УДК 539.3

В. Л. Богданов

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕАРИЗИРОВАННОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ТЕЛА С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Для случая двух параллельных дискообразных трещин в бесконечном материале проведено исследование двух неклассических механизмов разрушения – разрушения тела с начальными (остаточными) напряжениями и разрушения материала при сжатии вдоль трещин. В рамках трехмерной линеаризированной механики деформируемого твердого тела выполнена постановка задач и получены разрешающие системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Приведены выражения коэффициентов интенсивности напряжений для случая трещин нормального отрыва.

1. Введение. Задачи механики разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, действующими вдоль поверхностей трещин, и задачи о сжатии тел вдоль трещин по терминологии [3, 4] относятся к неклассическим проблемам механики разрушения, поскольку их нельзя адекватно описать в рамках классической линейной механики трещин. Это связано с тем, что из решения соответствующих задач линейной теории упругости получаем, что составляющие нагрузки, направленные параллельно плоскостям трещин, не входят в выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и величин раскрытия трещин и, следовательно, не учитываются в классических критериях разрушения.

В работах [3, 4, 7, 8] для исследования указанных классов задач были предложены подходы в рамках трехмерной линеаризированной механики деформируемого твердого тела. При этом сформулированный в указанных работах критерий хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями является аналогом соответствующего критерия Гриффитса – Ирвина, а применительно к проблеме о сжатии материалов вдоль трещин в качестве механизма разрушения рассматривается локальная потеря устойчивости состояния равновесия материала в окрестности трещин.

К настоящему времени с использованием указанных подходов получены решения отдельных классов статических и динамических задач (преимущественно для изолированных трещин в бесконечном материале), которые обнаружили новые механические эффекты, связанные с влиянием напряжений, действующих вдоль трещин [1–4, 6, 10].

В данной работе для случая двух параллельных круговых трещин в бесконечном материале с использованием линеаризированных соотношений выполнена постановка задач для двух механизмов разрушения: разрушения материалов с начальными напряжениями, направленными параллельно содержащим трещины плоскостям, и разрушения при сжатии тел вдоль трещин. Задачи сведены к парным интегральным уравнениям, а затем к разрешающим системам интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для трещин нормального отрыва приведены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений.

2. Постановка задачи. Исследование задачи будем производить в лагранжевых координатах y_i, $j = 1, 2, 3$, которые в начальном (докритическом) напряженно-деформированном состоянии совпадают с декартовыми. Кроме того, будем использовать такие обозначения: S_{ij}^0 – компоненты симметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади тела в недеформированном (естественном) состоянии; u_j^0 – компоненты вектора перемещений, соответствующие начальным напряжениям S_{ij}^0; Q_{ij}' – компоненты несимметричного тензора напряжений, которые отнесены к единице площади тела в начальном (докритическом) состоянии.

Рассмотрим две дискообразные трещины одинакового радиуса a, расположенные в параллельных плоскостях $y_3 = 0$ и $y_3 = -2h$ с центрами на оси Oy_3. Будем предполагать, что в материале реализуется однородное начальное (докритическое) напряженно-деформированное состояние, которое характеризируется следующими соотношениями:

$$S_{33}^0 = 0, \qquad S_{11}^0 = S_{22}^0 = \mathrm{const}\,,$$

$$u_m^0 = \lambda_m^{-1}(\lambda_m^{-1} - 1)y_m, \qquad \lambda_j = \mathrm{const}, \qquad \lambda_1 = \lambda_2\,, \tag{1}$$

где λ_j – коэффициенты удлинения (укорочения) вдоль координатных осей y_j.

В работах [3, 4] для случая однородного начального состояния (1) построены представления общих решений линеаризированных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции; при этом вид этих представлений зависит от корней характеристического уравнения. Так, в случае неравных корней характеристического уравнения указанные преставления в круговой цилиндрической системе координат (r, θ, y_3), получаемой из декартовой (y_1, y_2, y_3), для осесимметричной задачи имеют вид [3]

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2)\,, \qquad u_3 = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{m_2}{\sqrt{n_2}}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\,,$$

$$Q'_{33} = C_{44}\left(d_1 l_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2 l_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2}\right),$$

$$Q'_{3r} = C_{44}\left(\frac{d_1}{\sqrt{n_1}}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + \frac{d_2}{\sqrt{n_2}}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2}\right), \qquad z_i = \frac{y_i}{\sqrt{n_i}}\,, \qquad i = 1, 2\,. \tag{2}$$

