

СТАТИЧНА ТЕРМОПРУЖНА РІВНОВАГА ДВОШАРОВОЇ m -КУТНОЇ ТРУБИ ЗА ЇЇ ОБТИСКАННЯ І ФРИКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ

Сформульовано постановку та побудовано наближений розв'язок плоскої статичної гранично-контактної термопружної задачі для двошарової m -кутної труби, яка перебуває під дією фрикційного температурного поля і рівномірно розподілених стискувальних нормальних напружень на бічних поверхнях за умови, що механічні та теплофізичні характеристики матеріалів не залежать від температури. Внутрішня труба є круговою осесиметричною, зовнішня поверхня зовнішньої труби в поперечному перерізі має форму m -кутника з заокругленими кутами. Задачу розв'язано методом малого параметра з урахуванням членів до третього порядку малості.

Вступ. Початок систематичного вивчення контактних задач термопружності з урахуванням фрикційного теплоутворення започаткований М. В. Коровчинським [6] і Дж. Барбером [8], які побудували загальну теорію теплового контакту тіл з урахуванням тертя і розв'язали деякі плоскі, осесиметричні та просторові задачі. У роботі [4] було вперше розглянуто плоску задачу про стиснення двох пружних тіл за стаціонарного теплоутворення на ділянці контакту. Задачу досліджено за таких припущень: швидкість відносного переміщення тіл стала й мала, а тому динамічний ефект задачі не враховується; тепловий контакт тіл ідеальний; поверхні тіл поза областю контакту є теплоізованими.

Розглянуті раніше контактні задачі вже можна назвати класичними. Прагнення до збільшення точності розрахунків вимагає нових постановок як пружних, так і термопружних контактних задач, основною особливістю яких було би точніше врахування геометрії співдотичних тіл. Оскільки реальні тіла є обмеженими, то їх контактна взаємодія не завжди адекватно може бути описана теорією Герца. У першу чергу це стосується шаруватих трибосистем.

До некласичних контактних задач також потрібно віднести задачі про контакт циліндричних тіл, актуальність яких полягає у тому, що порожнистий циліндр є найбільш розповсюдженим конструкційним елементом у машинобудуванні. Конструкції циліндричної форми часто використовують в авіаційній, гірничодобувній, нафтовій, газовій промисловості, теплоенергетиці, будівництві та в інших галузях. Контактні задачі для циліндричних тіл виникають також під час розрахунку підшипників кочення, валів вальцювальних станів, гальмівних пристроїв, катків мостових опор та ін.

Напружено-деформований стан порожнистого циліндра за дії різних видів навантаження з урахуванням теплоутворення від тертя детально вивчений у працях [1, 2, 5]. Незважаючи на численні публікації, що стосуються різних аспектів контактної взаємодії тіл з урахуванням теплоутворення від дії сил тертя, поза увагою дослідників все ж залишилося важливе для аналізу реальних процесів питання вивчення особливостей контакту та впливу теплоутворення на механізм розподілу напружень у двошаровій трубі з недосконаlostями форми під час обтиснення та фрикційного нагріву. Мабуть першою у цьому напрямі є праця [3], де розглянута гранично-контактна термопружна задача для двошарової ексцентричної циліндрично кругової труби. Вона була розв'язана методом малого параметра з урахуванням членів першого порядку малості.

У цій праці методом малого параметра [7] з урахуванням членів до третього порядку малості досліджений випадок, коли порожниста труба колового профілю охоплюється трубою, зовнішня поверхня якої має m -кутну форму, рівняння якої має вигляд

$$x = b[\cos \varphi + \varepsilon \cos(m\varphi)], \quad y = b[\sin \varphi - \varepsilon \sin(m\varphi)],$$

де $\varepsilon \ll 1$ – малий параметр, що характеризує відхилення m -кутного контуру від кола радіуса b .

Вигляд зовнішнього контуру зовнішньої труби визначається значеннями параметрів b , m , ε . Задавшись радіусом $b = 1$, розглянемо випадки трикутного при $m = 2$ (рис. 1а) і чотирикутного при $m = 3$ (рис. 1б) профілів при різних значеннях збурювального параметра ε . Тут лінія 1 відповідає значенню $\varepsilon = 0$ (коло радіуса b); лінія 2 – $\varepsilon = 0.03$; лінія 3 – $\varepsilon = 0.08$; лінія 4 – $\varepsilon = 0.1$; лінія 5 – $\varepsilon = 0.2$; лінія 6 – $\varepsilon = 0.3$.

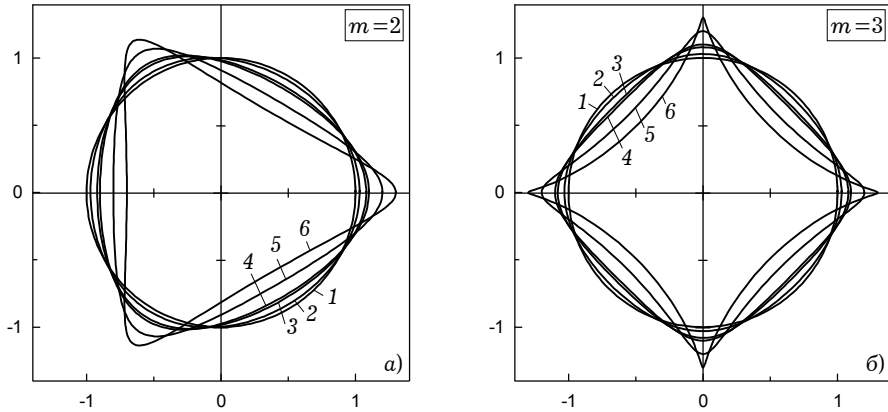


Рис. 1

1. Постановка задачі. Нехай довга кругова осесиметрична труба 1 з внутрішнім радіусом a та зовнішнім радіусом c вставлена без натягу й прозору в зовнішню m -кутну трубу 2 з внутрішнім радіусом c . Зовнішня поверхня труби 2 у поперечному перерізі має форму m -кутника (рис. 2) із заокругленими кутами, рівняння якого позначимо через $r_b = r_b(\varphi)$. На бічних поверхнях двох шарової труби задаємо рівномірно розподілені стискувальні нормальні напруження P_1 ($r = a$), P_2 ($r = r_b$).

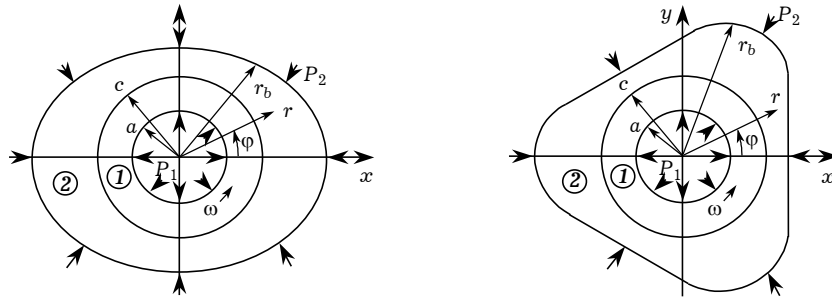


Рис. 2

Внутрішня труба обертається з малою сталою кутовою швидкістю ω , внаслідок чого на поверхні контакту труб виділяється тепло від підпорядкованого закону Амонтона тертя. Між зовнішніми поверхнями двох шарової труби і довкіллям, температуру якого вважаємо нульовою, відбувається теплообмін за законом Ньютона зі сталими коефіцієнтами тепловіддачі. Механічні та теплофізичні характеристики матеріалів труб не залежать від температури. Тепловий контакт труб неідеальний. За таких припущень визначимо температуру, напруження і переміщення в трубах, зокрема, контактний тиск між ними.

Оскільки поставлена задача є плоскою, то для побудови її розв'язку застосуємо полярну систему координат (r, φ) з полюсом у центрі поперечного перерізу внутрішньої труби та полярною віссю, що збігається з геометричною лінією симетрії двох шарової труби.

У математичному плані задача зводиться до послідовного вирішення двох завдань.

1. Побудова розв'язку диференціального рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_i}{\partial \varphi^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

за таких крайових

$$r = a : \quad \frac{\partial t_1}{\partial r} = \gamma_1 t_1, \quad r = r_b : \quad \frac{\partial t_2}{\partial n} = -\gamma_2 t_2 \quad (2)$$

і контактних теплових умов

$$r = c : \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} = \omega f c \left\{ p_0 + \sum_{k=1}^3 [p_k \cos(\ell_{km} \varphi) + q_k \sin(\ell_{km} \varphi)] \right\},$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} + h(t_1 - t_2) = 0. \quad (3)$$

Тут t_i – температура; γ_i – відносний коефіцієнт тепловіддачі; λ_i – коефіцієнт теплопровідності; h – коефіцієнт термічної провідності поверхні контакту (індекс $i = 1$ відповідає внутрішній трубі, індекс $i = 2$ – зовнішній трубі); $p_0, p_k, q_k, k = 1, 2, 3$, – коефіцієнти складових контактного тиску; E_i, ν_i, α_i – модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та лінійного теплового розширення відповідних труб; n і τ відповідають зовнішній нормалі та дотичній до контуру $r = r_b$; $\ell_{km} = k(m + 1), k = 1, 2, 3$.

