зусилля і моменти, що задовольняють відповідні умови пластичності тонких оболонок [12].

Віднесемо серединну поверхню розглядуваної оболонки до декартової системи координат xOy . Крім цього, за аналогією з [13], на кожній тріщині введемо локальну систему координат $x_m O_m y_m$, $m = 1, \dots, k$, початок якої помістимо в центрі тріщини, а вісь $O_m x_m$ спрямуємо вздовж лінії тріщини. Координати центрів тріщин в базовій системі координат xOy позначимо через (x_m^0, y_m^0) , а кути між осями Ox і $O_m x_m$ – через β_m . Позначимо довжину кожної тріщини через l_m , $m = 1, \dots, k$, а фіктивної – через l_m^1 . При цьому $l_m^1 = l_m + l_m^{(2)} + l_m^{(3)}$, де $l_m^{(2)}$, $l_m^{(3)}$ – довжина пластичних зон біля лівої і правої вершин m -ї тріщини.

Розглянемо спочатку безмежну сферичну оболонку з однією ізольованою прямолінійною в плані тріщиною $l_m^{(1)}$. Позначимо компоненти зусиль і моментів, що виникли в оболонці з тріщиною під дією заданого навантаження за певних граничних умов, через $N_r^1, S_r^1, M_r^1, H_r^1, Q_r^1$ – нормальне та зсувне зусилля, згинний і крутний моменти та перерізує зусилля відповідно, які діють у нормальних перерізах оболонки $r = x_m = \text{const}$ або $r = y_m = \text{const}$. Через $N_r^0, S_r^0, M_r^0, H_r^0, Q_r^0$ позначимо відповідно компоненти зусиль і моментів основного напруженого стану, зумовленого тим самим навантаженням і за тих самих граничних умов в оболонці без тріщини. Тоді, враховуючи лінійність задачі, зусилля і моменти в оболонці з тріщиною можна зобразити у вигляді суми

$$G_r^1 = G_r^0 + G_r, \quad G = \{N, S, M, H, Q\},$$

де G_r – компоненти збуреного напруженого стану, зумовленого тріщиною. Ці компоненти характеризують концентрацію напружень біля тріщини.

Оскільки береги реальних тріщин, а значить, і фіктивних, завантажені самозрівноваженими зусиллями та моментами, то на контурі тріщини l_m^1 для компонент збуреного напруженого стану повинні виконуватись умови

$$P_i^+(x_m, 0) = P_i^-(x_m, 0) = f_{im}(x_m), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (1)$$

Тут

$$f_{im}(x_m) = \begin{cases} P_i^1(x_m) - P_i^0(x_m) & \forall x_m : x_m \in l_m, \\ -P_i^0(x_m) + P_i^{(2)} & \forall x_m : x_m \in l_m^{(2)}, \\ -P_i^0(x_m) + P_i^{(3)} & \forall x_m : x_m \in l_m^{(3)}, \end{cases}$$

$$P_1 = N_2, \quad P_2 = M_2, \quad P_3 = S_{21}^*, \quad P_4 = Q_2^*,$$

індексами «0» і «1» позначено компоненти відповідно основного напруженого стану та напруженого стану оболонки з тріщиною; знаками «+» і «-» – граничні значення функції на берегах $y_m + 0$ та $y_m - 0$; $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ відповідають невідомим зусиллям і моментам у пластичних зонах, які задовольняють відповідні умови пластичності тонких оболонок; S_{21}^* , Q_2^* – узагальнені за Кірхгофом зсувне та перерізує зусилля [2].

