УДК 539.3

В. Г. Карнаухов[1], В. І. Козлов[1], В. М. Січко[2]

МОНОГАРМОНІЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ В ЗАДАЧАХ ПРО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ І ДИСИПАТИВНИЙ РОЗІГРІВ НЕПРУЖНИХ ТІЛ

З використанням нелінійних моделей непружної поведінки матеріалів, скінченно-елементних методів розв'язування нелінійних крайових задач та аналізу конкретних числових результатів обговорюється питання про одночастотні коливання і дисипативний розігрів непружних тіл при моногармонічному навантаженні.

Вступ. Питання про періодичні, зокрема моногармонічні, коливання має принципове значення при дослідженні механічної поведінки нелінійних механічних систем, яка описується нелінійними системами звичайних диференціальних рівнянь. Цьому питанню присвячено фундаментальні роботи А. Пуанкаре, Е. Ван дер Поля, О. М. Ляпунова, М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка тощо, огляд яких можна знайти в недавно опублікованій монографії Ю. О. Митропольського [30]. Узагальнення і застосування математичних результатів, одержаних в цих роботах для механічних систем з зосередженими параметрами, на системи з розподіленими параметрами висвітлено в багатьох роботах математиків і механіків [3–5, 28, 29, 31, 33, 34]. Як правило, при дослідженні нелінійних коливань механічних систем з розподіленими параметрами застосовується метод відокремлення змінних, коли розв'язок системи диференціальних рівнянь з частинними похідними шукається у вигляді розвинення за деякою повною системою функцій від координат, і вихідна задача зводиться до систем звичайних диференціальних рівнянь за часом, до яких застосовуються асимптотичні або чисельні методи для дослідження нелінійних коливань. Такий підхід дозволяє, певною мірою, дослідити межі застосування моногармонічного наближення. Саме такий підхід використано в більшості робіт, у яких досліджуються нелінійні коливання в механічних системах з розподіленими параметрами [31], зокрема в роботах, присвячених нелінійним коливанням елементів конструкцій з урахуванням нелінійного тертя, що описуються з використанням моделі Н. Н. Давиденкова [33, 34].

На основі такого ж підходу Е. Лоренцом було виявлено явище детермінованого хаосу в дисипативній системі з невеликим ступенем вільності [6]. Ця фундаментальна робота дала поштовх до інтенсивних досліджень, які дозволили принципово по-новому оцінити можливості передбачення динамічних явищ в рамках класичної механіки Ньютона. У зв'язку з цією проблемою нагадаємо слова всесвітньо відомого вченого-механіка Дж. Лайтхілла [56]: «*Тут я повинен зупинитися і знову виступити від імені широкого всесвітнього братства тих, хто займається механікою. Ми всі глибоко усвідомлюємо сьогодні, що ентузіазм наших попередників з приводу прекрасних досягнень ньютонівської механіки спонукав їх до узагальнень в цій області передбачення, в які до 1960 р. ми щиро вірили, але які, як тепер ми розуміємо, були хибними. Нас не покидає колективне бажання визнати свою вину за те, що ми вводили в оману широкі кола освічених людей, розповсюджуючи ідеї про детермінізм систем, які задовольняють закони руху Ньютона, – ідеї, які, як вияснилось після 1960 р., виявились неправильними*».

Відкриття детермінованого хаосу в дисипативних системах навіть з невеликим ступенем вільності, наприклад, у нелінійному осциляторі при гармонічному зовнішньому навантаженні, свідчить про те, що в певних областях параметрів (частоти, коефіцієнта демпфування, амплітуди зовнішньої сили, коефіцієнта нелінійності), які характеризують динамічну систему, ні про яку моногармонічність не може бути й мови. Більше того, в цих облас-

тях взагалі неможливо передбачити поведінку динамічної системи. Звичайно, визначення областей параметрів, при яких виникає детермінований хаос, є досить непростою проблемою. Можна лише сказати, що, як свідчать доведені математиками теореми, моногармонічність коливань у нелінійних системах буде мати місце, якщо ці параметри, будуть в якомусь розумінні «малими». За межами областей, в яких реалізується детермінований хаос, існує надзвичайно широкий спектр механічних явищ, які можуть бути досліджені в рамках класичних підходів, зокрема в рамках моногармонічного наближення [3–5, 28–34, 36].

Якщо вважати, що виконуються умови, при яких моногармонічне наближення має місце і які встановлено в згаданих вище математичних роботах, то можна застосувати інший підхід для дослідження нелінійних коливань механічних систем з розподіленими параметрами, коли до вихідної системи нелінійних рівнянь з частинними похідними застосовується метод відокремлення змінних, і розв'язок подається з самого початку у вигляді моногармонічних функцій за часом, але з невідомими коефіцієнтами, які залежать уже від координат. В результаті такого підходу одержимо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними за координатами, до якої вже можна застосовувати розроблені в механіці деформівного твердого тіла чисельні та аналітичні методи. При цьому вважається, що визначальні рівняння, які описують механічну поведінку матеріалу, відомі. Наприклад, для в'язкопружних матеріалів це можуть бути нелінійні диференціальні або інтегральні рівняння Вольтерра. Для пружнопластичних і в'язкопружнопластичних матеріалів можна застосувати теорію малих пружнопластичних деформацій, різного роду моделі теорії течії тощо. Але можна піти далі і, прийнявши гіпотезу про моногармонічність механічного процесу при моногармонічному навантаженні, спочатку побудувати теорію визначальних рівнянь для непружних матеріалів для цього специфічного класу історій деформування. Ця теорія буде набагато простішою від вказаних вище загальних або «повних» теорій, які описують поведінку матеріалу для більш загальних історій деформування, ніж моногармонічні. Доповнивши ці рівняння універсальними співвідношеннями механіки для моногармонічного процесу – рівняннями руху, кінематичними співвідношеннями, граничними умовами, можна одержати замкнену систему рівнянь, яка описує нелінійні моногармонічні процеси в системах з розподіленими параметрами. Такий підхід було застосовано, наприклад, у монографії В. О. Пальмова [32] для моделювання внутрішнього тертя в матеріалах і дослідження коливальних процесів у механічних системах з тертям. При цьому для моделювання гістерезисних втрат у матеріалі ним була використана теорія мікропластичності О. Ю. Ішлінського [32]. Застосувавши до визначальних рівнянь О. Ю. Ішлінського асимптотичні методи нелінійної механіки, В. О. Пальмов одержав нелінійні алгебраїчні комплексні визначальні рівняння, аналогічні визначальним рівнянням лінійної теорії в'язкопружності, але з залежними від амплітуд деформацій комплексними характеристиками. При цьому має місце принцип відповідності, аналогічний принципу відповідності для лінійних в'язкопружних матеріалів, який полягає в тому, що в рівняннях теорії пружності необхідно замінити механічні характеристики матеріалу на комплексні та перейти до запису рівнянь у комплексній формі. Такий же підхід було прийнято і в монографіях [15, 17, 19, 20, 22, 25] при побудові термомеханічних моделей в'язкопружних пасивних (без п'єзоефекту) і активних (з п'єзоефектом) матеріалів. У цих монографіях використано два підходи. Перший з них полягає у використанні повних моделей в'язкопружності того чи іншого типу та побудові на їх основі визначальних рівнянь для моногармонічного деформування. При використанні другого підходу зроблено наступний крок, який полягає у відмові від будь-яких повних визначальних рівнянь і побудові замкненої теорії визначальних рівнянь для моногармонічних процесів деформування в дисипативних матеріалах

незалежно від природи дисипації в матеріалі, який може бути в'язкопружним, пружнопластичним, в'язкопружнопластичним. При цьому за аналогію з теорією визначальних рівнянь пружних матеріалів вважається, що дійсні та уявні частини компонент тензора напружень є функціями від дійсних та уявних частин компонент тензора деформацій. Досліджено умови, при яких одержані таким чином визначальні рівняння можуть бути записані в комплексній формі, а також умови потенціальності цих рівнянь, коли визначальні рівняння можуть бути одержані через похідні від деяких скалярних функцій, які можна назвати потенціалами. При такому підході визначальні рівняння приймають алгебраїчну форму з деякими функціями і параметрами, які, як і в теорії пружності та в теорії малих пружнопластичних деформацій, визначаються з експериментів.