Для случая равных корней характеристического уравнения имеем следующие представления:

$$u_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - z_1\frac{\partial F}{\partial r}\,, \qquad u_3 = \frac{m_1 - m_2 + 1}{\sqrt{n_1}}F - \frac{m_1}{\sqrt{n_1}}\Phi - \frac{m_1}{\sqrt{n_1}}z_1\frac{\partial F}{\partial z_1}\,,$$

$$Q'_{33} = C_{44}\left[(d_1 l_1 - d_2 l_2)\frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1 l_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - d_1 l_1 z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}\right],$$

$$Q'_{3r} = C_{44}\left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}}\frac{\partial}{\partial r}[(d_1 - d_2)F - d_1\Phi] - \frac{d_1 z_1}{\sqrt{n_1}}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z_1}\right\}, \qquad \Phi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\,. \tag{3}$$

Величины C_{44}, n_i, m_i, l_i, d_i, $i = 1, 2$, определяются выбором модели материала [3, 4], а входящие в представления решений (2), (3) функции φ_1, φ_2, φ, F, Φ являются гармоническими функциями своих аргументов.

В рассматриваемом случае двух параллельных соосных дискообразных трещин при двухосном равномерном нагружении вдоль плоскостей этих трещин имеет место симметрия геометрической и силовой схем задачи относительно плоскости $y_3 = -h$. Поэтому исходная задача для пространства с двумя трещинами может быть переформулирована как задача для полупространства с одной трещиной. Рассматривая для определенности верхнее полупространство $y_3 \ge -h$, имеем следующие граничные условия на берегах трещины:

– *для задачи о трещине нормального отрыва в материале с начальными напряжениями*

$$Q'_{33} = -\sigma(r), \qquad Q'_{3r} = 0, \qquad y_3 = \pm 0, \qquad 0 \le r \le a; \tag{4}$$

– *для задачи о сжатии материала вдоль трещины*

$$Q'_{33} = 0, \qquad Q'_{3r} = 0, \qquad y_3 = \pm 0, \qquad 0 \le r \le a. \tag{5}$$

Граничные условия на границе полупространства имеют вид

$$u_3 = 0, \qquad Q'_{3r} = 0, \qquad y_3 = -h, \qquad 0 \le r < \infty. \tag{6}$$

Условно разобьем полупространство $y_3 \ge -h$ на две области: полупространство $y_3 \ge 0$ и слой $-h \le y_3 \le 0$, обозначив соответствующие им величины индексами «1» и «2». На границе указанных областей вне трещины должны выполняться естественные условия непрерывности перемещений и напряжений:

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \qquad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \qquad y_3 = 0, \quad a < r < \infty; \tag{7}$$

$$Q'^{(1)}_{33} = Q'^{(2)}_{33}, \qquad Q'^{(1)}_{3r} = Q'^{(2)}_{3r}, \qquad y_3 = 0, \quad a < r < \infty. \tag{8}$$

Учитывая совместно граничные условия (4)–(6) и условия непрерывности (7), (8), получаем формулировку задачи в виде

– *для задачи о материале с начальными напряжениями*:

$$u_3^{(2)} = 0, \qquad Q'^{(2)}_{3r} = 0, \qquad y_3 = -h, \quad 0 \le r < \infty, \tag{9}$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \qquad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \qquad y_3 = 0, \quad a < r < \infty, \tag{10}$$

$$Q'^{(1)}_{33} = Q'^{(2)}_{33}, \qquad Q'^{(1)}_{3r} = Q'^{(2)}_{3r}, \qquad y_3 = 0, \quad 0 \le r < \infty, \tag{11}$$

$$Q'^{(2)}_{33} = -\sigma(r), \qquad Q'^{(2)}_{3r} = 0, \qquad y_3 = 0, \quad 0 \le r \le a; \tag{12}$$

– *для задачи о сжатии материала вдоль трещины*:

$$Q'^{(2)}_{33} = 0, \qquad Q'^{(2)}_{3r} = 0, \qquad y_3 = 0, \quad 0 \le r \le a. \tag{13}$$

3. Парные интегральные уравнения. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Далее детальные выкладки будем приводить для случая неравных корней характеристического уравнения для задачи о разрушении материала с начальными напряжениями; для перехода к соответствующим соотношениям для задачи о сжатии тела вдоль трещины достаточно будет положить $\sigma \equiv 0$.