2. Побудова розв'язків рівнянь щодо функції напружень

$$\Delta^2 \Phi^{(i)}(r, \varphi) = 0, \quad (4)$$

$$\Delta^2 \Psi^{(i)}(r, \varphi) = \frac{\alpha_i E_i}{1 - \nu_i} \Delta t_i, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (5)$$

за таких крайових

$$r = a : \quad \sigma_r^{(1)} = -P_1, \quad u_\varphi^{(1)} = 0, \quad r = r_b : \quad \sigma_n^{(2)} = -P_2, \quad u_\tau^{(2)} = 0 \quad (6)$$

і контактних механічних умов

$$r = c : \quad \sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)} = -p_0 - \sum_{k=1}^3 [p_k \cos(\ell_{km} \varphi) + q_k \sin(\ell_{km} \varphi)],$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi}^{(2)} = -f p_0 - f \sum_{k=1}^3 [p_k \cos(\ell_{km} \varphi) + q_k \sin(\ell_{km} \varphi)],$$

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}. \quad (7)$$

Нормальні $\sigma_{rr}^{(i)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)}, \sigma_{zz}^{(i)}$ та дотичні $\sigma_{r\varphi}^{(i)}$ напруження всередині кожної з труб визначаються за формулами

$$\sigma_{rr}^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\Phi^{(i)} - \Psi^{(i)})}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\Phi^{(i)} - \Psi^{(i)})}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} = \frac{\partial^2(\Phi^{(i)} - \Psi^{(i)})}{\partial r^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(i)} = \nu_i (\sigma_r^{(i)} + \sigma_\varphi^{(i)}) - \alpha_i E_i t_i,$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(i)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2(\Phi^{(i)} - \Psi^{(i)})}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\Phi^{(i)} - \Psi^{(i)})}{\partial \varphi}, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Радіальні $u_r^{(i)}$ і тангенціальні $u_\varphi^{(i)}$ переміщення пов'язані з температурою і напруженнями такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} &= \frac{1 + \nu_i}{E_i} [(1 - \nu_i)\sigma_{rr}^{(i)} - \nu_i\sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} + \alpha_i E_i t_i], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial r} - \frac{u_\varphi^{(i)}}{r} &= 2 \frac{1 + \nu_i}{E_i} \sigma_{r\varphi}^{(i)}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{u_r^{(i)}}{r} &= \frac{1 + \nu_i}{E_i} [(1 - \nu_i)\sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} - \nu_i\sigma_{rr}^{(i)} + \alpha_i E_i t_i].\end{aligned}\quad (9)$$

2. Побудова розв'язку задачі. Рівняння зовнішнього контуру зовнішньої труби у декартовій системі координат має вигляд

$$x = b[\cos \varphi + \varepsilon \cos(m\varphi)], \quad y = b[\sin \varphi - \varepsilon \sin(m\varphi)],$$

де $\varepsilon \ll 1$ – малий параметр, що характеризує відхилення зовнішнього контуру труби **2** від кола радіуса b ; $m = 1$, $\varepsilon = 1/17$ – для еліпса; $m = 2$, $\varepsilon = 1/5$ – для трикутника з заокругленими кутами; $m = 3$, $\varepsilon = 1/9$ – для чотирикутника з заокругленими кутами.

Задачу розв'язуватимемо наближено методом малого параметра [7], обмежившись в усіх подальших перетвореннях і результатах величинами третього порядку малості. Рівняння контуру зовнішньої бічної поверхні двохарової труби у полярній системі координат матиме вигляд

$$\begin{aligned}r_b = \sqrt{x^2 + y^2} \approx b \left\{ 1 + \varepsilon \cos((m+1)\varphi) - \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 \cos(2(m+1)\varphi) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^3 \cos(3(m+1)\varphi) \right\} = b + \sum_{k=1}^3 \varepsilon_k \cos(\ell_{km}\varphi), \\ \varepsilon_1 = \varepsilon b, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon^2 b, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{8}\varepsilon^3 b.\end{aligned}\quad (10)$$

Розв'язок подамо як суму чотирьох доданків

$$\begin{aligned}t_i = \sum_{k=0}^3 t_{i,k}, \quad u_\varphi^{(i)} = \sum_{k=0}^3 u_{\varphi,k}^{(i)}, \quad u_r^{(i)} = \sum_{k=0}^3 u_{r,k}^{(i)}, \\ \sigma_{rr}^{(i)} = \sum_{k=0}^3 \sigma_{rr,k}^{(i)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(i)} = \sum_{k=0}^3 \sigma_{\varphi\varphi,k}^{(i)}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(i)} = \sum_{k=0}^3 \sigma_{r\varphi,k}^{(i)},\end{aligned}\quad (11)$$

тут величини з індексами $k = 0$ характеризують осесиметричну частину задачі, з індексами $k > 0$ – малі відхилення від неї (збурену частину).

Задача теплопровідності. З урахуванням (11) розв'язок рівняння теплопровідності (1) подамо у вигляді

$$\begin{aligned}t_i(r, \varphi) = a_0^{(i)} \ln r + b_0^{(i)} + \sum_{k=1}^3 [(C_i^{(k)} r^{\ell_{km}} - D_i^{(k)} r^{-\ell_{km}}) \cos(\ell_{km}\varphi) + \\ + (X_i^{(k)} r^{\ell_{km}} - Y_i^{(k)} r^{-\ell_{km}}) \sin(\ell_{km}\varphi)].\end{aligned}\quad (12)$$

Застосувавши метод малого параметра [7], теплові умови після деяких перетворень набудуть вигляду

$$\begin{aligned}r = a : \quad \frac{\partial t_{1,0}}{\partial r} = \gamma_1 t_{1,0}, \quad \frac{\partial t_{1,k}}{\partial r} = \gamma_1 t_{1,k}; \\ r = b : \quad \frac{\partial t_{2,0}}{\partial r} = -\gamma_2 t_{2,0}, \quad \frac{\partial t_{2,k}}{\partial r} + d_k \cos(\ell_{km}\varphi) = -\gamma_2 t_{2,k};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r = c : \quad & \lambda_1 \frac{\partial t_{1,0}}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial t_{2,0}}{\partial r} = \omega f c p_0, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_{1,0}}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial t_{2,0}}{\partial r} + h(t_{1,0} - t_{2,0}) = 0, \\
& \lambda_1 \frac{\partial t_{1,k}}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial t_{2,k}}{\partial r} = \omega f c [p_k \cos(\ell_{km} \varphi) + q_k \sin(\ell_{km} \varphi)], \\
& \lambda_1 \frac{\partial t_{1,k}}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial t_{2,k}}{\partial r} + h(t_{1,k} - t_{2,k}) = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

У попередніх формулах позначено

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{b\gamma_2 - 1}{b} \varepsilon a_0^{(2)}, \quad d_2 = \frac{a_0^{(2)} \varepsilon^2}{24b} [9(m+1)^2 - b\gamma_2 - 15], \\
d_3 &= \frac{a_0^{(2)} \varepsilon^3}{24b} [8b\gamma_2 - 15 - 45(m+1)^2].
\end{aligned}$$

Як впливає зі співвідношення (13), поставлена задача звелася до послідовності гранично-контактних задач із умовами на колових контурах.