У розвиток одержаних таким чином результатів, у роботах [7, 8–10, 12, 38, 40–43] для визначення комплексних характеристик була використана суттєво нелінійна модель Боднера – Партома (БП), яка описує макропластичні непружні деформації і яка побудована в рамках узагальнених теорій течії [51–53]. З використанням повних визначальних рівнянь цієї моделі було удосконалено асимптотичну методику одержання комплексних характеристик і з використанням розроблених у відділі термопружності Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (ІМ) скінченно-елементних програм розв'язано широке коло конкретних задач з метою обґрунтування моногармонічного наближення. Розрахунки показали, що результати, одержані з використанням повної нелінійної моделі, з високою точністю співпадають з результатами, одержаними з використанням моногармонічного наближення. Детальний аналіз робіт, присвячених обґрунтуванню моногармонічного наближення з застосуванням моделі БП, наведено в оглядовій статті [39].

Але при дослідженні стаціонарних моногармонічних коливань у рамках такого наближення в дисипативній системі появляється нова польова величина – температура дисипативного розігріву, обумовлена гістерезисними втратами в непружному матеріалі. Для побудови замкненої термомеханічної теорії механічні рівняння повинні бути доповнені рівнянням енергії. Для моногармонічних процесів воно має вигляд рівняння теплопровідності з джерелом тепла, породженим дисипативною функцією, для якої також повинно бути записано визначальне рівняння. Для таких процесів дисипативна функція, як правило, дорівнює осередненій за період потужності і записується в алгебраїчній формі через напруження і деформації. Таким чином, якщо зв'язок між напруженнями і деформаціями відомий, то стає відомим і визначальне рівняння для дисипативної функції. При цьому всі параметри визначальних рівнянь можуть бути функціями від температури, а дисипативна функція є складною алгебраїчною функцією від амплітуд деформацій і температури.

Результати останніх досліджень з нелінійної термомеханіки непружних пасивних (без п'єзоефекту) та активних (з п'єзоефектом) тіл в моногармонічному наближенні наведено в монографії [22]. У ній при побудові термомеханічних моделей нелінійних коливань застосовується другий із вказаних вище підходів, коли приймається гіпотеза про моногармонічність процесу коливань, будується теорія визначальних рівнянь для таких процесів і потім формулюється постановка задач про нелінійні термомеханічні коливання з урахуванням дисипативного розігріву.

Температура дисипативного розігріву може суттєво вплинути на термомеханічні процеси в непружних тілах. Як показано, наприклад, в класичних роботах з фізики діелектриків [47], при моногармонічному електричному навантаженні в системі може мати місце різке зростання температури з огляду на порушення балансу між теплоутворенням через гістерезисні втрати і теплообміном із зовнішнім середовищем, коли стаціонарного теплового стану взагалі не існує і має місце теплове руйнування тіла. Аналогічні

явища в термомеханіці непружних матеріалів почали досліджувати значно пізніше. Основні результати з дослідження нелінійних термомеханічних коливань непружних тіл з урахуванням дисипативного розігріву одержано в роботах співробітників ІМ. Результати досліджень з термомеханіки нелінійних коливань непружних тіл подано в монографіях [15, 17, 19, 20, 22, 25] і оглядових статтях [16, 18, 21, 23, 24, 39, 44, 55].

У цій статті з використанням результатів, одержаних співробітниками відділу термопружності ІМ, розглянуто моногармонічне наближення в термомеханіці непружних тіл при дії на них моногармонічного навантаження. Для обґрунтування гіпотези про моногармонічність використано підхід, традиційний для механіки деформівного твердого тіла, коли:

1) пропонується деяка теоретична модель термомеханічної поведінки матеріалу, тобто визначальні рівняння;

2) розробляється експериментально-теоретична програма для визначення функцій і параметрів визначальних рівнянь цієї моделі з використанням розв'язків найпростіших одновимірних задач;

3) у рамках вказаної моделі розв'язуються більш складні задачі, які виходять за межі цих одновимірних задач;

4) одержані результати для цих більш складних задач порівнюються з відповідними для них експериментальними результатами;

5) на основі порівняння експериментальних і теоретичних результатів робляться висновки про достовірність запропонованої моделі.

Через відсутність необхідних експериментальних даних їх роль відіграють результати, одержані з використанням повної суттєво нелінійної моделі БП, тобто в перерахованих вище пунктах слово «експеримент» потрібно замінити на слово «модель БП». Для реалізації вказаної програми потрібно визначити всі параметри повної моделі БП; на основі цієї моделі з використанням асимптотичних методів нелінійної механіки одержати визначальні рівняння спрощеної моделі, яка базується на припущенні про моногармонічність механічного процесу; з використанням повної і спрощеної моделей розв'язати одновимірні задачі і знайти параметри спрощеної моделі; на основі повної і спрощеної моделей одержати розв'язки задач для випадків, які виходять за межі вказаних одновимірних задач; порівняти результати цих розв'язків і зробити висновки про достовірність моногармонічного наближення.

Відповідно до цього плану в пропонованій статті сформульовано постановку спряженої задачі термомеханіки в рамках як повної суттєво нелінійної моделі БП, так і спрощеної – з використанням моногармонічного наближення; наведено модифіковану методику визначення параметрів спрощеної моделі і результати розрахунків залежності комплексних характеристик від інтенсивності деформацій, одержаних з використанням як традиційного, так і модифікованого методів гармонічного балансу; наведено методику розв'язування спряжених задач для тривимірного випадку для повної і спрощеної моделей, що базується на ітераційних процедурах і використанні методу скінченних елементів при розв'язувані лінійних задач механіки і теплопровідності на кожній ітерації; наведено результати розв'язування задач, які виходять за межі тих одновимірних задач, що використовувались для розрахунку комплексних характеристик; проведено порівняння результатів розрахунків з використанням повної та спрощеної моделей. Таке порівняння свідчить про високу точність результатів, яку дає моногармонічне наближення.

2. Постановка задачі. Розглянемо два типи нелінійностей, які мають місце у визначальних рівняннях для непружних матеріалів в моногармонічному наближенні: нелінійність першого типу породжується залежністю комплексних характеристик матеріалу від амплітуд деформацій (чи напружень), температури та нелінійною залежністю дисипативної функції від температури та амплітуд деформацій; нелінійність другого типу, коли нелі-

нійність породжується лише залежністю властивостей матеріалу від температури та нелінійною залежністю дисипативної функції від температури та амплітуд деформацій чи напружень (вона є частковим випадком нелінійності першого типу). Нелінійності обох типів мають місце як для полімерних, так і для металічних матеріалів. Проте нелінійність першого типу більш типова для металічних матеріалів, для яких залежність комплексних характеристик від амплітуд деформацій має більший вплив на їх поведінку, ніж залежність властивостей від температури. Нелінійність же другого типу більш типова для полімерних матеріалів, багато з яких дуже чутливі до зміни температури. До того ж полімерні матеріали мають суттєві гістерезисні втрати уже при досить малих амплітудах деформацій, в той час як багато металічних матеріалів при таких деформаціях мають незначні гістерезисні втрати. При досягненні ж деформаціями меж пластичності втрати різко зростають, і відповідно температура розігріву теж різко зростає. Тому інженерні конструкції не повинні працювати в таких умовах, особливо при високих, зокрема резонансних, частотах. У зв'язку з цим при розв'язуванні спряжених задач термомеханіки для тіл з металічних матеріалів потрібно віддати перевагу моделям з мікропластичними деформаціями типу моделей, розроблених В. О. Пальмовим [32], коли рівень температури дисипативного розігріву не перевищує розумних меж.

Розвинута в [11, 38, 40, 53] суттєво нелінійна термодинамічна модель БП включає:

– *подання повної деформації у вигляді суми пружної, непружної і теплової складових*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^\theta; \tag{1}$$

– *співвідношення Коші*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{grad}\mathbf{u} + (\operatorname{grad}\mathbf{u})^T\right]; \tag{2}$$

– *вираз для теплової деформації*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\theta = \mathbf{I}\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta')\, d\theta'; \tag{3}$$

– *закон Гука для пружної деформації*

$$\mathbf{s} = 2G(\mathbf{e} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \qquad \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} = 3K_V \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^\theta); \tag{4}$$

– *рівняння течії*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{D_0}{\sqrt{J_2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sqrt{3J_2}}\right)^{2n}\right]\mathbf{s}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^p(0) = 0; \tag{5}$$

– *повні рівняння еволюції для параметрів ізотропного та кінематичного зміцнення відповідно*

$$\dot{K} = m_1(K_1 - K)\dot{W}_p - A_K K_1\left[(K - K_2)/K_1\right]^{r_K}, \qquad K(0) = K_0, \tag{6}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = m_2(D_1\mathbf{u} - \boldsymbol{\beta})\dot{W}_p - A_D K_1\left[(\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta})^{1/2}/K_1\right]^{r_D}\mathbf{V}, \qquad \boldsymbol{\beta}(0) = 0; \tag{7}$$

– *рівняння руху*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0; \tag{8}$$

– *рівняння нестаціонарної теплопровідності* (*рівняння енергії*)

$$c_V\dot{\theta} + 3\alpha_0\theta K_V(\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - 3\alpha_0\dot{\theta}) - D' - k\,\Delta\theta = r; \tag{9}$$

– *вираз для швидкості дисипації*

$$D' = \boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}} - K\dot{\delta}, \tag{10}$$

де введено позначення

$$Z = K + D, \qquad J_2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}/2, \qquad \dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{s}/(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})^{1/2},$$

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}/(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta})^{1/2}, \qquad D = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}.$$

У рівняннях (1)–(10) $\mathbf{u}$ – вектор зміщень; G і K_V – модуль зсуву і об'ємний модуль матеріалу; c_V, α_0 і k – коефіцієнти теплоємності, лінійного теплового розширення при відліковій температурі $\theta = \theta_0$ і теплопровідності.