Выразим гармонические функции, фигурирующие в представлениях общих решений (2), в каждой из областей «1» и «2» в виде интегральных разложений Ханкеля нулевого порядка по координате r:

$$\varphi_1^{(1)}(r, z_1) = \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}, \qquad \varphi_2^{(1)}(r, z_2) = \int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda z_2} J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$\varphi_1^{(2)}(r, z_1) = \int_0^\infty \left[C_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_1 + h_1) + C_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_1 + h_1)\right] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1},$$

$$\varphi_2^{(2)}(r, z_2) = \int_0^\infty \left[D_1(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(z_2 + h_2) + D_2(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(z_2 + h_2)\right] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_2}, \tag{14}$$

где $h_i = h/\sqrt{n_i}$, $i = 1, 2$.

Условия (9), (11), заданные на всей области $y_3 = \mathrm{const}$, позволяют выразить неизвестные функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, $D_2(\lambda)$ через функции $C_1(\lambda)$, $D_1(\lambda)$:

$$A(\lambda) = \frac{k_2}{k}\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\,\mathrm{cth}\,\mu_1\right)C_1(\lambda) + \frac{d_2 l_2}{d_1 l_1}\,\frac{k_1}{k_2}(1 + \mathrm{cth}\,\mu_2)D_1(\lambda)\,,$$

$$B(\lambda) = -\frac{d_1 l_1}{d_2 l_2}(1 + \mathrm{cth}\,\mu_1)C_1(\lambda) - \frac{k_1}{k}\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\,\mathrm{cth}\,\mu_2\right)D_1(\lambda)\,,$$

$$C_2(\lambda) = 0, \qquad D_2(\lambda) = 0\,, \tag{15}$$

где $k_1 = l_1\big/\sqrt{n_2}$, $k_2 = l_2\big/\sqrt{n_1}$, $k = k_1 - k_2$, $\mu_i = \lambda h_i$, $i = 1,2$.

Из условий (10), (12) получаем систему парных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty \left[d_1 l_1\,\mathrm{cth}\,\mu_1 C_1(\lambda) + d_2 l_2\,\mathrm{cth}\,\mu_2 D_1(\lambda)\right]J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda = -\frac{\sigma(r)}{C_{44}}, \qquad r \le a\,,$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{d_1}{\sqrt{n_1}}C_1(\lambda) + \frac{d_2}{\sqrt{n_2}}D_1(\lambda)\right]J_1(\lambda r)\,\lambda\, d\lambda = 0, \qquad r \le a\,,$$

$$\int_0^\infty X_1 J_0(\lambda r)\, d\lambda = 0, \qquad \int_0^\infty X_2 J_1(\lambda r)\, d\lambda = 0, \qquad r > a\,, \tag{16}$$

где

$$X_1 \equiv \frac{d_1 l_1}{d_2 l_2}(1 + \mathrm{cth}\,\mu_1)C_1(\lambda) + (1 + \mathrm{cth}\,\mu_2)D_1(\lambda)\,,$$

$$X_2 \equiv \frac{d_1}{d_2}\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}}(1 + \mathrm{cth}\,\mu_1)C_1(\lambda) + (1 + \mathrm{cth}\,\mu_2)D_1(\lambda)\,. \tag{17}$$

Будем решать систему парных интегральных уравнений (16) методом подстановки [5]. В соответствии с ним будем выбирать решение в виде, который позволяет тождественно удовлетворить два последних уравнения в (16), а именно:

$$X_1 = \int_0^a \varphi(t)\sin\lambda t\, dt\,, \qquad X_2 = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}}\int_0^a \sqrt{t}\,\psi(t)J_{3/2}(\lambda t)\, dt\,, \tag{18}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ − неизвестные функции, непрерывные вместе со своими первыми производными на интервале $[0, a]$.