На основі теорії оболонок з власними (залишковими) напруженнями [1] та методу дисторсій в теорії оболонок з тріщинами [11] запишемо систему ключових рівнянь для сферичної оболонки з прямолінійною в плані довільно орієнтованою тріщиною $|x_m| \leq l_m^1$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi_m - \frac{D_0}{R} \nabla^2 w_m &= -D_0 F_{1m}^0(x_m, y_m), \\ \nabla^2 \nabla^2 w_m - \frac{1}{D_1 R} \nabla^2 \varphi_m &= -F_{2m}^0(x_m, y_m), \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} F_{1m}^0 &= \{\partial_1^2 [v_m(x_m)] - \partial_1 \partial_2 [u_m(x_m)]\} \delta(y_m), \\ F_{2m}^0 &= (v \partial_1^2 + \partial_2^2) \{\theta_{2m}(x_m)\} + [w_m(x_m)] \partial_2 \delta(y_m) + \\ &+ 2(1 - \nu) \partial_1 \partial_2 [w_m(x_m)] \delta(y_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \partial_1^2 + \partial_2^2, & \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial x_m}, & \partial_2 &= \frac{\partial}{\partial y_m}, \\ D_0 &= 2Eh, & D_1 &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, & \theta_{2m} &= \partial_2 w_m, \\ [\Psi(x_m)] &= \Psi^+(x_m, +0) - \Psi^-(x_m, -0) & \forall x_m &: x_m \in l_m^1, \\ [\Psi(x_m)] &= 0 & \forall x_m &: x_m \notin l_m^1, & \Psi &= \{u_m, v_m, w_m, \theta_m\},\end{aligned}$$

R – радіус, а u_m, v_m, w_m – компоненти переміщення серединної поверхні оболонки, $\delta(y_m)$ – функція Дірака, E – модуль пружності, $2h$ – товщина оболонки, ν – коефіцієнт Пуассона.

Зусилля та моменти визначаються через ключові функції $\varphi_m(x, y)$, $w_m(x, y)$ за допомогою формул

$$\begin{aligned}N_{1m} &= -\partial_2^2 \varphi_m, & N_{2m} &= -\partial_1^2 \varphi_m, & S &= \partial_1 \partial_2 \varphi_m, \\ M_{1m} &= -D_1(\partial_1^2 w_m + \nu \partial_2^2 w_m + \nu [\theta_{2m}(x_m)] \delta(y_m)), \\ M_{2m} &= -D_1(\nu \partial_1^2 w_m + \partial_2^2 w_m + [\theta_{2m}(x_m)] \delta(y_m)), \\ H_m &= -D_1(1-\nu)(\partial_1 \partial_2 w_m + [w_m(x_m)] \delta(y_m)), \\ Q_1 &= -D_1(\partial_1 \nabla^2 w_m + (\nu \partial_1 [\theta_{2m}(x_m)] + (1-\nu) \partial_2 [w_m(x_m)]) \delta(y_m)), \\ Q_2 &= -D_1(\partial_2 \nabla^2 w_m + (\partial_2 [\theta_{2m}(x_m)] + (1-\nu) \partial_1 [w_m(x_m)]) \delta(y_m)),\end{aligned}\quad (3)$$

а переміщення u_m та v_m точок серединної поверхні оболонки – із системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\partial_1 u_m &= -w_m(R^{-1} \cos^2 \beta_m + R^{-1} \sin^2 \beta_m) + D_0^{-1}(\partial_2^2 \varphi_m - \nu \partial_1^2 \varphi_m), \\ \partial_2 v_m &= -w_m(R^{-1} \sin^2 \beta_m + R^{-1} \cos^2 \beta_m) + \\ &+ D_0^{-1}(\partial_1^2 \varphi_m - \nu \partial_2^2 \varphi_m) + [v_m(x_m)] \delta(y_m), \\ \partial_2 u_m + \partial_1 v_m &= -2D_0^{-1}(1+\nu) \partial_1 \partial_2 \varphi_m + [u_m(x_m)] \delta(y_m).\end{aligned}$$

Позначимо через

$$q_m^* = q_m^*(x_m, y_m, u_m^0, v_m^0, w_m^0, \theta_{2m}^0), \quad q_m^* = \varphi_m^*, w_m^*, \quad (4)$$

фундаментальний розв'язок системи (2), тобто розв'язок системи диференціальних рівнянь (2), коли в правій частині цих рівнянь підставлені зосереджені в точці $x_m = s$ стрибки переміщень і кута повороту

$$\begin{aligned}[u_m(x_m)] &= u_m^0 \delta(x_m - s), & [v_m(x_m)] &= v_m^0 \delta(x_m - s), \\ [w_m(x_m)] &= w_m^0 \delta(x_m - s), & [\theta_{2m}(x_m)] &= \theta_{2m}^0 \delta(x_m - s).\end{aligned}$$