Задовольняючи теплові крайові та контактні умови (13), отримаємо

$$\begin{aligned}
a_0^{(1)} &= \frac{\gamma_1 a c^2 \omega f p_0}{\lambda_1 \gamma_1 a + \lambda_2 \gamma_2 b F}, \quad a_0^{(2)} = -\frac{\gamma_2 b c^2 \omega f F p_0}{\lambda_1 \gamma_1 a + \lambda_2 \gamma_2 b F}, \\
b_0^{(1)} &= \frac{(1 - \gamma_1 a \ln a) c^2 \omega f p_0}{\lambda_1 \gamma_1 a + \lambda_2 \gamma_2 b F}, \quad b_0^{(2)} = \frac{(1 + \gamma_2 b \ln b) c^2 \omega f F p_0}{\lambda_1 \gamma_1 a + \lambda_2 \gamma_2 b F}, \\
F &= \frac{\gamma_1 a (\lambda_1 + h c \ln c) + h c (1 - \gamma_1 a \ln a)}{\gamma_2 b (\lambda_2 - h c \ln c) + h c (1 + \gamma_2 b \ln b)},
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
X_1^{(k)} &= s_{1k} Y_1^{(k)}, \quad C_1^{(k)} = s_{1k} D_1^{(k)}, \\
C_2^{(k)} &= \frac{(\lambda_2 \ell_{km} + h c) p_{11} + \lambda_2 p_{21}}{2\lambda_2 h c^{2\ell_{km}+1}} D_1^{(k)} - \frac{(\lambda_2 \ell_{km} + h c) \omega f}{2\lambda_2 h \ell_{km} c^{2\ell_{km}}} p_k, \\
D_2^{(k)} &= \frac{(-\lambda_2 \ell_{km} + h c) p_{11} - \lambda_2 p_{21}}{2\lambda_2 h c} D_1^{(k)} + \frac{\lambda_2 \ell_{km} + h c (1 - 2c^{\ell_{km}+1}) \omega f}{2\lambda_2 h \ell_{km}} p_k, \\
X_2^{(k)} &= \frac{(\lambda_2 \ell_{km} + h c) p_{11} + \lambda_2 p_{21}}{2\lambda_2 h c^{2\ell_{km}+1}} Y_1^{(k)} - \frac{(\lambda_2 \ell_{km} + h c) \omega f}{2\lambda_2 h \ell_{km} c^{2\ell_{km}}} q_k, \\
D_1^{(k)} &= Q_{k,1} p_k + Q_{k,0}, \quad Y_1^{(k)} = Q_{k,1} q_k, \\
Y_2^{(k)} &= \frac{(-\lambda_2 \ell_{km} + h c) p_{11} - \lambda_2 p_{21}}{2\lambda_2 h c} Y_1^{(k)} + \frac{\lambda_2 \ell_{km} + h c (1 - 2c^{\ell_{km}+1}) \omega f}{2\lambda_2 h \ell_{km}} q_k,
\end{aligned} \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned}
s_{1k} &= \frac{a\gamma_1 + \ell_{km}}{a^{2\ell_{km}} (a\gamma_1 - \ell_{km})}, \quad p_{11} = \lambda_1 (1 + s_{1k} c^{2\ell_{km}}), \\
p_{21} &= s_{1k} (\lambda_1 \ell_{km} + h c) c^{2\ell_{km}} + \lambda_1 \ell_{km} - h c, \\
Q_{k,1} &= \frac{v_k^{(1)} w_{k,b}^{(1)} + v_k^{(2)} w_{k,b}^{(2)}}{v_k^{(1)} w_{k,0}^{(1)} + v_k^{(2)} w_{k,0}^{(2)}}, \quad Q_{k,0} = -\frac{d_k}{v_k^{(1)} w_{k,0}^{(1)} + v_k^{(2)} w_{k,0}^{(2)}}, \\
v_k^{(1)} &= b^{-\ell_{km}-1} (\ell_{km} - b\gamma_2), \quad v_k^{(2)} = b^{\ell_{km}-1} (\ell_{km} + b\gamma_2),
\end{aligned}$$

$$w_{k,0}^{(1)} = -\frac{(\lambda_2 \ell_{km} - hc)p_{11} + \lambda_2 p_{21}}{2hc\lambda_2}, \quad w_{k,0}^{(2)} = \frac{(\lambda_2 \ell_{km} + hc)p_{11} + \lambda_2 p_{21}}{2h\lambda_2 c^{2\ell_{km}+1}},$$

$$w_{k,b}^{(1)} = \frac{(\lambda_2 \ell_{km} - hc)\omega f c^{\ell_{km}+1}}{2\lambda_2 h \ell_{km}}, \quad w_{k,b}^{(2)} = -\frac{(\lambda_2 \ell_{km} + hc)\omega f}{2h \ell_{km} c^{\ell_{km}-1}}.$$

Для остаточного визначення температурного поля необхідно знати сталі інтегрування та сталі компоненти тиску p_0, p_k, q_k , які обчислюють вже після побудови розв'язку задачі термопружності.

Задача термопружності. Розв'язок диференціального рівняння (4) на основі подання (11) щодо функції напружень $\Phi^{(i)}(r, \varphi)$ подамо у вигляді

$$\Phi^{(i)}(r, \varphi) = \Phi_{0r}^{(i)}(r) + \Phi_{0\varphi}^{(i)}(\varphi) + \sum_{k=1}^3 [\Phi_{1k}^{(i)}(r) \cos(\ell_{km} \varphi) + \Phi_{2k}^{(i)}(r) \sin(\ell_{km} \varphi)],$$

$$\Phi_{0r}^{(i)}(r) = A_0^{(i)} \ln r + \bar{B}_0^{(i)} r^2 \ln r + \bar{C}_0^{(i)} r^2 + D_0^{(i)}, \quad \Phi_{0\varphi}^{(i)}(\varphi) = A^{(i)} \varphi,$$

$$\Phi_{jk}^{(i)}(r) = A_{jk}^{(i)} \frac{1}{r^{\ell_{km}}} + \bar{B}_{jk}^{(i)} \frac{1}{r^{\ell_{km}-2}} + C_{jk}^{(i)} r^{\ell_{km}} + \bar{D}_{jk}^{(i)} r^{\ell_{km}+2}, \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

Аналогічно розв'язок диференціального рівняння (5) подаємо виразами

$$\Psi^{(i)}(r, \varphi) = \Psi_{0r}^{(i)}(r) + \Psi_{0\varphi}^{(i)}(\varphi) + \sum_{k=1}^3 [\Psi_{1k}^{(i)}(r) \cos(\ell_{km} \varphi) + \Psi_{2k}^{(i)} \sin(\ell_{km} \varphi)],$$

$$\Psi_{0r}^{(i)}(r) = \frac{\alpha_i E_i}{4(1-\nu_i)} r^2 [a_0^{(i)} (\ln r - 1) + b_0^{(i)}], \quad \Psi_{0\varphi}^{(i)}(\varphi) = B^{(i)} \varphi,$$

$$\Psi_{1k}^{(i)}(r) = \frac{\alpha_i E_i}{4(1-\nu_i)} \left[\frac{1}{\ell_{km} + 1} C_i^{(k)} r^{\ell_{km}+2} + \frac{1}{\ell_{km} - 1} D_i^{(k)} r^{-\ell_{km}+2} \right],$$

$$\Psi_{2k}^{(i)}(r) = \frac{\alpha_i E_i}{2(1-\nu_i)} \left[\frac{1}{\ell_{km} + 1} X_i^{(k)} r^{\ell_{km}+2} + \frac{1}{\ell_{km} - 1} Y_i^{(k)} r^{-\ell_{km}+2} \right]. \quad (17)$$

Тут $i = 1, 2$ – номер труби; $m = 1, 2, 3$ – задає форму зовнішнього контуру труби 2; $k = 1, 2, 3$ – порядок наближення.

Введемо функцію $\chi^{(i)}(r, \varphi) = \Phi^{(i)}(r, \varphi) - \Psi^{(i)}(r, \varphi)$:

$$\chi^{(i)}(r, \varphi) = A_0^{(i)} \ln r + B_0^{(i)} r^2 \ln r + C_0^{(i)} r^2 + D_0^{(i)} + C^{(i)} \varphi +$$

$$+ [A_{1k}^{(i)} r^{-\ell_{km}} + B_{1k}^{(i)} r^{-\ell_{km}+2} + C_{1k}^{(i)} r^{\ell_{km}} + D_{1k}^{(i)} r^{\ell_{km}+2}] \cos(\ell_{km} \varphi) +$$

$$+ [A_{2k}^{(i)} r^{-\ell_{km}} + B_{2k}^{(i)} r^{-\ell_{km}+2} + C_{2k}^{(i)} r^{\ell_{km}} + D_{2k}^{(i)} r^{\ell_{km}+2}] \sin(\ell_{km} \varphi), \quad (18)$$

де позначено

$$B_{1k}^{(i)} = \bar{B}_{1k}^{(i)} - \frac{\alpha_i E_i}{4(1-\nu_i)(\ell_{km} - 1)} D_i^{(k)}, \quad B_{2k}^{(i)} = \bar{B}_{2k}^{(i)} - \frac{\alpha_i E_i}{4(1-\nu_i)(\ell_{km} - 1)} Y_i^{(k)},$$

$$D_{1k}^{(i)} = \bar{D}_{1k}^{(i)} - \frac{\alpha_i E_i}{4(1-\nu_i)(\ell_{km} + 1)} C_i^{(k)}, \quad D_{2k}^{(i)} = \bar{D}_{2k}^{(i)} - \frac{\alpha_i E_i}{4(1-\nu_i)(\ell_{km} + 1)} X_i^{(k)},$$

$$B_0^{(i)} = \bar{B}_0^{(i)} - \frac{\alpha_i E_i}{4(1-\nu_i)} a_0^{(i)}, \quad C_0^{(i)} = \bar{C}_0^{(i)} - \frac{\alpha_i E_i}{4(1-\nu_i)} (b_0^{(i)} - a_0^{(i)}),$$

$$C^{(i)} = A^{(i)} - B^{(i)}, \quad (19)$$

$A_0^{(i)}, \dots, A_{1k}^{(i)}, \dots, A_{2k}^{(i)}, \dots$ – сталі інтегрування, які визначаються з крайових і контактних умов.