Подставив значения C_1, D_1, выраженные через функции X_1, X_2 с учетом (17), в первые два уравнения (16), получим

$$\int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{2} + M(\lambda)\right)X_1 - \frac{k_1}{2k}F(\lambda)X_2\right]J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda = -\frac{\sigma(r)}{C_{44} d_2 l_2}\,, \qquad r \le a\,,$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{k_2}{2k}F(\lambda)X_1 - \left(\frac{1}{2} - L(\lambda)\right)X_2\right]J_1(\lambda r)\,\lambda\, d\lambda = 0, \qquad r \le a\,, \tag{19}$$

где $M(\lambda) = \frac{1}{2k}\left(k_1 e^{-2\mu_1} - k_2 e^{-2\mu_2}\right)$, $\qquad L(\lambda) = -\frac{1}{2k}\left(k_2 e^{-2\mu_1} - k_1 e^{-2\mu_2}\right)$,

$F(\lambda) = e^{-2\mu_1} - e^{-2\mu_2}$.

Учитывая, что для $r < a$ выполняются равенства

$$\int_0^\infty X_1(\lambda) J_0(\lambda r)\lambda \, d\lambda = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_0^r t\varphi(t)\frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}},$$

$$\int_0^\infty X_2(\lambda) J_1(\lambda r)\lambda \, d\lambda = \frac{1}{r}\int_0^r \frac{d}{dt}[t\psi(t)]\frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}},$$

из (19) можем получить соотношения

$$\frac{1}{2}\int_0^r t\varphi(t)\frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = -r\int_0^\infty M(\lambda)X_1(\lambda)J_1(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+\frac{k_1}{2k} r\int_0^\infty F(\lambda)X_2(\lambda)J_1(\lambda r)\, d\lambda - \int_0^r \rho\,\frac{\sigma(\rho)}{C_{44}d_2 l_2}\, d\rho,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^r \frac{d}{dt}[t\psi(t)]\frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = r\int_0^\infty L(\lambda)X_2(\lambda)J_1(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+\frac{k_2}{2k} r\int_0^\infty F(\lambda)X_1(\lambda)J_1(\lambda r)\, d\lambda. \tag{20}$$

Используя подстановку $t = r\sin\theta$ и принимая во внимание, что уравнение Шлемильха вида

$$\int_0^{\pi/2} f(r\sin\theta)\, d\theta = N(r), \qquad 0 \le r \le a,$$

имеет решение [5]

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left[N(0) + x\int_0^{\pi/2} N'(x\sin\theta)\, d\theta\right], \qquad 0 \le x \le a,$$

из (20) получаем систему двух интегральных уравнения Фредгольма второго рода, которые в обезразмеренной форме имеют вид

$$kf(\xi) + \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(\eta)\mathcal{K}_{11}(\xi,\eta)\, d\eta + \frac{2}{\pi}\int_0^1 g(\eta)\mathcal{K}_{12}(\xi,\eta)\, d\eta = \frac{4}{\pi}k\int_0^{\pi/2} s(\xi\sin\theta)\, d\theta,$$

$$kg(\xi) + \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(\eta)\mathcal{K}_{21}(\xi,\eta)\, d\eta + \frac{2}{\pi}\int_0^1 g(\eta)\mathcal{K}_{22}(\xi,\eta)\, d\eta = 0, \tag{21}$$

где

$$f(\xi) \equiv \frac{1}{a}\varphi(a\xi), \quad g(\xi) \equiv \frac{1}{a}\frac{d}{d\xi}[\xi\psi(a\xi)], \quad s(\xi) \equiv -\frac{\xi t(\xi)}{C_{44}d_2 l_2}, \quad t(\xi) \equiv \sigma(a\xi).$$