Цей розв'язок можна побудувати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Маючи розв'язок (4), ключові функції φ_m , w_m зобразимо у квадратах

$$\varphi_m(x_m, y_m) = \int_{l_m^1} \varphi_m^* \{x_m - s, y_m, [u_m], [v_m], [w_m], [\theta_{2m}]\} ds,$$

$$w_m(x_m, y_m) = \int_{l_m^1} w_m^* \{x_m - s, y_m, [u_m], [v_m], [w_m], [\theta_{2m}]\} ds. \quad (5)$$

За допомогою співвідношень (5) та формул (3) знаходимо вирази для зусиль і моментів $N_{1m}, N_{2m}, S_m, M_{1m}, M_{2m}, H_m, Q_{1m}, Q_{2m}$ в довільній точці оболонки, спричинених стрибками переміщень і кутів повороту вздовж фіктивної тріщини l_m^1 . Маючи ці вирази, зусилля і моменти на довільній площинці, що утворює з лінією m -ї тріщини деякий кут β_{nm} , $\beta_{nm} = \beta_n - \beta_m$, визначимо за допомогою формул

$$\begin{aligned} N_{nm} &= N_{1m} \sin^2 \beta_{nm} + N_{2m} \cos^2 \beta_{nm} - S_m \sin 2\beta_{nm}, \\ S_{nm} &= \frac{1}{2}(N_{2m} - N_{1m}) \sin 2\beta_{nm} + S_m \cos 2\beta_{nm}, \\ M_{nm} &= M_{1m} \sin^2 \beta_{nm} + M_{2m} \cos^2 \beta_{nm} - H_m \sin 2\beta_{nm}, \\ H_{nm} &= \frac{1}{2}(M_{2m} - M_{1m}) \sin 2\beta_{nm} + H_m \cos 2\beta_{nm}, \\ Q_{nm} &= -Q_{1m} \sin \beta_{nm} + Q_{2m} \cos \beta_{nm}. \end{aligned} \quad (6)$$

На основі формул (6) можна визначити зусилля і моменти на лінії n -ї тріщини l_n^1 , зумовлені стрибками переміщень і кутів повороту на тріщині l_m^1 , використовуючи для цього зв'язок між локальними системами координат

$$\begin{aligned} x_m &= (x_n^0 - x_m^0) \cos \beta_m + (y_n^0 - y_m^0) \sin \beta_m + x_n \cos \beta_{nm} - y_n \sin \beta_{nm}, \\ y_m &= (y_n^0 - y_m^0) \cos \beta_m - (x_n^0 - x_m^0) \sin \beta_m + x_n \sin \beta_{nm} + y_n \cos \beta_{nm}. \end{aligned}$$

Якщо підсумувати зусилля і моменти на лінії n -ї тріщини, зумовлені стрибками переміщень і кутів повороту кожної з k тріщин і вимагати, щоб ці сумарні величини задовольняли задані умови (1) на тріщині l_n^1 , то отримаємо систему 4-х інтегральних рівнянь відносно $4k$ невідомих функцій. Побудувавши такі рівняння для кожної із k тріщин, отримаємо систему $4k$ сингулярних інтегральних рівнянь для визначення $4k$ невідомих функцій, що характеризують стрибки переміщень і кутів повороту вздовж цих тріщин. Цю систему запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{l_n^1} \frac{\Psi_{in}(s) ds}{s - x_n} + \sum_{j=1}^4 \sum_{m=1}^n \int_{l_m^1} \Psi_{jm}(s) \mathcal{K}_{nm}^j(s, x_m) ds &= d_i f_{in}^*(x_n), \\ x_n \in l_n^1, \quad n &= 1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} f_{in}^* &= f_{in}, \quad n = 1, 2, 3, \quad f_{4n}^* = f_{4n} + C_n, \\ \Psi_{1n}(s) &= \frac{d}{ds} [v_n(s)], \quad \Psi_{2n}(s) = \frac{d}{ds} [u_n(s)], \\ \Psi_{3n}(s) &= -Rc \frac{d}{ds} [\Theta_{2n}(s)], \quad \Psi_{4n}(s) = \frac{d}{ds} \left[\frac{dw_n(s)}{ds} \right], \quad c = \frac{h^2}{R^2 \sqrt{3(1-v^2)}}, \end{aligned}$$

$\mathcal{K}_{nm}^j(s, x_n)$ – неперервні для всієї множини дійсних значень s, x_n функції; d_i – задані постійні величини; C_n – константи інтегрування.