На основі формул (8) напруження подамо у формі

$$\begin{aligned}\sigma_{rr,k}^{(i)}(r, \varphi) &= z_0^{(i)}(r) + z_{1,k}^{(i)}(r) \cos(\ell_{km} \varphi) + z_{2,k}^{(i)}(r) \sin(\ell_{km} \varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi,k}^{(i)}(r, \varphi) &= n_0^{(i)}(r) + n_{1,k}^{(i)}(r) \cos(\ell_{km} \varphi) + n_{2,k}^{(i)}(r) \sin(\ell_{km} \varphi), \\ \sigma_{r\varphi,k}^{(i)}(r, \varphi) &= m_0^{(i)}(r) + m_{1,k}^{(i)}(r) \cos(\ell_{km} \varphi) + m_{2,k}^{(i)}(r) \sin(\ell_{km} \varphi),\end{aligned}\quad (20)$$

де введено функції

$$\begin{aligned}z_0^{(i)}(r) &= A_0^{(i)} \frac{1}{r^2} + 2B_0^{(i)} \left(\ln r + \frac{1}{2} \right) + 2C_0^{(i)}, \\ n_0^{(i)}(r) &= -A_0^{(i)} \frac{1}{r^2} + 2B_0^{(i)} \left(\ln r + \frac{3}{2} \right) + 2C_0^{(i)}, \\ z_{j,k}^{(i)}(r) &= -\ell_{km} (\ell_{km} + 1) A_{jk}^{(i)} r^{-\ell_{km} - 2} - (\ell_{km} - 1) (\ell_{km} + 2) B_{jk}^{(i)} r^{-\ell_{km}} - \\ &\quad - \ell_{km} (\ell_{km} - 1) C_{jk}^{(i)} r^{\ell_{km} - 2} - (\ell_{km} + 1) (\ell_{km} - 2) D_{jk}^{(i)} r^{\ell_{km}}, \\ n_{j,k}^{(i)}(r) &= \ell_{km} (\ell_{km} + 1) A_{jk}^{(i)} r^{-\ell_{km} - 2} + (\ell_{km} - 1) (\ell_{km} - 2) B_{jk}^{(i)} r^{-\ell_{km}} + \\ &\quad + \ell_{km} (\ell_{km} - 1) C_{jk}^{(i)} r^{\ell_{km} - 2} + (\ell_{km} + 1) (\ell_{km} + 2) D_{jk}^{(i)} r^{\ell_{km}}, \\ m_0^{(i)}(r) &= C^{(i)} \frac{1}{r^2}, \quad m_{1,k}^{(i)}(r) = \ell_{km} (\ell_{km} + 1) A_{2k}^{(i)} r^{-\ell_{km} - 2} - \ell_{km} (\ell_{km} - 1) \times \\ &\quad \times B_{2k}^{(i)} r^{-\ell_{km}} - \ell_{km} (\ell_{km} - 1) C_{2k}^{(i)} r^{\ell_{km} - 2} - \ell_{km} (\ell_{km} + 1) D_{2k}^{(i)} r^{\ell_{km}}, \\ m_{2,k}^{(i)}(r) &= -\ell_{km} (\ell_{km} + 1) A_{1k}^{(i)} r^{-\ell_{km} - 2} - \ell_{km} (\ell_{km} - 1) B_{1k}^{(i)} r^{-\ell_{km}} + \\ &\quad + \ell_{km} (\ell_{km} - 1) C_{1k}^{(i)} r^{\ell_{km} - 2} + \ell_{km} (\ell_{km} + 1) D_{1k}^{(i)} r^{\ell_{km}}, \quad j = 1, 2.\end{aligned}\quad (21)$$

Зінтегрувавши формули (9), з урахуванням співвідношень (20) і (21) отримуємо

$$\begin{aligned}u_{r,k}^{(i)} &= \frac{1 + \nu_i}{E_i} \left\{ -A_0^{(i)} \frac{1}{r} + [2(1 - 2\nu_i) B_0^{(i)} + \alpha_i E_i a_0^{(i)}] r \ln r + [-B_0^{(i)} + \right. \\ &\quad \left. + 2(1 - 2\nu_i) C_0^{(i)} + \alpha_i E_i (b_0^{(i)} - a_0^{(i)})] r \right\} + \frac{1 + \nu_i}{E_i} \left[\ell_{km} A_{1k}^{(i)} r^{-\ell_{km} - 1} + \right. \\ &\quad \left. + (2 - 4\nu_i + \ell_{km}) B_{1k}^{(i)} r^{-\ell_{km} + 1} - \ell_{km} C_{1k}^{(i)} r^{\ell_{km} - 1} + (2 - 4\nu_i - \right. \\ &\quad \left. - \ell_{km}) D_{1k}^{(i)} r^{\ell_{km} + 1} + \alpha_i E_i \left(\frac{C_i^{(k)} r^{\ell_{km} + 1}}{\ell_{km} + 1} + \frac{D_i^{(k)} r^{-\ell_{km} + 1}}{\ell_{km} - 1} \right) \right] \cos(\ell_{km} \varphi) + \\ &\quad + \frac{1 + \nu_i}{E_i} \left[\ell_{km} A_{2k}^{(i)} r^{-\ell_{km} - 1} + (2 - 4\nu_i + \ell_{km}) B_{2k}^{(i)} r^{-\ell_{km} + 1} - \right. \\ &\quad \left. - \ell_{km} C_{2k}^{(i)} r^{\ell_{km} - 1} + (2 - 4\nu_i - \ell_{km}) D_{2k}^{(i)} r^{\ell_{km} + 1} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_i E_i \left(\frac{X_i^{(k)} r^{\ell_{km} + 1}}{\ell_{km} + 1} + \frac{Y_i^{(k)} r^{-\ell_{km} + 1}}{\ell_{km} - 1} \right) \right] \sin(\ell_{km} \varphi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\varphi,k}^{(i)} = & S_1^{(i)} r + S_2^{(i)} \frac{1}{r} + \frac{1+v_i}{E_i} \left[\ell_{km} A_{1k}^{(i)} r^{-\ell_{km}-1} + (4v_i - 4 + \ell_{km}) B_{1k}^{(i)} r^{-\ell_{km}+1} + \right. \\
& + \ell_{km} C_{1k}^{(i)} r^{\ell_{km}-1} + (4 - 4v_i + \ell_{km}) D_{1k}^{(i)} r^{\ell_{km}+1} + \\
& \left. + \alpha_i E_i \left(\frac{C_i^{(k)} r^{\ell_{km}+1}}{\ell_{km}+1} - \frac{D_i^{(k)} r^{-\ell_{km}+1}}{\ell_{km}-1} \right) \right] \sin(\ell_{km} \varphi) - \\
& - \frac{1+v_i}{E_i} \left[\ell_{km} A_{2k}^{(i)} r^{-\ell_{km}-1} + (4v_i - 4 + \ell_{km}) B_{2k}^{(i)} r^{-\ell_{km}+1} + \right. \\
& + \ell_{km} C_{2k}^{(i)} r^{\ell_{km}-1} + (4 - 4v_i + \ell_{km}) D_{2k}^{(i)} r^{\ell_{km}+1} + \\
& \left. + \alpha_i E_i \left(\frac{X_i^{(k)} r^{\ell_{km}+1}}{\ell_{km}+1} - \frac{Y_i^{(k)} r^{-\ell_{km}+1}}{\ell_{km}-1} \right) \right] \cos(\ell_{km} \varphi). \quad (22)
\end{aligned}$$