Ядра интегральных уравнений (21) имеют вид

$$\mathcal{K}_{11}(\xi,\eta) = k_1 I_1(2\beta_1,\eta) - k_2 I_1(2\beta_2,\eta),$$

$$\mathcal{K}_{12}(\xi,\eta) = k_1\left\{[I_0(2\beta_1,1) - I_0(2\beta_2,1)] - \eta^{-1}[I_0(2\beta_1,\eta) - I_0(2\beta_2,\eta)]\right\},$$

$$\mathcal{K}_{21}(\xi,\eta) = k_2\xi[I_2(2\beta_1,\eta) - I_2(2\beta_2,\eta)],$$

$$\mathcal{K}_{22}(\xi,\eta) = -\xi\{[k_2 I_1(2\beta_1,1) - k_1 I_1(2\beta_2,1)] -$$

$$- \eta^{-1}[k_2 I_1(2\beta_1,\eta) - k_1 I_1(2\beta_1,\eta)]\}. \tag{22}$$

В выражениях для ядер (22) введены такие обозначения:

$$I_0(\beta,\eta) = \frac{1}{4}\ln\frac{\beta^2+(\xi+\eta)^2}{\beta^2+(\xi-\eta)^2} = \frac{1}{4}\ln\frac{\zeta+1}{\zeta-1},$$

$$I_1(\beta,\eta) = \frac{\beta}{2\xi\eta(\zeta^2-1)},$$

$$I_2(\beta,\eta) = I_1(\beta,\eta)\left[4\zeta\, I_1(\beta,\eta) - \frac{1}{\beta}\right],$$

где $\zeta = \dfrac{\beta^2+\xi^2+\eta^2}{2\xi\eta}$, $\beta = \dfrac{h}{a}$, $\beta_1 = \dfrac{\beta}{\sqrt{n_1}}$.

Для случая задачи о сжатии материала вдоль трещин разрешающая система интегральных уравнений Фредгольма имеет вид:

$$kf(\xi) + \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(\eta)\mathcal{K}_{11}(\xi,\eta)\,d\eta + \frac{2}{\pi}\int_0^1 g(\eta)\mathcal{K}_{12}(\xi,\eta)\,d\eta = 0\,,$$

$$kg(\xi) + \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(\eta)\mathcal{K}_{21}(\xi,\eta)\,d\eta + \frac{2}{\pi}\int_0^1 g(\eta)\mathcal{K}_{22}(\xi,\eta)\,d\eta = 0\,, \qquad (23)$$

где ядра определяются из формул (22).

Таким образом, начальная линеаризированная задача о сжатии бесконечного материала с двумя круговыми параллельными трещинами сведена к задаче на собственные значения относительно параметра начального укорочения $\lambda_1 < 1$ для системы однородных интегральных уравнений (23) (при этом параметр λ_1 сложным нелинейным образом входит в ядра интегральных уравнений).

4. Коэффициенты интенсивности напряжений. Используя соотношения (2), (14), (17) и (18), получим выражения для компонент тензора напряжений в плоскости трещины:

$$Q_{33}'^{(2)}(r,0) = \frac{1}{2}C_{44}d_2 l_2\left[\int_0^a \varphi(t)\,dt\int_0^\infty \sin\lambda t J_0(\lambda r)\lambda\,d\lambda + \right.$$
$$+\frac{1}{k}\int_0^a \varphi(t)\,dt\int_0^\infty \left(k_1e^{-2\mu_1} - k_2e^{-2\mu_2}\right)\sin\lambda t J_0(\lambda r)\lambda\,d\lambda +$$
$$\left. + \frac{k_1}{k}\int_0^a \frac{d}{dt}[t\psi(t)]\,dt\int_0^\infty \left(e^{-2\mu_1} - e^{-2\mu_2}\right)\left(\frac{\sin\lambda a}{a} - \frac{\sin\lambda t}{t}\right)J_0(\lambda r)d\lambda\right], \qquad (24)$$

$$Q_{3r}'^{(2)}(r,0) = -\frac{1}{2}C_{44}\frac{d_2}{\sqrt{n_2}}\left[\sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}}\int_0^a \sqrt{t}\,\psi(t)\,dt\int_0^\infty \sin\lambda t J_{3/2}(\lambda t)J_0(\lambda r)\lambda\,d\lambda + \right.$$
$$+\sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}}\frac{1}{k}\int_0^a \sqrt{t}\,\psi(t)\,dt\int_0^\infty \left(k_2e^{-2\mu_2} - k_1e^{-2\mu_1}\right)J_{3/2}(\lambda t)J_1(\lambda r)\lambda\,d\lambda +$$
$$\left. + \frac{k_2}{k}\int_0^a \varphi(t)\,dt\int_0^\infty \left(e^{-2\mu_1} - e^{-2\mu_2}\right)\sin\lambda t\, J_1(\lambda r)\lambda\,d\lambda\right]. \qquad (25)$$