Розв'язки системи (7) повинні задовольняти умови

$$\int_{l_n^1} \psi_{in}(s) ds = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \iint_{l_n^1} \psi_{4n}(s) ds ds = 0, \quad n = 1, \dots, k, \quad (8)$$

які забезпечують однозначність переміщень і кутів повороту у вершинах фіктивних тріщин.

Зауважимо, що в системі інтегральних рівнянь (7) невідомі границі інтегрування, оскільки невідомі розміри пластичних зон, а значить і довжини фіктивних тріщин. Крім того функції $f_{in}^*(x_n)$ містять невідомі $N_m^{(i)}$, $S_m^{(i)}$, $M_m^{(i)}$, $Q_m^{(i)}$, $i = 2, 3$, що діють на берегах фіктивних тріщин, як реакція пластичних зон на пружний матеріал оболонки. Отже, для побудови розв'язку, систему (7) потрібно доповнити деякими умовами. Природно, що такими умовами, які повинні задовольняти $N_m^{(i)}$, $S_m^{(i)}$, $M_m^{(i)}$, $Q_m^{(i)}$, $i = 2, 3$, є умови пластичності та умови обмеженості напружень в пластичних зонах (біля вершин фіктивних тріщин).

Розв'язок системи (7) будемо будувати за допомогою узагальнення [6] запропонованого раніше [3] варіанту методу механічних квадратур для розв'язку одного рівняння. Функції $f_{in}^*(x_n)$, що містяться в правих частинах системи (7), мають розрив у точках $s = x_n^*$ (x_n^* – координати вершини реальної тріщини). Порівняння аналітичних розв'язків системи канонічних сингулярних рівнянь, що відповідає системі (7) ($\mathcal{K}_{nm}^j(s, x_n) = 0$) з відповідними розв'язками, отриманими за допомогою методу механічних квадратур, показало, що використання цього методу безпосередньо до систем з розривними правими частинами призводить до значних похибок розв'язку в околі точок $s = x_n^*$, де поведінка останнього нас найбільше цікавить. Тому при побудові розв'язків систем типу (7) застосуємо метод, запропонований в роботі [17] для одного рівняння аналогічного типу. З цією метою шукані функції ψ_{jm} зобразимо у вигляді суми

$$\psi_{jm}(s) = h_{jm}(s) + F_{jm}(s). \quad (9)$$

Тут $h_{jm}(s)$ – розв'язок канонічної системи рівнянь

$$\int_{l_n^1} \frac{h_{in}(s) ds}{s - x_n} = d_i f_{in}^*(x_n), \quad x_n \in l_n^1, \quad n = 1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (10)$$

який знаходимо за допомогою формули обернення інтегралів типу Коші [5] та він задовольняє умови типу (8).

Підставляючи (9) в (7) з урахуванням (10), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь для знаходження $F_{jm}(s)$. Отримана система має вигляд (7), але з неперервними правими частинами.

Систему ключових рівнянь сферичної оболонки (2), яка враховує наявність тріщини, зведемо до одного рівняння для визначення функції прогинів

$$\nabla^2(\nabla^2 \nabla^2 + \gamma_0^4) w_m = R \gamma_0^4 F_{1m}^0(x_m, y_m) - \nabla^2 F_{2m}^0(x_m, y_m) \quad (11)$$

та співвідношення на функцію напружень

$$\phi_m(x_m, y_m) = -DR(\nabla^2 w_m + F^*(x_m, y_m)),$$

де

$$\nabla^2 F^*(x_m, y_m) = F_2^0(x_m, y_m), \quad \gamma_0^4 = D_0 / (DR^2).$$

Фундаментальний розв'язок рівняння (11) наведено в [5].

Як **приклад** розглянемо граничну рівновагу сферичної оболонки, ослабленої чотирма рівновіддаленими від початку координат xOy тріщинами однакової довжини $2l_0$, які утворюють з віссю Ox кути $\beta_n = 2\pi/k(n-1)$, $n = 1, \dots, 4$, $k = 4$. Нехай оболонка перебуває під дією внутрішнього тиску інтенсивності q . Береги тріщин вільні від навантаження ($P_i^1(x_m) = 0$, $i = 1, \dots, 4$). З компонент основного напруженого стану відмінним від нуля буде тільки $N_2^0 = qR/2$. Тоді всі тріщини перебувають в однакових умовах. Невідомі зони пластичних деформацій біля всіх тріщин однакові та дорівнюють $l^{(2)}$ біля ближчих (до початку координат) вершин тріщин і $l^{(3)}$ – біля віддалених. Із зусиль і моментів, що діють у пластичній зоні, відмінними від нуля будуть $N^{(2)}, N^{(3)}, M^{(2)}, M^{(3)}$. Тому із системи (7) отримуємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь для знаходження невідомих стрибків переміщення v і кута повороту θ_2 :