З умови однозначності переміщень отримаємо

$$B_0^{(i)} = -\frac{\alpha_i E_i a_0^{(i)}}{4(1-v_i)}. \quad (23)$$

Параметри $A_0^{(i)}$, $C_0^{(i)}$, $C^{(i)}$, $S_1^{(i)}$, $S_2^{(i)}$, p_0 визначаються з крайових і контактних умов для осесиметричної задачі

$$\begin{aligned}
r = a : \quad & \sigma_{rr,0}^{(1)} = -P_1, \quad u_{\varphi,0}^{(1)} = 0; \\
r = b : \quad & \sigma_{rr,0}^{(2)} = -P_2, \quad u_{\varphi,0}^{(2)} = 0; \\
r = c : \quad & \sigma_{rr,0}^{(1)} = \sigma_{rr,0}^{(2)} = -p_0, \quad \sigma_{r\varphi,0}^{(1)} = \sigma_{r\varphi,0}^{(2)} = -fp_0, \quad u_{r,0}^{(1)} = u_{r,0}^{(2)}, \quad (24)
\end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned}
A_0^{(1)} &= \frac{a^2 c^2}{c^2 - a^2} \left[-P_1 + p_0 + \frac{\alpha_1 E_1 a_0^{(1)}}{2(1-v_1)} \ln \frac{a}{c} \right], \\
A_0^{(2)} &= \frac{b^2 c^2}{c^2 - b^2} \left[-P_2 + p_0 + \frac{\alpha_2 E_2 a_0^{(2)}}{2(1-v_2)} \ln \frac{b}{c} \right], \\
C_0^{(1)} &= \frac{1}{2(c^2 - a^2)} \left[a^2 P_1 - c^2 p_0 + \frac{\alpha_1 E_1 a_0^{(1)} R_{11}}{4(1-v_1)} \right], \\
C_0^{(2)} &= \frac{1}{2(c^2 - b^2)} \left[b^2 P_2 - c^2 p_0 + \frac{\alpha_2 E_2 a_0^{(2)} R_{22}}{4(1-v_2)} \right], \\
S_1^{(1)} &= -\frac{1+v_1}{E_1} \frac{c}{a^2} fp_0, \quad S_1^{(2)} = -\frac{1+v_2}{E_2} \frac{c}{b^2} fp_0, \\
S_2^{(i)} &= -\frac{2(1+v_i)}{E_i} cf p_0, \quad C^{(i)} = -c^2 fp_0, \\
R_{11} &= c^2(2 \ln c + 1) - a^2(2 \ln a - 1), \\
R_{22} &= c^2(2 \ln c - 1) - b^2(2 \ln b - 1), \quad (25)
\end{aligned}$$

$$p_0 = \frac{K_1 P_1 + K_2 P_2}{(K_p^{(1)} + K_p^{(2)}) - \omega f (K_T^{(1)} + K_T^{(2)})}. \quad (26)$$

У формулі (26) використано такі позначення:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{2(1-v_1)a^2}{c^2-a^2}, & K_2 &= \frac{2(1-v_2)b^2}{b^2-c^2}, \\
K_p^{(1)} &= \frac{a^2+2c^2(1-2v_1)}{c^2-a^2}, & K_p^{(2)} &= -\frac{b^2+2c^2(1-2v_2)}{c^2-b^2}, \\
K_T^{(1)} &= \frac{\alpha_1 E_1 a_0^{(1)}}{\omega f p_0} \left\{ \frac{1}{2(1-v_1)} \left[\frac{a^2}{c^2-a^2} \ln \frac{a}{c} + (1-2v_1)(\ln c - R_{11}) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4(1-v_1)} - 2 \left[\frac{b_0^{(1)}}{a_0^{(1)}} - \ln c - 1 \right] \right\}, \\
K_T^{(2)} &= \frac{\alpha_2 E_2 a_0^{(2)}}{\omega f p_0} \left\{ \frac{1}{2(1-v_2)} \left[\frac{b^2}{c^2-b^2} \ln \frac{b}{c} + (1-v_2)(\ln c - R_{22}) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4(1-v_2)} - 2 \left[\frac{b_0^{(2)}}{a_0^{(2)}} - \ln c - 1 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Внаслідок застосування методу малого параметра [7] механічним умовам для збуреної частини задачі можна після деяких перетворень надати такого вигляду:

$$\begin{aligned}
r = a : \quad \sigma_{rr,k}^{(1)} &= 0, & u_{\varphi,k}^{(1)} &= 0; \\
r = b : \quad \sigma_{r,k}^{(2)} &= \varepsilon_{1k} \cos(\ell_{km} \varphi) - \varepsilon_{2k} \sin(\ell_{km} \varphi), \\
u_{\varphi,k}^{(2)} &= \varepsilon_{3k} \sin(\ell_{km} \varphi) - \varepsilon_{4k} \cos(\ell_{km} \varphi); \\
r = c : \quad \sigma_{rr,k}^{(1)} &= \sigma_{rr,k}^{(2)} = -p_k \cos(\ell_{km} \varphi) - q_k \sin(\ell_{km} \varphi), \\
\sigma_{r\varphi,k}^{(1)} &= \sigma_{r\varphi,k}^{(2)} = -f q_k \cos(\ell_{km} \varphi) - f p_k \sin(\ell_{km} \varphi), \\
u_{r,k}^{(1)} &= u_{r,k}^{(2)}. \tag{27}
\end{aligned}$$

У попередніх формулах

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= 2\varepsilon \left(-\frac{1}{b^2} A_0^{(2)} + B_0^{(2)} \right), & \varepsilon_{21} &= -\frac{2(m+1)c^2 f p_0 \varepsilon}{b^2}, \\
\varepsilon_{12} &= \varepsilon^2 \left[-\frac{(m+1)^2+2}{b^2} A_0^{(2)} + ((m+1)^2+1) B_0^{(2)} \right], & \varepsilon_{22} &= \frac{4(m+1)c^2 f p_0 \varepsilon^2}{b^2}, \\
\varepsilon_{13} &= \varepsilon^3 \left[\frac{3(m+1)^2+5}{b^2} A_0^{(2)} - \left(2(m+1)^2 + \frac{7}{6} \right) B_0^{(2)} \right], & \varepsilon_{31} &= (m+1) \varepsilon u_{r,0}^{(2)}(b), \\
\varepsilon_{23} &= -\frac{(m+1)[0.5(m+1)^2+6]c^2 f p_0 \varepsilon^3}{b^2}, \\
\varepsilon_{32} &= -(m+1) \varepsilon^2 \left[u_{r,0}^{(2)}(b) - \frac{b}{2} \frac{\partial u_{r,0}^{(2)}}{\partial r}(b) \right], \\
\varepsilon_{33} &= -\varepsilon^3 (m+1) \left[\left(1 + \frac{(m+1)^2}{8} \right) u_{r,0}^{(2)}(b) + \frac{5b}{8} \frac{\partial u_{r,0}^{(2)}}{\partial r}(b) - \frac{b^2}{8} \frac{\partial^2 u_{r,0}^{(2)}}{\partial r^2}(b) \right], \\
\varepsilon_{41} &= -\frac{2c^2 f p_0 \varepsilon}{b}, & \varepsilon_{42} &= \frac{c^2 f p_0 \varepsilon^2}{b}, & \varepsilon_{43} &= -\frac{[3+(m+1)^2]c^2 f p_0 \varepsilon^3}{4b},
\end{aligned}$$

$$u_{r,0}^{(2)}(b) = \frac{(1 + \nu_2)b}{E_2} \left\{ \frac{1}{b^2} A_0^{(2)} + [2(1 - 2\nu_2) \ln b - 1] B_0^{(2)} + 2(1 - 2\nu_2) C_0^{(2)} + \right. \\ \left. + \alpha_2 E_2 [(\ln b - 1) a_0^{(2)} + b_0^{(2)}] \right\},$$

$$\frac{\partial u_{r,0}^{(2)}}{\partial r}(b) = \frac{1 + \nu_2}{E_2} \left\{ \frac{1}{b^2} A_0^{(2)} + [2(1 - 2\nu_2) \ln b + (1 - 4\nu_2)] B_0^{(2)} + \right. \\ \left. + 2(1 - 2\nu_2) C_0^{(2)} + \alpha_2 E_2 (a_0^{(2)} \ln b + b_0^{(2)}) \right\},$$

$$\frac{\partial^2 u_{r,0}^{(2)}}{\partial r^2}(b) = \frac{1 + \nu_2}{b E_2} \left\{ -\frac{2}{b^2} A_0^{(2)} + 2(1 - 2\nu_2) B_0^{(2)} + \alpha_2 E_2 a_0^{(2)} \right\}.$$