Відповідно до [46, 51] припускається, що коефіцієнти D_0, D_1, K_1, m_1, m_2, r_K і r_D не залежать від температури, а коефіцієнти n, K_0, K_2, A_K, A_D, K_V і G є функціями від температури. Величини δ і $\boldsymbol{\alpha}$ – термодинамічні зміщення, спряжені до термодинамічних сил K і $\boldsymbol{\beta}$ відповідно. Еволюційні рівняння для них наведено в роботах [11, 38].

До записаних рівнянь потрібно додати відповідні граничні та початкові умови.

Вважається, що матеріал – циклічно стабільний. Для нього реакція напруження $\boldsymbol{\sigma}(t)$ на періодичну ізотермічну деформацію $\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)$, $-\infty \le \tau \le t$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\tau + T) = \boldsymbol{\varepsilon}(\tau)$, також є періодичною функцією від часу з періодом T. Під моногармонічним наближенням розуміється сума перших трьох складових у розвиненні напружень і деформацій у ряди Фур'є:

$$\boldsymbol{\sigma}(\tau) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}' \cos \omega\tau - \boldsymbol{\sigma}'' \sin \omega\tau, \qquad \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma}'' = \text{const}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}' \cos \omega\tau - \boldsymbol{\varepsilon}'' \sin \omega\tau, \qquad \theta(\tau) = \bar{\theta}, \qquad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\varepsilon}'', \bar{\theta} = \text{const}, \tag{12}$$

$$-\infty \le \tau \le t.$$

Якщо контрольованою величиною є деформація, то з урахуванням (11) і (12) одержимо визначальні рівняння для моногармонічного наближення

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\varepsilon}'', \omega), \qquad \boldsymbol{\sigma}' = \hat{\boldsymbol{\sigma}}'(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\varepsilon}'', \omega), \qquad \boldsymbol{\sigma}'' = \hat{\boldsymbol{\sigma}}''(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\varepsilon}'', \omega). \tag{13}$$

Як вказано вище, амплітудні рівняння (13) мають дві інтерпретації [25, 48]: ***1***) вони можуть бути одержані на основі тих чи інших повних визначальних рівнянь матеріалу; ***2***) вони можуть бути конкретизовані на основі прямих експериментів без використання будь-яких повних визначальних рівнянь.

Для одержання визначальних рівнянь на основі повної моделі БП використано як стандартну, так і модифіковану техніку осереднення.

При використанні стандартної техніки девіатор тензора напружень $\mathbf{s}(t)$ вважається нелінійним ізотропним функціоналом повної історії девіатора тензора деформацій $\mathbf{e}(\tau)$, $-\infty < \tau < t$:

$$\mathbf{s}(t) = \overset{t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathbf{s}}}[\mathbf{e}(\tau)]. \tag{14}$$

Для апроксимації цього функціонала на моногармонічних історіях деформацій

$$\mathbf{e}(\tau) = \mathbf{e}' \cos \omega\tau - \mathbf{e}'' \sin \omega\tau, \qquad -\infty < \tau < t, \tag{15}$$

використано метод гармонічної лінеаризації з застосуванням моделі Фойгта [3, 30, 32, 35]

$$\overset{t}{\underset{\tau=-\infty}{\mathbf{s}}}[e(\tau)] \approx 2G'\mathbf{e} + 2\omega^{-1}G''\dot{\mathbf{e}}, \tag{16}$$

де G' і G'' – скалярні коефіцієнти; $\dot{\mathbf{e}} = \partial\mathbf{e}/\partial t$.

Ці коефіцієнти визначаються з умови мінімуму середньоквадратичної похибки апроксимації (11) на моногармонічних історіях деформації (12):

$$R = \left\langle (\mathbf{s} - 2G'\mathbf{e} - 2\omega^{-1}G''\dot{\mathbf{e}}) \cdot (\mathbf{s} - 2G'\mathbf{e} - 2\omega^{-1}G''\dot{\mathbf{e}}) \right\rangle = \min, \tag{17}$$

де $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)d\tau$ – осереднення за період коливань T; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ – згортка двох тензорів.

З умови мінімуму функції R:

$$\frac{\partial R}{\partial G'} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial G''} = 0, \tag{18}$$

одержуємо

$$G' = \frac{1}{2e_i^2}\left\langle \mathbf{s}(\mathbf{e}(\tau)) \cdot \mathbf{e} \right\rangle, \quad G'' = \frac{1}{2\omega e_i^2}\left\langle \mathbf{s}(\mathbf{e}(\tau)) \cdot \dot{\mathbf{e}} \right\rangle, \tag{19}$$

де e_i – інтенсивність амплітуд зсувних деформацій, $e_i^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}' + \mathbf{e}'' \cdot \mathbf{e}'')$.

Коефіцієнти G' і G'' залежать від амплітуд деформацій $\mathbf{e}'$, $\mathbf{e}''$, частоти ω і температури θ.

Використовуючи для напружень одночастотну апроксимацію типу (11) $\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}'\cos\omega t - \mathbf{s}''\sin\omega t$ і підставляючи її у співвідношення (16), отримуємо рівняння для амплітуд

$$\mathbf{s}' = 2G'\mathbf{e}' - 2G''\mathbf{e}'', \qquad \mathbf{s}'' = 2G''\mathbf{e}' + 2G'\mathbf{e}''. \tag{20}$$

Співвідношення (20) можна записати в комплексній формі

$$\tilde{\mathbf{s}} = 2\tilde{G}\tilde{\mathbf{e}}, \tag{21}$$

де $\tilde{G} = G' + iG''$ – комплексний модуль зсуву; $\tilde{\mathbf{s}}$ і $\tilde{\mathbf{e}}$ – комплексні амплітуди напружень і деформацій, $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s}' + i\mathbf{s}''$, $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}' + i\mathbf{e}''$.

Залежність G' і G'' від тензорів $\mathbf{e}'$ і $\mathbf{e}''$ в ізотропних функціоналах типу (14) тензорно-лінійної структури реалізується через набір інваріантів [17, 19, 20, 22, 25, 48] $\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}'$, $\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}''$, $\mathbf{e}'' \cdot \mathbf{e}''$. У випадку пропорційного (монофазного) деформування за гармонічним законом залежність G' і G'' від $\mathbf{e}'$ і $\mathbf{e}''$ суттєво спрощується і реалізується через єдиний інваріант

$$G' = G'(e_i), \qquad G'' = G''(e_i). \tag{22}$$

Безпосередньою підстановкою легко переконатись, що в розглянутій схемі гармонічної лінеаризації наближені рівняння (16) еквівалентні повному рівнянню (14) відносно двох величин Π_s і D_s':

$$\Pi_s = \langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{e} \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{s}' \cdot \mathbf{e}' + \mathbf{s}'' \cdot \mathbf{e}''), \qquad D_s' = \langle \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}} \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{s}' \cdot \mathbf{e}'' - \mathbf{s}'' \cdot \mathbf{e}'). \tag{23}$$

Першу з них, Π_s, можна розглядати як середню або максимальну за період накопичену енергію [48]. Величина D_s' в усталеному періодичному процесі дорівнює середній за період коливань швидкості дисипації механічної енергії [48]. Таким чином, стандартна схема лінеаризації приводить до моногармонічної моделі, яка еквівалентна повній за енергіями. Описаний вище енергетичний метод визначення G' і λ' не забезпечує розрахунку точних значень амплітуд (розмахів) напружень і непружних деформацій в циклі.

Для підвищення точності розрахунку напружень $\mathbf{s}$ і непружних деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ у статтях [41, 42] розроблено модифіковану техніку визначення комплексних характеристик. Суть модифікації моделі полягає в тому, що вирази для модулів втрат G'' і λ'' залишаються без зміни, тобто вира-

жаються через середню за період швидкість дисипації

$$\langle D' \rangle = \langle \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}} \rangle = \omega G''(e_i, \omega) e_i = \omega G \lambda''(e_i, \omega) e_i , \tag{24}$$

де G – модуль зсуву.

