

**ТЕРМОПРУЖНІСТЬ НЕФЕРОМАГНІТНИХ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ
ЗА УМОВ ДІЇ ІМПУЛЬСНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ**

Запропоновано математичну модель опису та методика визначення термопруженого стану неферромагнітних електропровідних тіл за умов дії зовнішніх неусталених електромагнітних полів імпульсного типу, які мають характер широко використовуваного в інженерній практиці режиму з модуляцією амплітуди при імпульсному модулюючому сигналі. Модель є розвитком відомих з літератури моделей для квазіусталеного та імпульсного електромагнітних полів. Як приклад досліджено термомеханічну поведінку суцільного та порожнистого циліндрів за такої дії.

Елементи конструкцій сучасної техніки, як при виготовленні, так і при експлуатації, перебувають в умовах багатофакторних навантажень, одними з яких є імпульсні електромагнітні. Такі навантаження, зокрема, широко використовуються в технологіях обробки деталей машин і механізмів, у системах і пристроях для зняття обледеніння на літаках і кораблях, очищення трубопроводів складної форми, пружного пружинення деталей [1, 7, 10, 11, 20] і т. п. Функціональне призначення згаданих технічних систем і пристроїв, у яких використовується дія імпульсних електромагнітних полів (ЕМП), пов'язане зі створенням температурних полів та динамічних напружень (механічних коливань) у відповідних елементах конструкцій і приладів (за яких відбувається зняття небажаних чужорідних нашарувань чи внутрішніх напружень) без порушення граничної несучої здатності цих елементів.

Основним джерелом створення імпульсних ЕМП у згаданих пристроях, як і імпульсних ЕМП промислового використання, є технічні засоби, що працюють на принципі розряду конденсаторної системи на соленоїд [1, 10, 11, 20]. Імпульсні ЕМП можуть створюватись також генераторами високочастотних електромагнітних коливань [1, 11]. Зміна в часі цих імпульсних ЕМП має характер режиму з модуляцією амплітуди [1, 10, 20]. Такий клас імпульсних ЕМП допускає їх різноманітне практичне використання в зв'язку з можливістю керування процесом за рахунок вибору відповідного закону зміни в часі модулюючої функції і частоти несучого сигналу.

За останні роки розв'язано ряд інженерних проблем в галузі розробки технічних систем для створення імпульсних ЕМП [10, 11, 20], запропоновано методики розрахунку окремих типів імпульсних ЕМП, наближену розрахункову схему оцінки квазістатичних напружень при «магнітному ударі» – частковому типі імпульсної електромагнітної дії [9, 12, 20, 21, 23]. Відомі також методики визначення термонапруженого стану електропровідних тіл за умов дії усталених і квазіусталених ЕМП [19, 22]. Однак в літературі відсутні математичні моделі і методи опису термонапруженого стану електропровідних тіл за умов дії широко розповсюджених у практиці електромагнітної обробки імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди. Тому виникає **проблема** розробки варіанту теорії термомеханіки неферромагнітних електропровідних тіл за умов дії імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди з урахуванням особливостей дії імпульсних ЕМП на матеріальний континуум для побудови раціональних режимів імпульсної електромагнітної обробки та експлуатації електропровідних конструкційних елементів за такої дії, зокрема, при забезпеченні їх граничної несучої здатності.

У статті запропоновано варіант термомеханіки неферромагнітних електропровідних тіл за умов дії імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди, який включає математичні моделі кількісного опису у взаємозв'язку електромагнітних, теплових і механічних процесів у циліндричних та сферичних тілах і тілах з плоскопаралельними границями при врахуванні особливос-

тей дії ЕМП на електропровідне тіло для характерних типів модулюючого сигналу, а також методики побудови розв'язків відповідних задач математичної фізики.