Підставляючи значення напружень (20) і переміщень (22) у крайові та контактні умови (27) для збуреної задачі, отримаємо

$$r = a : \sigma_{rr,k}^{(1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\ell_{km}(\ell_{km} + 1)}{a^{\ell_{km}+2}} A_{1k}^{(1)} + \frac{(\ell_{km} - 1)(\ell_{km} + 2)}{a^{\ell_{km}}} B_{1k}^{(1)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km} - 1)}{a^{-\ell_{km}+2}} C_{1k}^{(1)} + \\ + \frac{(\ell_{km} + 1)(\ell_{km} - 2)}{a^{-\ell_{km}}} D_{1k}^{(1)} = 0,$$

$$\frac{\ell_{km}(\ell_{km} + 1)}{a^{\ell_{km}+2}} A_{2k}^{(1)} + \frac{(\ell_{km} - 1)(\ell_{km} + 2)}{a^{\ell_{km}}} B_{2k}^{(1)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km} - 1)}{a^{-\ell_{km}+2}} C_{2k}^{(1)} + \\ + \frac{(\ell_{km} + 1)(\ell_{km} - 2)}{a^{-\ell_{km}}} D_{2k}^{(1)} = 0;$$

$$r = a : u_{\varphi,k}^{(1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\ell_{km} A_{1k}^{(1)}}{a^{\ell_{km}+1}} + \frac{(4\nu_1 - 4 + \ell_{km}) B_{1k}^{(1)}}{a^{\ell_{km}-1}} + \frac{\ell_{km} C_{1k}^{(1)}}{a^{-\ell_{km}+1}} + \\ + \frac{(4 - 4\nu_1 + \ell_{km}) D_{1k}^{(1)}}{a^{-\ell_{km}-1}} + f_{1k}^{(1)}(a) = 0,$$

$$\frac{\ell_{km} A_{2k}^{(1)}}{a^{\ell_{km}+1}} + \frac{(4\nu_2 - 4 + \ell_{km}) B_{2k}^{(1)}}{a^{\ell_{km}-1}} + \frac{\ell_{km} C_{2k}^{(1)}}{a^{-\ell_{km}+1}} + \\ + \frac{(4 - 4\nu_2 + \ell_{km}) D_{2k}^{(1)}}{a^{-\ell_{km}-1}} + g_{1k}^{(1)}(a) = 0;$$

$$r = b : \sigma_{rr,k}^{(2)} = \varepsilon_{1k} \cos(\ell_{km} \varphi) - \varepsilon_{2k} \sin(\ell_{km} \varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{\ell_{km}(\ell_{km} + 1)}{b^{\ell_{km}+2}} A_{1k}^{(2)} + \frac{(\ell_{km} - 1)(\ell_{km} + 2)}{b^{\ell_{km}}} B_{1k}^{(2)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km} - 1)}{b^{-\ell_{km}+2}} C_{1k}^{(2)} + \\ + \frac{(\ell_{km} + 1)(\ell_{km} - 2)}{b^{-\ell_{km}}} D_{1k}^{(2)} = \varepsilon_{1k},$$

$$\frac{\ell_{km}(\ell_{km} + 1)}{b^{\ell_{km}+2}} A_{2k}^{(2)} + \frac{(\ell_{km} - 1)(\ell_{km} + 2)}{b^{\ell_{km}}} B_{2k}^{(2)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km} - 1)}{b^{-\ell_{km}+2}} C_{2k}^{(2)} + \\ + \frac{(\ell_{km} + 1)(\ell_{km} - 2)}{b^{-\ell_{km}}} D_{2k}^{(2)} = \varepsilon_{2k};$$

$$r = b : u_{\varphi,k}^{(2)} = \varepsilon_{3k} \sin(\ell_{km} \varphi) - \varepsilon_{4k} \cos(\ell_{km} \varphi) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell_{km} A_{1k}^{(2)}}{b^{\ell_{km}+1}} + \frac{(4\nu_1 - 4 + \ell_{km}) B_{1k}^{(2)}}{b^{\ell_{km}-1}} + \frac{\ell_{km} C_{1k}^{(2)}}{b^{-\ell_{km}+1}} + \frac{(4 - 4\nu_1 + \ell_{km}) D_{1k}^{(2)}}{b^{-\ell_{km}-1}} + \\ + f_{2k}^{(2)}(b) = \varepsilon_{3k}, \\ \frac{\ell_{km} A_{2k}^{(2)}}{b^{\ell_{km}+1}} + \frac{(4\nu_2 - 4 + \ell_{km}) B_{2k}^{(2)}}{b^{\ell_{km}-1}} + \frac{\ell_{km} C_{2k}^{(2)}}{b^{-\ell_{km}+1}} + \frac{(4 - 4\nu_2 + \ell_{km}) D_{2k}^{(2)}}{b^{-\ell_{km}-1}} + \\ + g_{2k}^{(2)}(b) = \varepsilon_{4k}; \end{aligned}$$

$$r = c : \sigma_{rr,k}^{(1)} = -p_k \cos(\ell_{km} \varphi) - q_k \sin(\ell_{km} \varphi) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell_{km}(\ell_{km}+1)}{c^{\ell_{km}+2}} A_{1k}^{(1)} + \frac{(\ell_{km}-1)(\ell_{km}+2)}{c^{\ell_{km}}} B_{1k}^{(1)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km}-1)}{c^{-\ell_{km}+2}} C_{1k}^{(1)} + \\ + \frac{(\ell_{km}+1)(\ell_{km}-2)}{c^{-\ell_{km}}} D_{1k}^{(1)} = p_k, \\ \frac{\ell_{km}(\ell_{km}+1)}{c^{\ell_{km}+2}} A_{2k}^{(1)} + \frac{(\ell_{km}-1)(\ell_{km}+2)}{c^{\ell_{km}}} B_{2k}^{(1)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km}-1)}{c^{-\ell_{km}+2}} C_{2k}^{(1)} + \\ + \frac{(\ell_{km}+1)(\ell_{km}-2)}{c^{-\ell_{km}}} D_{2k}^{(1)} = q_k; \end{aligned}$$

$$r = c : \sigma_{rr,k}^{(2)} = -p_k \cos(\ell_{km} \varphi) - q_k \sin(\ell_{km} \varphi) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell_{km}(\ell_{km}+1)}{c^{\ell_{km}+2}} A_{1k}^{(2)} + \frac{(\ell_{km}-1)(\ell_{km}+2)}{c^{\ell_{km}}} B_{1k}^{(2)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km}-1)}{c^{-\ell_{km}+2}} C_{1k}^{(2)} + \\ + \frac{(\ell_{km}+1)(\ell_{km}-2)}{c^{-\ell_{km}}} D_{1k}^{(2)} = p_k, \\ \frac{\ell_{km}(\ell_{km}+1)}{c^{\ell_{km}+2}} A_{2k}^{(2)} + \frac{(\ell_{km}-1)(\ell_{km}+2)}{c^{\ell_{km}}} B_{2k}^{(2)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km}-1)}{c^{-\ell_{km}+2}} C_{2k}^{(2)} + \\ + \frac{(\ell_{km}+1)(\ell_{km}-2)}{c^{-\ell_{km}}} D_{2k}^{(2)} = q_k; \end{aligned}$$

$$r = c : \sigma_{r\varphi,k}^{(1)} = -fq_k \cos(\ell_{km} \varphi) - fp \sin(\ell_{km} \varphi) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell_{km}(\ell_{km}+1)}{c^{\ell_{km}+2}} A_{1k}^{(1)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km}-1)}{c^{\ell_{km}}} B_{1k}^{(1)} - \frac{\ell_{km}(\ell_{km}-1)}{c^{-\ell_{km}+2}} C_{1k}^{(1)} - \\ - \frac{\ell_{km}(\ell_{km}+1)}{c^{-\ell_{km}}} D_{1k}^{(1)} = fq_k, \\ \frac{\ell_{km}(\ell_{km}+1)}{c^{\ell_{km}+2}} A_{2k}^{(1)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km}-1)}{c^{\ell_{km}}} B_{2k}^{(1)} - \frac{\ell_{km}(\ell_{km}-1)}{c^{-\ell_{km}+2}} C_{2k}^{(1)} - \\ - \frac{\ell_{km}(\ell_{km}+1)}{c^{-\ell_{km}}} D_{2k}^{(1)} = fp_k; \end{aligned}$$

$$r = c : \sigma_{r\varphi,k}^{(2)} = -fq_k \cos(\ell_{km} \varphi) - fp \sin(\ell_{km} \varphi) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell_{km}(\ell_{km}+1)}{c^{\ell_{km}+2}} A_{1k}^{(2)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km}-1)}{c^{\ell_{km}}} B_{1k}^{(2)} - \frac{\ell_{km}(\ell_{km}-1)}{c^{-\ell_{km}+2}} C_{1k}^{(2)} - \\ - \frac{\ell_{km}(\ell_{km}+1)}{c^{-\ell_{km}}} D_{1k}^{(2)} = fq_k, \end{aligned}$$

$$\frac{\ell_{km}(\ell_{km} + 1)}{c^{\ell_{km} + 2}} A_{2k}^{(2)} + \frac{\ell_{km}(\ell_{km} - 1)}{c^{\ell_{km}}} B_{2k}^{(2)} - \frac{\ell_{km}(\ell_{km} - 1)}{c^{-\ell_{km} + 2}} C_{2k}^{(2)} - \frac{\ell_{km}(\ell_{km} + 1)}{c^{-\ell_{km}}} D_{2k}^{(2)} = fp_k;$$