При цьому модулі накопичення G' і λ' розраховуються з умов точного задоволення наближеною моделлю відповідних циклічних діаграм $\hat{s}_i \equiv s_i$ і $\hat{\varepsilon}_i^p \equiv \varepsilon_i^p$. Тоді

$$G'(e_i, \omega) = \left[\frac{s_i^2(e_i, \omega)}{4e_i^2} - G''^2(e_i, \omega) \right]^{1/2},$$

$$\lambda'(e_i, \omega) = \left[\frac{(\varepsilon_i^p)^2(e_i, \omega)}{e_i^2} - (\lambda'')^2(e_i, \omega) \right]^{1/2}, \tag{25}$$

де $s_i^2 = (\mathbf{s}' \cdot \mathbf{s}' + \mathbf{s}'' \cdot \mathbf{s}'')/2$.

Таким чином, комплексні характеристики моногармонічного наближення відповідно до (24) і (25) визначаються рівняннями

$$\left| \tilde{G} \right| = \frac{s_i}{2e_i}, \qquad G'' = \frac{1}{\omega e_i^2} \langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{e} \rangle, \qquad \left| \tilde{\lambda} \right| = \frac{\varepsilon_i^p}{e_i}, \qquad \lambda'' = \frac{G''}{G} \tag{26}$$

і відображають суть модифікованої моделі гармонічної лінеаризації.

На основі одержаних вище визначальних рівнянь з використанням методу гармонічної лінеаризації може бути подана постановка спряженої задачі термомеханіки для нелінійних матеріалів першого типу в моногармонічному наближенні. При цьому визначальні рівняння матимуть вигляд

$$\tilde{\mathbf{s}} = 2\tilde{G}\tilde{\mathbf{e}}, \qquad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{e}}, \tag{27}$$

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}' + i\mathbf{e}'', \qquad \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s}' + i\mathbf{s}'', \qquad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \boldsymbol{\varepsilon}' + i\,\boldsymbol{\varepsilon}'', \tag{28}$$

$$\tilde{G} = G' + iG'', \qquad \tilde{\lambda} = \lambda' + i\lambda'', \tag{29}$$

де $\tilde{\mathbf{e}}$, $\tilde{\mathbf{s}}$ і $\tilde{\mathbf{e}}^p$ – комплексні амплітуди девіаторів повної деформації, напруження і пластичної деформації; $\tilde{G}$ і $\tilde{\lambda}$ – комплексні модуль зсуву і коефіцієнт непружності відповідно; штрихами $(\cdot)'$ і $(\cdot)''$ позначено відповідно дійсні та уявні частини комплексних величин.

Модулі $\tilde{G}$ і $\tilde{\lambda}$ є функціями від інтенсивності тензора амплітуд деформацій e_i^2, частоти ω і в загальному випадку – від температури θ:

$$\tilde{G} = \tilde{G}(e_i, \omega, \theta), \qquad \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(e_i, \omega, \theta), \quad \text{де} \qquad e_i^2 = \mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}' + \mathbf{e}'' \cdot \mathbf{e}''.$$

Дійсні та уявні частини комплексних модулів визначаються за формулами (25), (26) з використанням циклічних діаграм, які розраховувались шляхом прямого чисельного інтегрування рівнянь моделі БП для одновимірного випадку задач про розтяг і зсув.

Відмітимо, що в загальному випадку спрощена модель може бути повністю конкретизована з використанням експериментальних циклічних діаграм. Як вказувалось вище, застосування моделі БП обумовлено лише необхідністю обґрунтування моногармонічного наближення.

Рівняння спрощеної моделі (27)–(29) доповнюються комплексним аналогом рівняння коливань, яке записується у вигляді

$$\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \omega^2 \tilde{\mathbf{u}} = 0 . \tag{30}$$

У наближеній постановці спряженої задачі з урахуванням фізичної нелінійності першого типу використовується осереднене за період рівняння енергії, яке при нехтуванні впливом термопружних ефектів $3\alpha K_V \langle \theta \operatorname{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \approx$

≈ 0 і $9\alpha\theta K_V / c_V \approx 0$ має вигляд

$$c_V \dot{\bar{\theta}} - k\Delta\bar{\theta} - \left\langle D' \right\rangle_N = 0\,, \tag{31}$$

де $\bar{\theta}$ – осереднена за період коливань температура.

Аналогічно, осереднюючи вираз для швидкості дисипації і нехтуючи ефектом «холодної роботи», одержуємо

$$\left\langle D' \right\rangle = \left\langle \dot{W}_p \right\rangle = \left\langle \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{e}} \right\rangle. \tag{32}$$

Наведена система рівнянь (27)–(32) доповнюється комплексним аналогом відповідних граничних і початкових умов для температури.

Як бачимо, ця система рівнянь нічим не відрізняються від системи, одержаної раніше при постановці задач термомеханіки в моногармонічному наближенні з використанням нелінійних моделей теорії в'язкопружності [17, 19, 20, 25]. Одержані рівняння стану для моногармонічних процесів також не відрізняються від механічних рівнянь стану, одержаних В. О. Пальмовим з використанням моделі пластичності О. Ю. Ішлінського, за виключенням того, що комплексні характеристики можуть залежати від температури, хоча в названих роботах ця залежність не враховувалась. До того ж, В. О. Пальмов не враховував взаємодію механічних і теплових полів.

У згаданих вище роботах, у яких використовувалась узагальнена модель теорії течії, залежність властивостей матеріалу від температури не враховувалась, а основна увага була зосереджена на дослідженні впливу амплітуд деформацій на комплексні характеристики.

Для конкретизації залежностей комплексних характеристик від інтенсивностей деформацій використовувалась одновимірна задача про зсув (кручення).

В результаті обробки експериментальних даних [2] для алюмінієвого сплаву АМг-6 за методикою [46] одержано такі значення параметрів моделі:

$$D_0 = 10^4\ \text{с}^{-1}, \qquad K_0 = 323.6\ \text{Мпа}, \qquad K_1 = 647.4\text{Мпа}, \qquad n = 2.06,$$

$$m_1 = 0.182\ \text{Мпа}, \qquad m_2 = 0, \qquad G = 3.04410^4\ \text{МПа}. \tag{33}$$

Циклічні характеристики розраховували потім для історій $e = e_0 \sin \omega t$.

На рис. 1 криві *1* і *2* відповідають циклічній кривій для стандартного моногармонічного наближення $|\tilde{s}| \sim e_0$, $|\tilde{s}| = 2|\tilde{G}|e_0$, і «точній» циклічній кривій $\Delta s/2 \sim e_0$ для частоти $\omega = 2\pi\,\text{с}^{-1}$. Аналогічними кривими *3* і *4* зображено наближену $|\tilde{\varepsilon}^p| \sim e_0$, $|\tilde{\varepsilon}^p| = 2|\tilde{\lambda}|e_0$, і точну $\Delta\varepsilon^p/2 \sim e_0$ циклічні криві для непружної деформації. Крива *5* відповідає монотонному крученню зі сталою швидкістю $\dot{e}_0 = 0.1\,\text{с}^{-1}$ (статична діаграма).

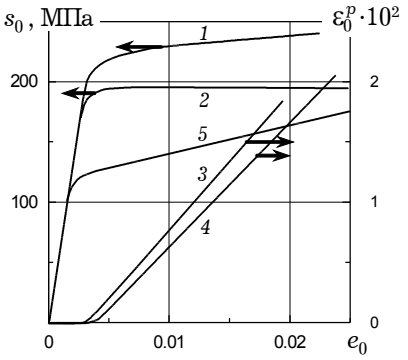

Рис. 1

Видно, що стандартна модель гармонічної лінеаризації суттєво збільшує розмахи (амплітуди) напружень і непружних деформацій. Очевидно, що циклічні криві, які дає модифікована модель, співпадають з точними, оскільки останні й покладено в її базові співвідношення (27) для компонент G' і λ' комплексних модулів $\tilde{G}$ і $\tilde{\lambda}$.

Суть наближених підходів наочно ілюструє рис. 2. Цим даним відповідають $e_0 = 1.8 \cdot 10^{-2}$ і $\omega = 2\pi\,\text{с}^{-1}$. Кривими *1–3* зображено петлі гістерезиса

$s \sim e$ відповідно для повної, стандартної і модифікованої моделей. На рис. 3 наведено аналогічні петлі для непружної деформації $\varepsilon^p \sim e$. При однакових площах усіх петель (еквівалентність за дисипацією за період) модифікована модель дає точні значення розмахів напружень і непружних деформацій в циклі.