Аналогично классическому случаю [9] будем определять коэффициенты интенсивности напряжений как коэффициенты при особенностях в компонентах напряжений возле края трещины:

$$K_I = \lim_{r\to +a}[2\pi(r-a)]^{-1/2} Q'_{33}(r,0)\,,$$

$$K_{II} = \lim_{r\to +a}[2\pi(r-a)]^{-1/2} Q'_{3r}(r,0)\,. \qquad (26)$$

Из анализа выражений (24), (25) следует, что при $r \to +a$

$$Q'^{(2)}_{33}(r,0) \sim -\frac{1}{2} C_{44} d_2 l_2 \frac{\varphi(a)}{\sqrt{r^2-a^2}}\,,$$

$$Q'^{(2)}_{3r}(r,0) \sim \frac{1}{2} C_{44} \frac{d_2}{\sqrt{n_2}} \frac{a\psi(a)}{r\sqrt{r^2-a^2}}\,,$$

т. е. порядок особенности в распределении напряжений возле края трещины нормального отрыва в теле с начальными напряжениями совпадает с порядком особенности, полученным при исследовании аналогичной задачи в линейной механики хрупкого разрушения [9].

Тогда из (26) получаем

$$K_I = -\frac{1}{2} C_{44} d_2 l_2 \sqrt{\frac{\pi}{a}}\varphi(a)\,, \qquad (27)$$

$$K_{II} = \frac{1}{2} C_{44} \frac{d_2}{\sqrt{n_2}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\psi(a)\,. \qquad (28)$$

Переходя в (27), (28) к безразмерным переменным и функциям, получаем

$$K_I = -\frac{1}{2} C_{44} d_2 l_2 \sqrt{\pi a}\, f(1)\,, \qquad (29)$$

$$K_{II} = \frac{1}{2} C_{44} \frac{d_2}{\sqrt{n_2}} \sqrt{\pi a} \int\limits_0^1 g(\eta)\, d\eta\,, \qquad (30)$$

где функции f и g определяются из системы интегральных уравнений Фредгольма (21).

Из соотношений (29), (30) следует, что взаимовлияние параллельных трещин приводит к тому, что для случая трещины нормального отрыва K_{II} отличен от нуля (для одной изолированной трещины в пространстве $K_{II} = 0$ [3]). Кроме того, оба коэффициента интенсивности напряжений K_I и K_{II} зависят от начальных напряжений $S^0_{11} = S^0_{22}$ (или удлинений $\lambda_1 = \lambda_2$), а также от расстояния между трещинами $2h$ (или 2β), поскольку решения $f(\xi)$ и $g(\xi)$ уравнений (21) зависят от значений этих параметров.

5. Предельный случай расположения трещин. Рассмотрим предельный случай расположения трещин, когда расстояние между ними стремится к бесконечности. Из выражений для ядер интегральных уравнений (22) следует, что при $h \to \infty$ ($\beta \to \infty$) все ядра в пределе обращаются в нуль:

$$\lim_{\beta\to\infty} \mathcal{K}_{ij}(\xi,\eta) = 0, \qquad i,j = 1,2\,. \qquad (31)$$

Тогда из уравнений (21) получаем граничные значения для функций f, g:

$$\lim_{\beta\to\infty} f(\xi) \equiv f^\infty(\xi) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} s(\xi\sin\theta)\, d\theta\,,$$

$$\lim_{\beta\to\infty} g(\xi) \equiv g^\infty(\xi) = 0\,. \qquad (32)$$

Подставляя соотношения (32) в представления (29), (30), получаем следующие значения коэффициентов интенсивности напряжений для предельного случая расположения трещин при $\beta \to \infty$:

$$K_I^\infty = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^1 \eta t(\eta) \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a t\sigma(t) \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}},$$

$$K_{II}^\infty = 0, \tag{33}$$

которые полностью совпадают (при принятых обозначениях) со значениями коэффициентов интенсивности напряжений, полученными в задаче об изолированной трещине нормального отрыва в бесконечном материале [3].