$$r = c : u_{r,k}^{(1)} = u_{r,k}^{(2)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \frac{\ell_{km}}{c^{\ell_{km} + 1}} A_{1k}^{(1)} + \frac{2 - 4v_1 + \ell_{km}}{c^{\ell_{km} - 1}} B_{1k}^{(1)} - \frac{\ell_{km}}{c^{-\ell_{km} + 1}} C_{1k}^{(1)} + \\ & + \frac{2 - 4v_1 - \ell_{km}}{c^{-\ell_{km} - 1}} D_{1k}^{(1)} + f_{1k}^{(1)}(c) = \\ & = \frac{\ell_{km}}{c^{\ell_{km} + 1}} A_{1k}^{(2)} + \frac{2 - 4v_2 + \ell_{km}}{c^{\ell_{km} - 1}} B_{1k}^{(2)} - \frac{\ell_{km}}{c^{-\ell_{km} + 1}} C_{1k}^{(2)} + \\ & + \frac{2 - 4v_2 - \ell_{km}}{c^{-\ell_{km} - 1}} D_{1k}^{(2)} + f_{2k}^{(2)}(c), \\ & \frac{\ell_{km}}{c^{\ell_{km} + 1}} A_{2k}^{(1)} + \frac{2 - 4v_1 + \ell_{km}}{c^{\ell_{km} - 1}} B_{2k}^{(1)} - \frac{\ell_{km}}{c^{-\ell_{km} + 1}} C_{2k}^{(1)} + \\ & + \frac{2 - 4v_1 - \ell_{km}}{c^{-\ell_{km} - 1}} D_{2k}^{(1)} + g_{1k}^{(1)}(c) = \\ & = \frac{\ell_{km}}{c^{\ell_{km} + 1}} A_{2k}^{(2)} + \frac{2 - 4v_2 + \ell_{km}}{c^{\ell_{km} - 1}} B_{2k}^{(2)} - \frac{\ell_{km}}{c^{-\ell_{km} + 1}} C_{2k}^{(2)} + \\ & + \frac{2 - 4v_2 - \ell_{km}}{c^{-\ell_{km} - 1}} D_{2k}^{(2)} + g_{2k}^{(2)}(c). \end{aligned} \quad (28)$$

Тут

$$\begin{aligned} f_{jk}^{(s)}(x) &= \alpha_j E_j \left[\frac{x^{\ell_{km} + 1}}{\ell_{km} + 1} C_j^{(k)} - \frac{x^{-\ell_{km} + 1}}{\ell_{km} - 1} D_j^{(k)} \right], \\ g_{jk}^{(s)}(x) &= \alpha_j E_j \left[\frac{x^{\ell_{km} + 1}}{\ell_{km} + 1} X_j^{(k)} - \frac{x^{-\ell_{km} + 1}}{\ell_{km} - 1} Y_j^{(k)} \right], \\ j &= 1, 2, \quad s = 1, 2, \quad x = \{a, b, c\}. \end{aligned}$$

Отже, отримано систему рівнянь (28) для визначення невідомих параметрів $A_{jk}^{(i)}$, $B_{jk}^{(i)}$, $C_{jk}^{(i)}$, $D_{jk}^{(i)}$, p_k , q_k , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$. Кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих.

3. Числовий аналіз задачі. Здійснено числовий аналіз задачі для еліптичної ($m = 1$), трикутної ($m = 2$) та чотирикутної ($m = 3$) труби за таких вхідних даних:

$$a = 0.1 \text{ м}, \quad c = 2a, \quad b = 3a, \quad P_1 = 5.2 \cdot 10^5 \text{ кПа}, \quad P_2 = 2.6 \cdot 10^5 \text{ кПа},$$

$$\omega = 3.0 \text{ с}^{-1}, \quad h = 5000 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{°C}), \quad \gamma_1 = 0.1 \text{ м}^{-1}, \quad \gamma_2 = 0.05 \text{ м}^{-1}.$$

Перша труба (внутрішня) сталевана:

$$E_1 = 1.9 \cdot 10^8 \text{ кПа}, \quad v_1 = 0.3, \quad \lambda_1 = 21 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{°C}), \quad \alpha_1 = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ °C}^{-1}.$$

Друга труба (зовнішня) мідна:

$$E_2 = 1.21 \cdot 10^8 \text{ кПа}, \quad v_2 = 0.33, \quad \lambda_2 = 381 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{°C}), \quad \alpha_2 = 1.7 \cdot 10^{-7} \text{ °C}^{-1}.$$

Обчислено коефіцієнти компонент контактної тиску (3) за вищезгаданих даних:

а) для еліптичної труби ($m = 1$):

$$p_0 = 298535 \text{ кПа}, \quad p_1 = 2561.59 \text{ кПа}, \quad q_1 = -9508.73 \text{ кПа}, \quad p_2 = 803.744 \text{ кПа}, \\ q_2 = 1193.62 \text{ кПа}, \quad p_3 = -93.0536 \text{ кПа}, \quad q_3 = -23.4642 \text{ кПа};$$

б) для трикутної труби із заокругленими кутами ($m = 2$):

$$p_0 = 298536 \text{ кПа}, \quad p_1 = 4562.17 \text{ кПа}, \quad q_1 = -12538.1 \text{ кПа}, \quad p_2 = 1071.91 \text{ кПа}, \\ q_2 = 1768.39 \text{ кПа}, \quad p_3 = -128.847 \text{ кПа}, \quad q_3 = -14.9665 \text{ кПа};$$

в) для чотирикутної труби із заокругленими кутами ($m = 3$):

$$p_0 = 298536 \text{ кПа}, \quad p_1 = 12536.7 \text{ кПа}, \quad q_1 = -18045.2 \text{ кПа}, \quad p_2 = 2670.67 \text{ кПа}, \\ q_2 = 4483.38 \text{ кПа}, \quad p_3 = -454.147 \text{ кПа}, \quad q_3 = -18.7831 \text{ кПа}.$$

Дослідження впливу збурювального параметра ε на розподіл безрозмірних радіальних напружень $\tilde{\sigma}_{rr}(r, \varphi)$ ($\tilde{\sigma}_{rr}(r, \varphi) \equiv |\sigma_{rr}(r, \varphi)| / P_2$) від безрозмірної радіальної координати r/a для різних значень збурювального параметра ε при $\varphi = 0^\circ$ в еліптичній ($m = 1$) трубі подано на рис. 3а; у трубі, зовнішня поверхня якої є трикутником із заокругленими кутами ($m = 2$) – на рис. 3б; у трубі, зовнішня поверхня якої має вигляд чотирикутника із заокругленими кутами ($m = 3$) – на рис. 3в. Тут лінія 1 відповідає значенню $\varepsilon = 0$ (збігається з розв'язком осесиметричної задачі для двошарової циліндричної труби); лінія 2 – $\varepsilon = 0.05$; лінія 3 – $\varepsilon = 0.1$; лінія 4 – $\varepsilon = 0.2$; лінія 5 – $\varepsilon = 0.3$; лінія 6 – $\varepsilon = 0.4$.