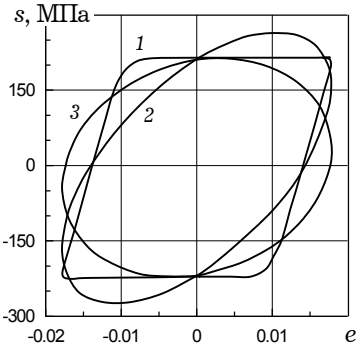

Рис. 2

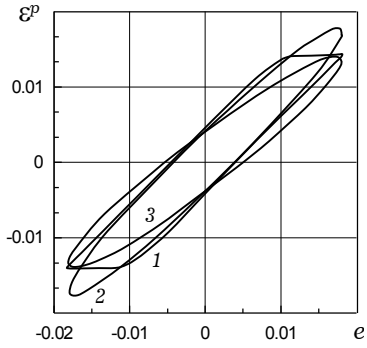

Рис. 3

Деформаційні залежності модулів $G'(e_0)$ і $G''(e_0)$ для алюмінієвого сплаву АМг-6 на частоті $\omega = 2\pi\,\mathrm{c}^{-1}$ показано на рис. 4*а*. Криві *1* і *2* відповідають модулю G', який розраховано з використанням стандартної і модифікованої моделей відповідно. Крива *3* відповідає модулю G'', який має однакові значення для обох моделей. Стандартна модель дає завищену циклічну жорсткість матеріалу. Видно, що нижче від циклічної межі пластичності $e_T \cong 0.003$ матеріал веде себе як пружне тіло, а для $e > e_T$ модуль жорсткості G' різко зменшується, модуль втрат G'' різко зростає зі збільшенням e. Непружна деформація змінюється за законом, близьким до лінійного закону $e^p/2 = e - e_T$. Отже, циклічна поведінка матеріалу є суттєво нелінійною. Аналогічні криві для сталі 12ХНЗА зображено на рис. 4*б*.

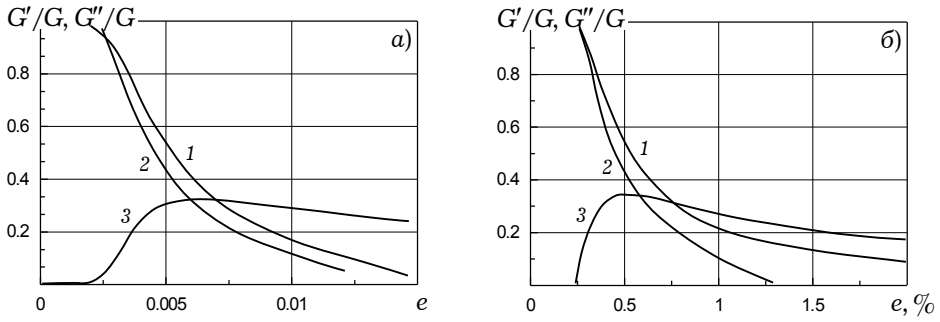

Рис. 4

3. Числові методи дослідження нелінійних термомеханічних коливань. Для порівняння результатів, одержаних з використанням наведених вище повної і наближеної моделей, потрібно мати математичний апарат для розв'язування складних нелінійних крайових задач. Для цього в ІМ розроблено ітераційні процедури для їх розв'язування, які зводять вихідні нелінійні задачі до послідовності лінійних задач механіки в'язкопружних тіл і задач теплопровідності з відомим джерелом тепла. Для розв'язування цих лінійних задач розроблено скінченно-елементні методи та метод дискретної ортогоналізації. Розроблено комплекс програм, які реалізують ці методи при розв'язуванні осесиметричних, плоских і тривимірних динамічних спряжених стаціонарних і нестаціонарних задач.

Огляд робіт, присвячених розробці методів розв'язування двовимірних задач термомеханіки спряжених полів, подано в роботах [18, 22, 39, 48]. Не-

давно було розроблено метод скінченних елементів і для розв'язування тривимірних задач. Наведемо основні співвідношення, покладені в основу цього методу.

Варіаційне формулювання лінійної задачі матиме вигляд

$$\delta Э = 0, \qquad Э = Э_1 + Э_2. \tag{34}$$

Тут для періодичних процесів

$$Э_1 = \frac{1}{2}\iiint_V (C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - 2K_i u_i - \omega^2 \rho\, u_i u_i]\, dV, \quad Э_2 = \int_{S_\sigma} F_i u_i\, ds\,, \tag{35}$$

де V – об'єм тіла, S_σ – частина поверхні, тіла, на якій діє механічне навантаження.

Задача розв'язується в циліндричній системі координат (r, z, φ), вісь z якої співпадає з віссю обертання тіла. Малі деформації для загального неосесиметричного випадку визначаються через компоненти зміщення u_r, u_φ, u_z з відомих співвідношень, записаних в циліндричній системі координат.

Для розв'язування варіаційної задачі (34) розіб'ємо об'єм V тіла обертання N вузловими колами і відповідними K меридіональними перерізами (перетинами) на M шестигранних скінченних елементів, кожний з яких має 24 вузлові точки (рис. 5). Тіло ділимо на скінченні елементи так, що кожний з них складається з одного матеріалу.

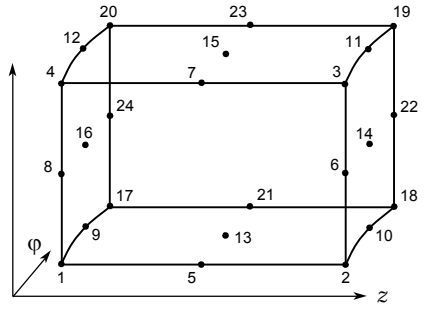

Рис. 5

За локальну систему координат, у якій визначаються апроксимуючі функції елемента та виконується інтегрування, використано нормалізовану систему координат. Для побудови функцій, які апроксимують складові переміщень в елементі, використано тригонометричні й алгебраїчні поліноми $\Phi_i(\varphi)$, $\Psi_j(\xi, \eta)$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,\ldots,8$, [54]

$$\Phi_1(\varphi) = \frac{\sin(\varphi - \varphi_2) - \sin(\varphi - \varphi_3) + \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + \sin(\varphi_2 - \varphi_3)},$$

$$\Phi_2(\varphi) = \frac{\sin(\varphi - \varphi_3) - \sin(\varphi - \varphi_1) + \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3) - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin(\varphi_3 - \varphi_1)},$$

$$\Phi_3(\varphi) = \frac{\sin(\varphi - \varphi_1) - \sin(\varphi - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_1) - \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), \quad \Psi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1),$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad \Psi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta+1),$$

$$\Psi_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad \Psi_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi),$$

$$\Psi_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad \Psi_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi). \tag{36}$$

Циліндричні r, z і локальні ξ, η координати пов'язані такими співвідношеннями:

$$r = \sum_{j=1}^{8} \Psi_j r_j, \qquad z = \sum_{j=1}^{8} \Psi_j z_j, \tag{37}$$

де r_j, z_j – вузлові значення координат.

Враховуючи вирази для тригонометричних і алгебраїчних поліномів, компоненти вектора зміщень можна апроксимувати виразами

$$u_r = \sum_{i=1}^{24} G_i(\varphi, \xi, \eta) u_r^i, \quad u_z = \sum_{i=1}^{24} G_i(\varphi, \xi, \eta) u_z^i, \quad u_\varphi = \sum_{i=1}^{24} G_i(\varphi, \xi, \eta) u_\varphi^i. \tag{38}$$

Тут апроксимуючі функції G_i є добутками відповідних тригонометричних і алгебраїчних поліномів: $G_i = \Phi_j \Psi_k$, $j = 1,2,3$, $k = 1,2,\ldots,8$; u_r^i, u_z^i, u_φ^i – вузлові значення компонент вектора зміщення.

Апроксимуючи механічне навантаження також функціями G_i, з умови стаціонарності функціонала (34), (35) для визначення вузлових значень комплексних амплітуд переміщень одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами. Інтеграли, які входять у коефіцієнти алгебраїчної системи, розраховували чисельно, при цьому за змінними ξ, η використовували формулу Ґаусса [1, 13], а за змінною φ – квадратурну формулу [54] $\int_a^b F(\varphi)\, d\varphi = \sum_{m=0}^{M} h_m F(\varphi_m)$. Тут $M+1$ – число точок, в яких обчислюється функція $F(\varphi)$,

$$\varphi_m = \frac{2\pi m}{M+1}, \qquad k = \frac{1}{2}M, \qquad h_m = \frac{1}{M+1}\left\{ (B - A) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{2}{j} \cos(j\varphi_m)[\sin(jb) - \sin(jb)] - \frac{2}{j} \sin(j\varphi_m)[\cos(jb) - \cos(jb)] \right] \right\}.$$

Одержану таким чином систему алгебраїчних рівнянь розв'язували в комплексній області методом Ґаусса. Це дозволяє знайти розв'язки системи великої розмірності без порушення симетрії і стрічковості її структури. За отриманими значеннями зміщень знаходимо компоненти тензора деформацій і дисипативну функцію.