$$\sum_{n=1}^2 \int_{-1}^1 \Psi_n(s) \mathcal{K}_{in}(x, s) ds = f_i^*(x), \quad i = 1, 2, \quad |s| < 1,$$

де

$$\begin{aligned} \Psi_1(s) &= \frac{d}{ds} [v(s)], & \Psi_2(s) &= -\frac{d}{ds} [\theta_2(s)], \\ \mathcal{K}_{ii} &= \sum_{n=1}^2 \left[-\frac{d_i}{z_k} + \mathcal{K}_{ii}^0(z_k) \right] + 2\mathcal{K}_{ii}^0(s, t), & \mathcal{K}_{13} &= \sum_{n=1}^2 \mathcal{K}_{13}^0(z_k) + 2\mathcal{K}_{13}^0(s, t), \\ \mathcal{K}_{31} &= \sum_{n=1}^2 \mathcal{K}_{13}^0(z_k) + 2\mathcal{K}_{31}^0(s, t), & \mathcal{K}_{ii}^0(s, t) &= \varphi_i(s, t); \\ \mathcal{K}_{13}^0(s, t) &= (1-v)\varphi_2(s, t) - \lambda \operatorname{kei}'(\lambda\rho) \frac{s}{\rho} - \lambda^2 \int_1^{-s} \operatorname{ker}'(\lambda\rho) d\rho, \\ \mathcal{K}_{31}^0(s, t) &= (1-v)\varphi_2(s, t) - \lambda \operatorname{kei}'(\lambda\rho) \frac{s}{\rho}, \\ \mathcal{K}_{33}^0(s, t) &= -(1-v)^2\varphi_1(s, t) - v\lambda^2 \int_t^{-s} \operatorname{kei}'(\lambda\rho) d\rho, \\ \rho^2 &= s^2 + t^2, & s &= -\left(\xi + \frac{d}{l_1}\right), & t &= \frac{x}{l} + \frac{d}{l}, \\ z_1 &= x - \xi, & z_2 &= -\left(x + \xi + 2\frac{d}{l}\right), \\ \varphi_1 &= \left(\frac{8 \operatorname{kei}'(\lambda\rho)}{\lambda\rho} - 4 \operatorname{ker}'(\lambda\rho) + \lambda\rho \operatorname{ker}'(\lambda\rho) \right) \frac{st^2}{\rho^4} - \left(\frac{\operatorname{kei}'(\lambda\rho)}{\lambda\rho} - \operatorname{ker}'(\lambda\rho) \right) \frac{s}{\rho^2}, \\ \varphi_2 &= \left(\frac{8}{\lambda^2\rho^2} + \frac{8 \operatorname{ker}'(\lambda\rho)}{\lambda\rho} + 4 \operatorname{kei}'(\lambda\rho) - \lambda\rho \operatorname{kei}'(\lambda\rho) \right) \frac{st^2}{\rho^4} - \\ &\quad - \left(\frac{2}{\lambda^2\rho^2} + \frac{2 \operatorname{ker}'(\lambda\rho)}{\lambda\rho} + \operatorname{kei}'(\lambda\rho) \right) \frac{s}{\rho^2}, \\ f_1^*(x) &= -\frac{2\pi}{D_0} f_{11}, & f_2^*(x) &= 0, \end{aligned}$$

ядра $\mathcal{K}_{in}^0(z)$ наведено в [5]; d – віддаль від центрів фіктивних тріщин до початку координат.