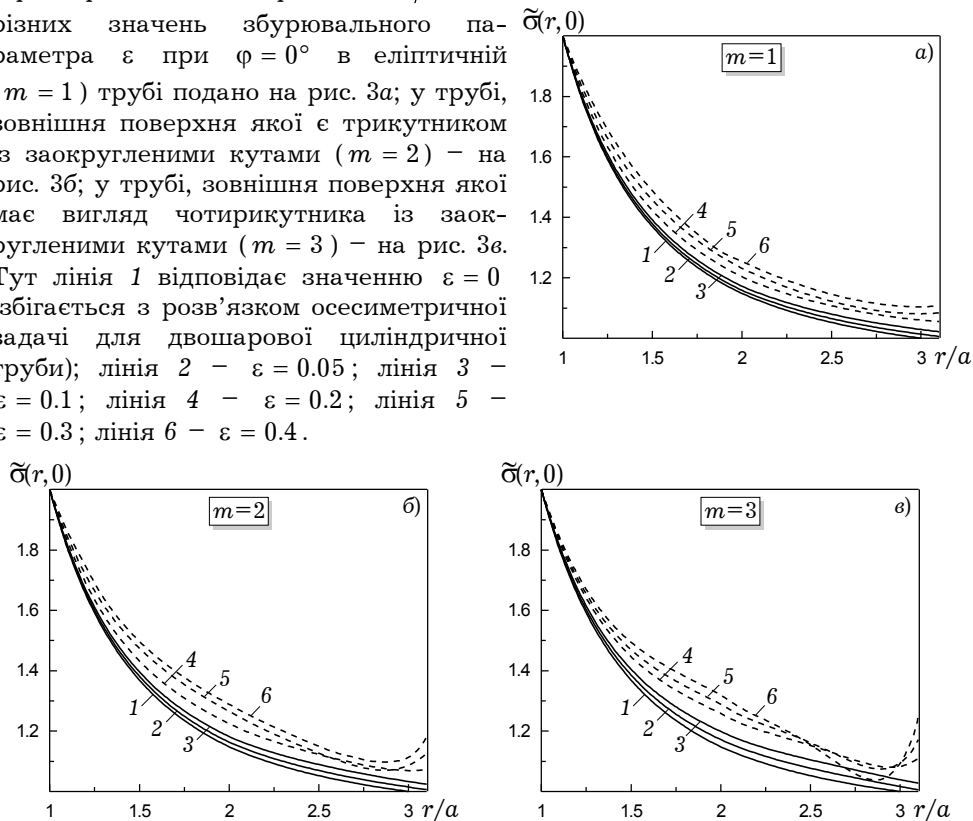


Рис. 3

Як бачимо на рис. 3, збільшення параметра ε призводить до збільшення відхилення отриманих результатів радіальних напружень від заданих на зовнішній поверхні зовнішньої труби рівностями (6), а, отже, до збільшення похибки обчислень. Збільшення значення m – кількості кутів зовнішнього профілю труби 2, теж збільшує відхилення отриманих результатів радіальних напружень від заданих на зовнішній поверхні зовнішньої труби рівностями (6). Це добре видно, якщо зіставити лінії 4, 5, 6 на рис. 3а, б, в.

Величину відносної похибки $\Delta = |P_2 - \sigma_{rr}(r, \varphi)| / P_2 \cdot 100$ % задовольняння крайової умови (6) на зовнішньому контурі двошарової трибосистеми за різних значень збурювального параметра ε , полярного кута φ та параметра m наведено у табл. 1 (значення подано у %).

Таблиця 1

ε	двошарова еліптична труба ($m = 1$)			двошарова трикутна труба ($m = 2$)			двошарова чотирикутна труба ($m = 3$)		
	0°	45°	90°	0°	45°	90°	0°	45°	90°
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.01	0.0105	0.4164	0.0111	0.0099	0.4697	0.5978	0.0027	0.7736	0.0070
0.02	0.0407	0.8484	0.0459	0.0367	1.0132	1.1654	0.0034	1.6820	0.0366
0.03	0.0891	1.2949	0.1063	0.0768	1.6317	1.7009	0.0061	2.7285	0.1013
0.04	0.2968	1.7549	0.1946	0.2908	2.3257	2.2026	0.1861	3.9167	0.2117
0.05	0.5869	2.2274	0.3128	0.6044	3.0957	2.6688	0.5155	5.2504	0.3760
0.06	0.8860	2.7111	0.4628	0.9374	3.9420	3.0977	0.8853	6.7330	0.5992
0.07	1.1933	3.2051	0.6464	1.2890	4.8643	3.4876	1.2964	8.3677	0.8836
0.08	1.5078	3.7082	0.8653	1.6585	5.8619	3.8367	1.7502	10.1574	1.2284
0.09	1.8286	4.2192	1.1210	2.0450	6.9340	4.1433	2.2479	12.1043	1.6302
0.10	2.1548	4.7369	1.4147	2.4477	8.0790	4.4054	2.7907	14.2102	2.0834
0.15	3.8344	7.3820	3.4875	4.2052	13.3484	4.9718	5.4371	24.2464	4.2347
0.20	5.5100	9.9936	6.6412	7.1944	23.0073	4.1472	10.9661	41.6594	7.3219
0.25	7.0662	12.3710	11.1308	9.9003	32.2035	1.5999	17.1702	56.2948	8.7033
0.30	8.3874	14.2900	18.0432	12.6963	42.0324	2.8861			

Як видно із табл. 1, значення похибки швидко зростає за значень збурювального параметра $\varepsilon > 0.1$ (для двошарової еліптичної і трикутної труби), а для чотирикутної труби із заокругленими кутами – вже при $\varepsilon > 0.08$ за певних значень полярного кута перевищує 10%.

Висновки. За допомогою методу збурення форми межі побудовано наближений розв'язок плоскої статичної гранично-контактної термопружної задачі для двошарової m -кутної труби, яка перебуває під дією нерівномірно розподіленого фрикційного температурного поля і рівномірно розподіленого зовнішнього та внутрішнього тисків. Цей розв'язок точно задовольняє диференціальне рівняння теплопровідності та рівняння на функції напружень, контактні умови складових труб та умови на внутрішньому контурі двошарової системи. Лише теплові та механічні умови на зовнішньому контурі задовольняються наближено і за величиною похибки їх виконання можна судити про точність отриманих результатів. Числовий аналіз задачі свідчить, що збільшення малого параметра ε веде до збільшення відхилення значень радіальних напружень від заданих на границі $r = 0.3$ м ($r/a = 3$) двошарової трибосистеми, а, отже, до збільшення похибки обчислень. Також збільшення параметра m (кількості кутів двошарової m -кутної труби з заокругленими кутами) за фіксованого значення збурювального параметра ε спричиняє збільшення відхилення значень радіальних напружень від заданих на границі $r = 0.3$ м ($r/a = 3$) двошарової трибосистеми. Відносна похибка Δ задоволення крайової умови (6) на зовнішньому контурі двошарової трибосистеми за різних значень збурювального параметра ε і різних значень полярного кута φ для двошарової трибосистеми швидко збільшується при значеннях збурювального параметра $\varepsilon > 0.1$ (для двошарової еліптичної і трикутної труби), а для чотирикутної труби із заокругленими кутами – при $\varepsilon > 0.08$ і складає більше 10%. Отже, збіль-

шення параметра ε за тими межами спричиняє те, що задача в такій постановці не дає достатньо точного результату і слід використовувати інші підходи до її розв'язання. Однак технологічні збурення форми не можуть спричинити настільки великих значень параметра ε . Отже, щоб задовольнити крайову умову (6) на зовнішньому контурі двошарової трибосистеми, можна користуватися значеннями $\varepsilon = 0 \div 0.08$. При $0 \leq \varepsilon \leq 0.03$ похибка не перевищує 3%.

1. Грилицький Д. В., Евтушенко А. А., Паук В. И. Плоская контактная задача нестационарной термоупругости с учётом теплообразования от трения // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1994. – № 5. – С. 62–68.
2. Грилицький Д. В., Баран В. П. Про постановку контактних задач термопружності при неідеальному тепловому контакті тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1987. – Вип. 27. – С. 10–13.
3. Грилицький Д. В., Грилицький М. Д., Білан Б. С. Статична термопружна рівновага двошарової кругової ексцентричної труби при обтисненні та фрикційному нагріванні // Машинознавство. – 2000. – № 12. – С. 3–9.
4. Грилицький Д. В., Евтушенко О. О. Контактні задачі термопружності з урахуванням теплоутворення // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 93–100.
5. Грилицький Д. В., Краснюк П. П. Квазистатична контактна взаємодія двох кільцевих пластин з теплоутворенням від тертя // Доп. НАН України. – 1995. – № 11. – С. 41–45.
6. Коровинский М. В. Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкосновения // Контактная прочность машиностроительных материалов. – Москва: Наука, 1964. – С. 2–27.
7. Уздалев А. И. Температурные напряжения в пластинках, ограниченных двухсвязным контуром. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. – 175 с.
8. Barber J. R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids // Proc. Roy. Soc. – 1969. – A312. – P. 381–394.

СТАТИЧЕСКОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ДВУХСЛОЙНОЙ m -УГОЛЬНОЙ ТРУБЫ ПРИ ОБЖАТИИ И ФРИКЦИОННОМ НАГРЕВЕ

Сформулирована постановка и построено приближенное решение плоской статической гранично-контактной термоупругой задачи для двухслойной m -угольной трубы, находящейся под действием фрикционного температурного поля и равномерно распределенных сжимающих нормальных напряжений на боковых поверхностях при условии, что механические и теплофизические характеристики материалов не зависят от температуры. Внутренняя труба – круговая осесимметричная; внешняя поверхность внешней трубы в поперечном сечении имеет форму m -угольника с закругленными углами. Задача решена методом малого параметра с учетом членов до третьего порядка малости.

STATIC THERMOELASTIC EQUILIBRIUM OF TWO-LAYER m -GON PIPE AT COMPRESSION AND CONTACT HEATING

The formulation and corresponding approximate solution to the plane static boundary contact thermoplastic problem for two-layer m -gon tube is presented. It is assumed that a cylindrical system is under the temperature field and given normal stresses which are uniformly distributed on the lateral surfaces. The mechanical and thermo-physical properties of materials are temperature-independent. The internal tube is circular axially symmetric, the external surface of external tube has the form of m -angle with rounded angles. The problem is solved by the method of small parameter with regard for three-order terms.

¹ Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,

² Нац. ун-т водного госп-ва та природокористування, Рівне