Запропонований підхід дає можливість розраховувати напружено-деформований стан в тілах обертання як при неосесиметричному, так і при осесиметричному деформуванні, а також в незамкнутих тілах обертання.

При розв'язуванні нестаціонарних задач для в'язкопружних матералів у функціоналі (34), (35) необхідно замінити $-\omega^2$ на квадрат параметра перетворення за Лапласом s^2, комплексні характеристики замінити на перетворені за Лапласом величини, одержати систему алгебраїчних рівнянь в просторі перетворених за Лапласом величин і в кінцевому результаті перейти до системи інтегро-диференціальних рівнянь, застосувати до цієї системи метод осереднення (що фактично еквівалентно переходу до спрощеної моделі Фойгта) і використати для розв'язання одержаної таким чином системи звичайних диференціальних рівнянь чисельний метод. При розв'язуванні нестаціонарних задач з використанням моделі БП можна застосовувати ті ж самі ітераційні процедури, які використовувались при розв'язуванні осесиметричних просторових задач у роботах [22, 23, 48].

Для дослідження дисипативного розігріву непружних тіл, складених із анізотропних та ізотропних частин, необхідно обчислити температуру в кожній точці тіла. Для розв'язування на кожній ітерації лінійної задачі теплопровідності з відомим джерелом для тривимірного тіла обертання також використовується метод скінченних елементів.

Фунціонал I у варіаційній задачі

$$\delta I = 0 \tag{39}$$

можна записати у вигляді [37]

$$I = \int_V \Big[\frac{1}{2}\lambda_{zz}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda_{rr}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\lambda_{\varphi\varphi}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)^2 + \lambda_{zr}\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{r}\lambda_{z\varphi}\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\lambda_{r\varphi}\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial \varphi} + \rho c T\frac{\partial T}{\partial t} - Qt\Big] dV + \int_S \alpha\left(\frac{1}{2}T - T_C\right) dS\,. \tag{40}$$

Ця варіаційна задача розв'язується на тій самій сітці скінченних елементів, що й задача механіки. При цьому температура, коефіцієнт теплопровідності, температура оточуючого середовища та джерело тепла апроксимуються таким чином:

$$T = \sum_{i=1}^{24} G_i T_i, \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{24} G_i \alpha_i, \qquad T_C = \sum_{i=1}^{24} G_i T_i, \qquad Q = \sum_{i=1}^{24} G_i Q_i\,, \tag{41}$$

де Q_i – добуток тригонометричних та алгебраїчних поліномів, які визначаються співвідношеннями (36).

Виконуючи звичайну процедуру методу скінченних елементів і вважаючи, що похідна $\partial T/\partial t$ не варіюється, одержимо таку систему звичайних лінійних диференціальних рівнянь відносно вузлових значень температури:

$$M\frac{dT_k}{dt} + KT_k = P_k\,. \tag{42}$$

Для її розв'язування використовуємо метод скінченних різниць, коли похідна за часом апроксимується виразом [1]

$$\frac{dT_k}{dt} = \frac{T_k(t+\Delta t) - T_k(t)}{\Delta t}\,. \tag{43}$$

Це дозволяє одержати систему алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень температури в момент часу $t + \Delta t$ через відомі значення температури в попередній момент t. Така різницева схема є неявною і вимагає розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному кроці за часом.

4. Результати розрахунків. Однією з найбільш важливих задач, яка є тестовою для різних моделей і методів дослідження, є класична задача про резонансні коливання нелінійного осцилятора [3, 35]. Розглянемо осцилятор зсуву – тіло масою M, розміщене на нелінійно в'язкопружній пружині (рис. 6)

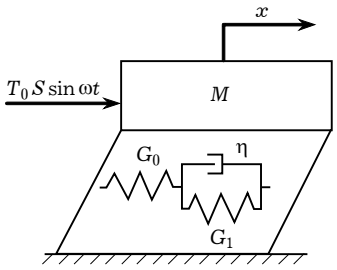

Рис. 6

Вважається, що механічна поведінка матеріалу пружини описується нелінійною моделлю стандартного в'язкопружного тіла [27]. Для неї дотичне напруження s і зсувна деформація e пов'язані співвідношеннями

$$s = 2G_0(e - e_v), \qquad \dot{e}_v = \frac{1}{2\eta}(s - 2G_1 e_v), \qquad e_v(0) = 0\,, \tag{44}$$

де G_0 – миттєвий модуль зсуву; e_v – в'язка складова деформації.

Нелінійні властивості моделі визначаємо залежностями

$$G_1 = G_{01}\exp\left(-e_0\left|e_v\right|^{\gamma}\right), \qquad \eta = \eta_0\exp\left(-\dot{e}_0\left|\dot{e}_v\right|^{\beta}\right). \tag{45}$$

Тут G_{01}, η_0, e_0, $\dot{e}_0$, γ і β – параметри моделі, причому значення e_0, $\dot{e}_0$, γ і β характеризують нелінійність.

Коливання тіла маси M на віброізоляторі зсуву з площею F і висотою H (рис. 6) описуються рівнянням

$$M\ddot{x} + sF = Fs_0 \sin \omega t, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0\,, \tag{46}$$

де s_0 – зовнішнє дотичне навантаження, віднесене до одиниці площі віброізолятора; ω – частота навантаження.

Враховуючи (44), рівняння (46) перетворимо до вигляду

$$\ddot{e} + \omega_0^2(e - e_v) = \omega_0^2 e_0^* \sin \omega t, \qquad e(0) = \dot{e}(0) = 0\,, \tag{47}$$

де $e = x / 2H$, $\omega_0^2 = G_0 F / HM$, $e_0^* = s_0 / 2G_0$.

Співвідношення (44) і (47) становлять замкнену систему рівнянь для визначення величин e, s і $\dot{e}_v$. Наближену постановку задачі про одночастотні коливання тіла одержимо, застосовуючи описані вище схеми гармонічної лінеаризації. В результаті отримуємо такі рівняння для амплітуди e і фази φ вимушених стаціонарних коливань:

$$e_0^* - \left[\left(\hat{G}' - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (\hat{G}'')^2\right]^{-1/2} = 0, \qquad \varphi = \frac{1}{\hat{G}''}\left(\hat{G}' - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right), \tag{48}$$

де $\hat{G}' = G'/G_0$, $\hat{G}'' = G''/G_0$ – нормовані компоненти комплексного модуля зсуву.

Нехай віброізолятор виготовлено з еластомера бутил – каучук (+28% сажі). В результаті обробки експериментальних даних [57] одержано такі значення параметрів моделі (44), (45):

$$G_0 = 3.45 \cdot 10^7\,\text{Па}, \quad G_{01} = 23.0 \cdot 10^6\,\text{Па}, \quad \eta_0 = 2.462 \cdot 10^6\,\text{Па}\cdot\text{с}\,,$$
$$e_0 = 95.8, \quad \gamma = 0.89, \quad \dot{e}_0 = 327.0, \quad \beta = 1.12 \tag{49}$$

На рис. 7 суцільними лініями показано деформаційні залежності G' і G'', розраховані з використанням параметрів (49). Кружечками наведено експериментальні дані. Цифра *1* відповідає модулю G', одержаному за допомогою стандартної, а цифра *2* – модифікованої схемам лінеаризації. Видно, що в усьому інтервалі деформацій матеріал веде себе як нелінійне тіло, причому з ростом деформації модуль накопичення G' суттєво зменшується, а модуль втрат G'' – зростає.

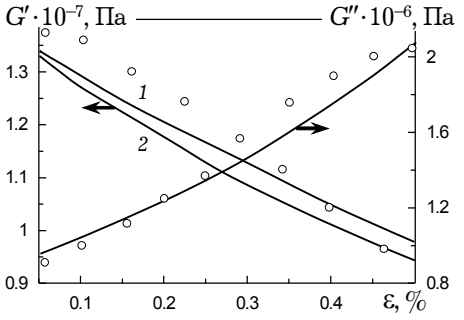

Рис. 7

На рис. 8 показано резонансні амплітудно-частотні криві для зусилля у віброізоляторі для навантаження $e_0^* = 0.12 \cdot 10^{-3}$.