В частности, для случая равномерного растягивающего нагружения на берегах трещины $\sigma(r) = \sigma = \mathrm{const}$ из (33) получаем

$$K_I^\infty = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}, \qquad K_{II}^\infty = 0. \tag{34}$$

Для случая линейно изменяемой нагрузки $\sigma(r) = \sigma r$ получаем следующие значения:

$$K_I^\infty = \frac{1}{2}\sigma a\sqrt{\pi a}, \qquad K_{II}^\infty = 0. \tag{35}$$

Далее, учитывая соотношения (31), из системы уравнений (23) получаем, что в случае стремления величины расстояния между трещинами к бесконечности критические параметры нагружения λ_1^* в задаче о сжатии тела вдоль плоскостей трещин определяются из соотношения:

$$k(\lambda) = 0, \tag{36}$$

где k определяется из (15). Соотношение (36) полностью совпадает с соотношением для определение критических значений параметров нагружения в осесимметричной задаче о сжатии бесконечного тела с изолированной круговой трещиной, полученным в [4].

6. Выводы. В работе в рамках подходов трехмерной линеаризированной механики деформируемого твердого тела исследованы задачи о сжатии тела с двумя параллельными трещинами усилиями, направленными вдоль трещин, и о двух параллельных трещинах нормального отрыва в бесконечном материале с начальными (остаточными) напряжениями. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

– порядок особенности в распределении напряжений возле края трещин нормального отрыва в теле с начальными напряжениями совпадает с порядком особенности, полученным при исследовании аналогичной задачи в линейной механики хрупкого разрушения;

– аналогично классическому случаю (при отсутствии начальных напряжений) взаимовлияние двух параллельных соосных трещин в материале с начальными напряжениями приводит к ненулевому значению коэффициента интенсивности напряжений K_{II} для трещин нормального отрыва;

– коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} зависят от значений начальных напряжений, а также от величины расстояния между трещинами;

– при стремлении величины расстояния между трещинами к бесконечности коэффициенты интенсивности напряжений (в задаче о разрушении тела с начальными напряжениями) и критические параметры сжатия (в задаче о сжатии материала вдоль трещин) стремятся к соответствующим значениям, полученным для случая изолированной трещины в бесконечном материале.

1. *Богданов В. Л.* Осесиметрична задача лінеаризованої механіки руйнування для напівскінченного стисливого матеріалу з приповерхневою тріщиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – **48**, № 1. – С. 117–125.
2. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: «А.С.К.», 2004. – 672 с.
3. *Гузь А. Н.* Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4т., 5 кн. – Т. 2.)
4. *Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М.* Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5 кн. – Т. 4, кн. 1.)
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Москва–Ленинград: Изд-во АН СССР, 1963. – 367 с.
6. *Guz A. N.* Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 555 p.
7. *Guz A. N.* On construction of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37,** № 1. – P. 3–43.
8. *Guz A. N.* On the development of brittle-fracture mechanics of materials with initial stress // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32,** № 4. – P. 316–323.
9. *Kassir M. K., Sih G. C.* Mechanics of fracture. Three-dimensional crack problems. – Leyden: Netherlands Noordhoff Int. Publ., 1975. – Vol. 2. – 452 p.
10. *Nazarenko V. M., Bogdanov V. L., Altenbach H.* Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny-shaped crack under radial shear // Int. J. Fract. – 2000. – **104.** – P. 275–289.

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ДЛЯ ТІЛА З ДВОМА ПАРАЛЕЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ

Для випадку двох паралельних дископодібних тріщин в нескінченному матеріалі досліджено два некласичні механізми руйнування – руйнування тіла з початковими (залишковими) напруженнями та руйнування матеріалу при стисканні вздовж тріщин. В рамках тривимірної лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла здійснено постановку задачі та отримано розв'язувальні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду. Наведено вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень у випадку тріщин нормального відриву.

ON INVESTIGATION OF AXIALLY SYMMETRIC PROBLEMS OF LINEARIZED FRACTURE MECHANICS FOR A SOLID CONTAINING TWO PARALLEL CRACKS

In this paper the problems for two parallel penny-shaped cracks in an infinite solid are considered. The analysis involves two non-classical mechanisms of fracture, namely, the fracture of solids with initial (residual) stresses and fracture of materials under compression along the cracks. Statement of the problems is formulated and the Fredholm second-kind integral equations are obtained. The representations of the stress intensity factors for the cracks under tension are given.

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
01.02.06