Розв'язок отриманої системи шукаємо у вигляді (9), а системи інтегральних рівнянь на функції $F_{jm}(s)$, $j = 1, 2$, $m = 1$, – за допомогою методу механічних квадратур [5]. Цю систему розв'язуємо сумісно з умовами обмеженості нормального зусилля і згинного моменту біля вершин тріщин, для цього достатньо, щоб відповідні коефіцієнти інтенсивності дорівнювали нулеві, тобто

$$K_N(d_2) = K_N(d_3 + l^{(3)}) = K_M(d_2) = K_M(d_3 + l^{(3)}) = 0, \quad (12)$$

а також з умовами пластичності Треска у вигляді умови пластичного шарніру

$$\left(\frac{N^{(i)}}{2h\sigma_T} \right)^2 + \frac{|M^{(i)}|}{h^2\sigma_T} = 1, \quad i = 2, 3, \quad (13)$$

або умови пластичності поверхневого шару

$$\frac{N^{(i)}}{2h\sigma_T} + \frac{3|M^{(i)}|}{2h^2\sigma_T} = 1, \quad i = 2, 3. \quad (14)$$

У співвідношеннях (12)–(14) позначено: d_2 – віддаль від центру координат до ближньої вершини фіктивної тріщини; $d_3 = d_2 + l^{(2)} + 2l_0$; $d = d_2 + (l^{(2)} + l^{(3)} + 2l_0) / 2$; σ_T – границя текучості матеріалу оболонки.

В умовах пластичності (13), (14) $N^{(i)} = \text{const}$, $M^{(i)} = \text{const}$. Тобто матеріал оболонки вважаємо ідеально пружно-пластичним. Якщо матеріалу оболонки притаманне зміцнення, то приймаємо, що $N^{(i)}$ та $M^{(i)}$ у пластичних зонах $l^{(i)}$, $i = 2, 3$, змінюються за лінійним законом. Так, наприклад, в пластичних зонах біля вершин правої тріщини ($\beta_n = 0$) зусилля $N^{(i)}$ та моменти $M^{(i)}$, $i = 2, 3$, набувають вигляду

$$\begin{aligned} N^{(2)}(x) &= P \left[\frac{1}{l^{(2)}} (x - d_2)(m^* - 1) + 1 \right], \\ N^{(3)}(x) &= P \left[\frac{1}{l^{(3)}} (x - d_3)(1 - m^*) + m^* \right], \\ M^{(2)}(x) &= H \left[\frac{1}{l^{(2)}} (x - d_2)(m^* - 1) + 1 \right], \\ M^{(3)}(x) &= H \left[\frac{1}{l^{(3)}} (x - d_3)(1 - m^*) + m^* \right], \end{aligned} \quad (15)$$

де $m^* = \sigma_B / \sigma_T$; σ_B – границя міцності матеріалу оболонки; P, H – невідомі сталі, які повинні задовольняти задану умову пластичності, наприклад, умову пластичного шарніру

$$\left[\frac{P}{2h\sigma^{(i)}} \right]^2 + \frac{|H|}{h^2\sigma^{(i)}} = 1, \quad i = 2, 3. \quad (16)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{N^{(i)}(x)}{2h\sigma^{(i)}(x)} + \frac{M^{(i)}(x)}{h^2\sigma^{(i)}} &= 1, \quad i = 2, 3, \\ \sigma^{(2)}(x) &= \frac{1}{l^{(2)}} (x - d_2)(\sigma_B - \sigma_T) + \sigma_T, \\ \sigma^{(3)}(x) &= \frac{1}{l^{(3)}} (x - d_3)(\sigma_T - \sigma_B) + \sigma_B. \end{aligned} \quad (17)$$

Метод механічних квадратур зводить розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь. Відмітимо, що невідомі розміри зон пластичних деформацій увійдуть у систему алгебраїчних рівнянь нелінійно. Тому алгоритм розв'язування є таким. Задавши певним чином $l^{(2)}$ та $l^{(3)}$, розв'язуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. За допомогою умов (12) знаходимо $N^{(i)}$, $M^{(i)}$, $i = 2, 3$, та перевіряємо умови пластичності (13) або (14). Якщо вони виконуються з наперед заданою точністю, то задача розв'язана. У протилежному випадку змінюємо $l^{(2)}$ та $l^{(3)}$ і процедуру повторюємо.

Проінтегрувавши отриманий розв'язок системи інтегральних рівнянь, розкриття тріщини $\delta(x_m, \gamma)$ в довільній її точці визначимо за формулою

$$\delta(x_m, \gamma) = [v(x_m)] + \gamma[\theta_2(x_m)],$$

де γ – координата, нормальна до серединної поверхні оболонки.