Штрихова крива розраховувалась шляхом прямого чисельного інтегрування за часом вихідних рівнянь (44) і (47). Розрахунок проводився неявним методом Ейлера. На кожному часовому кроці система нелінійних рівнянь розв'язувалась методом простих ітерацій з прискоренням збіжності процесу за допомогою процедури Стеффенсена – Ейткена [48]. Криві *1* і *2* відповідають стандартному та модифікованому підходам.

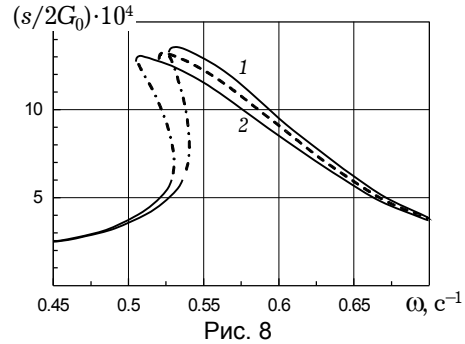

Рис. 8

Видно, що в деякій області частот стандартна модель добре узгоджу-

ється з точним (чисельним) розв'язком для кінематичних характеристик, проте дає гірші результати порівняно з модифікованим підходом при оцінці максимального в резонансній області зміщення тіла. Вказані моделі дають відповідно верхню і нижню оцінку амплітуд напружень у віброізоляторі. При цьому, як і у випадку зміщень, модифікована модель дає більш точні значення максимальної амплітуди напружень.

В цілому наведені результати показують, що обидві схеми гармонічної лінеаризації доповнюють одна одну і при сумісному використанні дозволяють задовільно описати кінематичні та силові резонансні характеристики коливальних систем з нелінійно-в'язкопружними віброізоляторами.

Розрахунки показали, що для навантажень, які викликають повну деформацію до 2%, внесок вищих гармонік в повну амплітуду коливань складає не більше 6%. Таким чином, використання моделі моногармонічного наближення для не дуже великої нелінійності дає незначну похибку.

Розглянемо тепер осцилятор зсуву (рис. 6) з дисипативним елементом, який описується одновимірною моделлю БП з параметрами (33). Рівняння коливань зберігає вигляд (46).

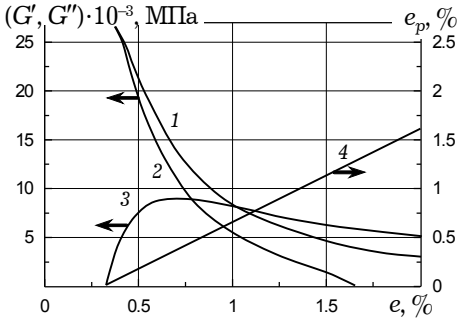

Рис. 9

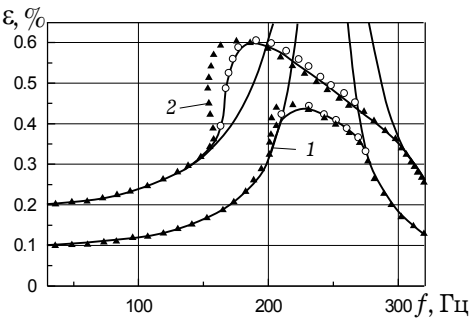

Рис. 10

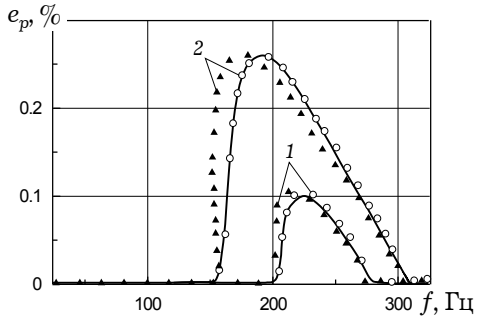

Рис. 11

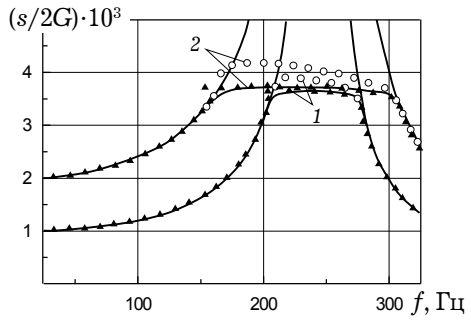

Рис. 12

На рис. 9 показано розраховані значення компонент комплексного модуля вказаного вище алюмінієвого сплаву для деформаційного циклу з частотою $f = 243\,\text{Гц}$. Криві *1* і *2* дають залежності G' від деформації для стандартної і модифікованої моделей; крива *3* відповідає модулю G'', однаковому для обох моделей; крива *4* ілюструє діаграму $\Delta e^p(\omega, e)$. На рис. 10 показано частотні залежності амплітуд повної деформації e в околі лінійного резонансу $f_0 = 243\,\text{Гц}$. Аналогічні криві для непружної деформації і напруження наведено на рис. 11 і 12. Серії кривих *1* і *2* відповідають навантаженням $e_0^* = 0.1 \cdot 10^{-2},\ 0.2 \cdot 10^{-2}$. Суцільні лінії одержано шляхом прямого інтегрування за часом повної задачі БП для матеріалу з властивостями (33). Кружечками наведено результати розрахунків з використанням

стандартної, а трикутниками – модифікованої моделей. Тонкі лінії відповідають лінійно-пружній задачі. Видно, що пластичність обумовлює резонансну характеристику м'якого типу. При цьому, проте, формуванню областей неоднозначності перешкоджає високий рівень внутрішньої дисипації в матеріалі. У зв'язку з тим, що алюмінієві сплави мають дуже мале циклічне зміцнення, частотна характеристика для напружень має в пластичній області платовидну форму.

Аналіз результатів свідчить, що стандартна модель дає добре узгодження з точним (чисельним) розв'язком за кінематичними характеристиками – повними і пластичними деформаціями. Проте вона дає помітно завищені значення напружень. Позначимо через f^* частоту, при якій досягається максимум амплітуди збудження. Зокрема, для $e_0^* = 0.1 \cdot 10^{-2}$ і $e_0^* = 0.2 \cdot 10^{-2}$ маємо відповідно $f_1^* = 223\,\text{Гц}$ і $f_2^* = 190\,\text{Гц}$. В області $f > f^*$ модифікована модель також добре узгоджується з точним розв'язком, при цьому вона дає нижню, а стандартна модель – верхню оцінку для деформацій. При $f < f^*$ модифікована модель завищує деформації в області непружного деформування.

Таким чином, для одержання більш точних оцінок як кінематичних, так і силових характеристик можна рекомендувати проведення подвійного розрахунку пластичних систем з використанням обох схем лінеаризації.

З використанням повної і наближеної постановок задач про коливання і дисипативний розігрів дисипативних тіл з пасивних матеріалів з урахуванням фізичної нелінійності першого типу було розв'язано багато конкретних задач і показано, що спрощена постановка дає досить точні результати. Огляд цих результатів міститься у статті [39].

Слід відмітити, що визначальні рівняння для моногармонічних процесів деформування мають один і той же вигляд як для в'язкопружних матеріалів, так і для пружнопластичних чи в'язкопружнопластичних матеріалів, тобто вони є однаковими для всіх типів дисипативних матеріалів.

Огляд робіт, присвячених дослідженню впливу нелінійності першого типу для полімерних тіл, наведено в статтях [24, 44, 55]. Якщо знехтувати залежністю властивостей матеріалу від температури, задача зводиться до послідовного розв'язування нелінійної задачі механіки з використанням нелінійних комплексних рівнянь стану, розрахунку дисипативної функції та розв'язування задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла. Такі задачі виникають при розрахунку температури дисипативного розігріву елементів конструкцій з металічних матеріалів при рості температури в діапазоні, коли залежністю властивостей від температури можна знехтувати.

При постановці задач з урахуванням нелінійності другого типу необхідно в наведених вище рівняннях знехтувати залежністю комплексних характеристик від амплітуд деформацій (чи напружень) і врахувати лише залежності характеристик матеріалу від температури. Такі задачі виникають при дослідженні коливань полімерних елементів конструкцій, властивості яких більш чутливі до зміни температури, ніж до залежностей властивостей матеріалу від амплітуд деформацій. Широкі класи осесиметричних спряжених задач для тіл обертання, плоских двовимірних задач та двовимірних і одновимірних задач для тонкостінних елементів у рамках цієї постановки подано в монографіях [15, 17, 19, 20, 22, 25].

Для обґрунтування моногармонічного наближення був проведений аналіз експериментальних результатів стосовно визначення температури дисипативного розігріву в тілах різної конфігурації і проведено порівняння з теоретичними результатами, яке свідчить про високу точність моногармонічного наближення для матеріалів з нелінійністю другого типу. Аналіз теоретичних та експериментальних робіт, виконаних в рамках цієї постановки, наведено в оглядових статтях [16, 18, 21, 23, 24, 44].

На основі вказаного вище підходу з використанням методу скінченних елементів розв'язано спряжену задачу для циліндричної алюмінієвої панелі з урахуванням фізичної нелінійності першого типу при дії на неї гармонічного внутрішнього тиску. Одержані числові результати свідчать, що при навіть дуже великих коефіцієнтах теплообміну з зовнішнім середовищем температура дисипативного розігріву перевищує реально можливі межі при стаціонарних коливаннях непружного тіла за межами пружності. У наступних публікаціях авторів це питання буде обговорено більш детально.

1. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – Москва: Стройиздат, 1982 – 448 с.
2. *Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И., Николаенко Н. А., Синюков А. М.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – Москва: Машиностроение, 1965. – 434 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1974. – 504 с.
4. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 500 с.
5. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 432 с.
6. *Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А.* Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. – Киев: Наук. думка, 2005. – 264 с.
7. *Жук Я. А., Сенченков И. К.* Приближенная модель термомеханически связанного микропластического и макронеупругого циклического деформирования материалов // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 7. – С. 105–114.
8. *Жук Я. А., Сенченков И. К.* Приближенная модель термомеханически связанного неупругого циклического деформирования материалов // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 3. – С. 61–67.
9. *Жук Я. А., Сенченков И. К., Козлов В. И., Табиева Г. А.* Осесимметричная динамическая связанная задача термовязкопластичности // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 10. – С. 83–89.
10. *Жук Я. А., Сенченков И. К., Табиева Г. А., Червинко О. П.* К решению осесимметричной динамической связанной задачи термовязкопластичности при гармоническом нагружении с помощью комплексных модулей // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 12. – С. 85–93.
11. *Жук Я. О.* Узагальнення термодинамічно узгодженої ізотермічної моделі Боднера – Партома // Доп. НАН України. – 1999. – № 5. – С. 60–64.
12. *Жук Я. О., Сенченков І. К., Козлов В. І., Табієва Г. А.* Осесиметрична динамічна зв'язана задача термов'язкопластичності для тіл обертання // Доп. НАН України. – 2002. – № 3. – С. 58–62.
13. *Зинкевич О.* Применение метода конечных элементов в технике. – Москва: Мир, 1975 – 506 с.
14. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – Москва: Наука, 1970. – 280 с.
15. *Карнаухов В. Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. – Киев: Наук. думка, 1982. – 260 с.
16. *Карнаухов В. Г.* Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 6. – С. 30–70.
17. *Карнаухов В. Г., Гуменюк Б. П.* Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1990. – 304 с.
18. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Вынужденные термомеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 2. – С. 39–63.
19. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
20. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 328 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 4).
21. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И.* Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 2. – С. 45–77.

22. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Житомир. інж.-технолог. ін-т, 2005. – 426 с.
23. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 5. – С. 13–45.
24. *Карнаухов В. Г., Сенченков И. К.* Обобщенные модели термомеханического поведения вязкоупругих материалов с учетом взаимодействия механических и тепловых полей // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 1. – С. 53–77.
25. *Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Гуменюк Б. П.* Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
26. *Киричок И. Ф., Михайленко В. В., Давидчук С. П.* Нелинейные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругого стержня с кубической характеристикой упругости // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 9. – С. 110–115.
27. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – Москва: Мир, 1974. – 338 с.
28. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – Киев: Вища шк., 1989. – 208 с.
29. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
30. *Митропольский Ю. А.* Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 344 с.
31. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища шк., 1976. – 589 с.
32. *Пальмов В. А.* Колебания упругопластических тел. – Москва: Наука, 1976. – 328 с.
33. *Писаренко Г. С.* Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – Киев: Наук. думка, 1970. – 377 с.
34. *Писаренко Г. С.* Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. – Киев: Наук. думка, 1987. – 236 с.
35. *Попов Б. Е., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. – Москва: Наука, 1960. – 792 с.
36. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – Москва: Наука, 1977. – 384 с.
37. *Савченко В. Г., Шевченко Ю. Н.* Пространственные задачи термовязкоупругости // Прикл. механика. – **36**, № 11. – 2000. – С. 3–38.
38. *Сенченков И. К., Жук Я. А.* Термодинамический анализ одной модели термовязкопластического деформирования материалов // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 2.– С. 41–48.
39. *Сенченков И. К., Жук Я. А., Карнаухов В. Г.* Моделирование термомеханического поведения физически нелинейных материалов при моногармоническом нагружении // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 9. – С. 3–34.
40. *Сенченков И. К., Жук Я. А., Табиева Г. А.* Термодинамически согласованные модификации обобщенных моделей термовязкопластичности // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 4. – С. 53–60.
41. *Сенченков И. К., Жук Я. А., Табиева Г. А. Червинко О. П.* Обобщенная склерономная модель гармонического деформирования упруговязкопластических тел // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 6. – С. 40–48.
42. *Сенченков И. К., Жук Я. А., Табиева Г. А., Червинко О. П.* О моногармоническом приближении в задачах деформирования вязкопластических тел при гармоническом деформировании // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 7. – С. 57–64.
43. *Сенченков И. К., Жук Я. А., Табиева Г. А., Червинко О. П.* Упрощенные модели связанного термовязкопластического поведения тел при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 9. – С. 24–33.
44. *Сенченков И. К., Карнаухов В. Г.* Термомеханическое поведение нелинейновязкоупругих материалов при гармоническом нагружении (обзор) // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 11. – С. 33–67.
45. *Сенченков И. К., Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Червинко О. П.* Расчет стационарных колебаний и диссипативного разогрева нелинейных вязкоупругих тел при периодическом нагружении // Прикл. механика. – 1986. – **22**, № 6. – С. 49–55.

46. *Сенченков И. К., Табиева Г. А.* Определение параметров модели Боднера – Партома термовязкопластического деформирования материалов // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 2. – С. 64–72.
47. *Сканави Г. Н.* Физика диэлектриков. – Москва: Физматгиз, 1958. – Т. 2. – 980 с.
48. *Термомеханика* эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / *Потураев В. Н., Дырда В. И., Карнаухов В. Г. и др.* Под ред. *Потураева В. Н.* – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
49. *Червинко О. П.* О моделировании колебаний в системах виброзащиты, содержащих вязкопластические виброизоляторы // Механіка гіроскопічних систем. – 2001–2002. – Вип. 17–18. – С. 218–226.
50. *Червинко О. П.* О моделировании колебаний в системах виброзащиты, содержащих нелинейно-вязкоупругие виброизоляторы // Механіка гіроскопічних систем. – 2001–2002. – Вип. 17–18. – С. 226–233.
51. *Bodner S. R.* Unified plasticity – an engineering approach. – Haifa: Israel Inst. of Technology, 2000. – 106 p.
52. *Bodner S. R., Partom Y.* Constitutive equation for elastoviscoplastic strain hardening materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1975. – **42**. – P. 385–389.
53. *Chaboche J.-L.* Cyclic viscoplastic constitutive equations. Part I: Thermodynamic consistent formulation // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1993. – **60**, No. 4. – P. 813-821.
54. *Hansen J. S., Heppler G. R.* Mindlin shell element trhat satisfies rigid-body requirements // AIAA Journal. – 1985. – **23**, No. 2. – P. 288–295.
55. *Karnaukhov V. G.* Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // J. Thermal Stresses. – **28**, No. 6-7. – P. 783–815.
56. *Ligthill J.* The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics // Proc. Roy. Soc. – 1986. – P. 35–50.
57. *Payne A. R.* Hysteresis in rubber vulcanizates // J. Polym. Sci.: Polymer Symposia. Rubber and Rubber Elasticity. – 1974. – No. 48. – P. 169–196.

МОНОГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧАХ О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ И ДИССИПАТИВНОМ РАЗОГРЕВЕ НЕУПРУГИХ ТЕЛ

С использованием нелинейных моделей неупругого поведения материалов, конечно-элементных методов решения нелинейных краевых задач и анализа конкретных числовых результатов обсуждается вопрос об одночастотных колебаниях и диссипативном разогреве неупругих тел при моногармоническом нагружении.

MONOHARMONIC APPROXIMATION IN PROBLEMS OF NONLINEAR VIBRATIONS AND DISSIPATIVE HEATING OF INELASTIC BODIES

The question about one-frequency vibrations and dissipative heating of inelastic bodies under monoharmonic loading is considered using the nonlinear models of inelastic materials, finite-element method and analysis of numerical results.

[1] Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ,
[2] Миколаїв. держ. ун-т
ім. В. О. Сухомлинського, Миколаїв

Одержано
07.02.06