На рис. 1 показано залежність відносного розкриття вершин тріщини $\delta^* = \delta E / (l_0 \sigma_T)$ від параметра $\rho = l_0 / d$. Криві 1, 2 відповідають відносному навантаженню $q / \sigma_T = 0.008, 0.012$. Суцільні криві відповідають вершинам тріщин, що розміщені ближче до початку координат, а штрихові – віддаленим вершинам. Числовий аналіз проводили для таких значень параметрів: $R/h = 100$, $\nu = 0.3$. Розкриття вершини тріщин обчислювали на серединній поверхні $\gamma = 0$. Результати, отримані для $\gamma = \pm h$, відрізняються від наведених не більше ніж на 2%.

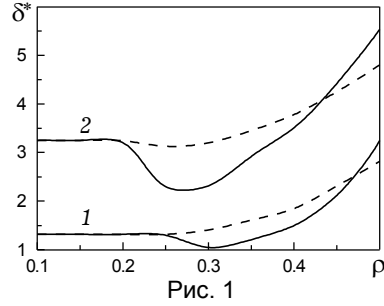


Рис. 1

З аналізу графіків випливає, що початок взаємодії чотирьох тріщин, симетрично розміщених у сферичній оболонці, залежить як від довжини тріщин чи віддалі між ними d , так і від рівня внутрішнього тиску q . Зокрема, для $q = 0.008\sigma_T$ взаємодія починається при $\rho = 0.25$, а для $q = 0.012\sigma_T$ – при $\rho = 0.2$. На початку взаємодії, як і в оболонці з двома тріщинами [5], розкриття ближчих до початку координат вершин тріщин дещо зменшується. З подальшим їх зближенням воно швидко зростає. Результати, отримані з використанням умов пластичності (13) чи (14), відрізняються не більше ніж на 5%. Врахування зміцнення матеріалу оболонки (умови (15)–(17)) приводить до зменшення розкриття вершин тріщин. Так, для $m^* = 1.2$ при $\rho = 0.5$ розкриття тріщин зменшилось на 10%, а для $m^* = 1.5$, $\rho = 0.5$ – на 14%.

1. Бурак Я. Й. Вибрані праці. – Львів: НУЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Вид-во «Ахіл», 2001. – 352 с.
2. Власов В. З. Избранные труды. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – Т. 1. – 528 с.
3. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. – Москва: Наука, 1973. – 304 с.
4. Кушнір Р. М., Николишин М. М. Напружений стан і гранична рівновага кусково-однорідних циліндричних оболонок з тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 1. – С. 60–74.
5. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
6. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

7. *Осадчук В. А., Подстригач Я. С.* Напряженное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. – Москва: ВИНТИ, 1986. – **18**. – С. 3–52.
8. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
9. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 1. – С. 49–68.
10. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацкишин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
11. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 29–41.
12. *Прагер В.* Проблемы теории пластичности. – Москва: Физматгиз, 1958. – 136 с.
13. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
14. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Под ред. Ю. Мураками.* – Москва: Мир, 1990. – 448 с.
15. *Шевченко В. П., Довбня К. М.* Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах статки пологих ортотропних оболонок із розрізами і отворами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 47–59.
16. *Delale F., Erdogan F.* The crack problem in a specially orthotropic shell with double curvature // Eng. Fract. Mech. – 1983. – **18**, No. 3. – P. 529–544.
17. *Loakimidis N. I.* The numerical solution of crack problems in plane elasticity in the case of loading discontinuities // Eng. Fract. Mech. – 1980. – **13**, No. 4. – P. 709–716.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА С СИСТЕМОЙ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ТРЕЩИН

Задача о предельном равновесии сферической оболочки с произвольно размещенными прямолинейными в плане сквозными трещинами сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, которая решена численно совместно с условиями ограниченности усилий и моментов возле трещин и условиями пластичности тонких оболочек. В качестве примера рассмотрена оболочка с четырьмя трещинами.

ELASTICO-PLASTIC SPHERICAL SHELL WITH A SYSTEM OF ARBITRARILY LOCATED CRACKS

The problem on limit equilibrium of a spherical shell with arbitrarily located rectilinear (in plane) through cracks is reduced to a system of singular integral equations. The system is solved numerically under the boundedness conditions for forces and moments near the cracks and plasticity conditions for thin shells. As an example the shell with four cracks is analysed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.02.06