Розглядаємо імпульсні ЕМП, які описуються значеннями вектора напруженості магнітного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ на поверхні електропровідного тіла вигляду

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}_0, t) \equiv \mathbf{H}^0(\mathbf{r}_0, t) \cos \omega t$$

або

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}_0, t) \equiv \mathbf{H}^0(\mathbf{r}_0, t) \sin \omega t. \quad (1)$$

Тут $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}_0, t) = H_*(t)\mathbf{H}_0^*(\mathbf{r}_0)$ – модульована амплітуда; $\mathbf{H}_0^*(\mathbf{r}_0)$ – амплітуда несучого сигналу; $H_*(t)$ – функція імпульсного характеру зміни в часі, що описує закон зміни в часі сигналу, який модулює амплітуду електромагнітних коливань (амплітуду несучого режиму), і задовольняє умови $H_*(t) \leq 1$, $t \in [0, t_i]$, $H_*(0) = 0$, $H_*(t_i) = 0$; ω – несуча кругова частота; t_i – час тривалості електромагнітної дії; \mathbf{r} і \mathbf{r}_0 – радіуси-вектори точок об'єму та поверхні електропровідного тіла. Приймаємо, що параметри $\mathbf{H}_0^*(\mathbf{r}_0)$, $H_*(t)$, ω , t_i є такими, що діюче імпульсне ЕМП відноситься до класу імпульсних «неруйнівних» ЕМП з імпульсом тривалістю, меншою від часток секунди ($t \leq 0.1$ с), і з найбільшим значенням індукції магнітного поля, меншим ніж 50Тл ($B_{\max} \leq 50$ Тл). Розглянемо такі ЕМП, дія яких ще не приводить до виникнення ударних хвиль ($H_{\max} \leq 10^7$ А/м, де H_{\max} – найбільше значення напруженості магнітного поля на поверхні тіла) [10, 12, 20, 23]. Сформулюємо задачі математичної фізики, що описують теплові й механічні процеси за такої електромагнітної дії.

При окреслених величинах параметрів електромагнітної дії напруження і деформації, а також їх швидкості в тілі є настільки малими, що виконуються залежності лінійної теорії пружності, і впливом рухомості середовища на характеристики ЕМП можна знехтувати. Процес деформування електропровідного тіла має динамічний характер, для якого властиві відомі особливості механічної поведінки деформованих тіл за динамічних та імпульсивних силових і теплових навантажень (значення динамічних модулів пружності металів і їх сплавів мало відрізняються від статичних, а значення динамічної межі пружної деформації σ_d може зростати в 2 ÷ 3 рази порівняно зі статичною межею пружності σ_s і є визначене експериментально для різних матеріалів залежно від швидкості деформації) [8, 18].

Розглядаємо широко розповсюджені ізотропні однорідні недіелектричні неферромагнітні тіла, для яких електромеханічні та термоелектричні ефекти є неістотними, вектори індукцій \mathbf{D} і \mathbf{B} паралельні до векторів напруженостей електричного \mathbf{E} та магнітного \mathbf{H} полів, струм провідності \mathbf{j} паралельний до \mathbf{E} . У цьому випадку приймаємо, що матеріальні рівняння електродинаміки мають вигляд $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \sigma_0\mathbf{E}$, де $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_*$, $\mu = \mu_0 \mu_*$; ϵ_* , μ_* – постійні відносні електрична і магнітна проникності; σ_0 – коефіцієнт електропровідності (величини, визначені експериментально або теоретично для конкретних фізичних моделей твердих тіл); ϵ_0 , μ_0 – відповідно електрична та магнітна сталі. За прийнятих припущень вплив імпульсного ЕМП з модуляцією амплітуди на процеси теплопровідності та пружного деформування в електропровідному тілі, як і для квазіусталених ЕМП [19, 22], враховуємо через зумовлені цим полем джоулеві тепловиділення $Q = \sigma_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ і пондеромоторні сили $\mathbf{F} = \sigma_0 \mu \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Ці фактори зумовлюють виникнення нестационарних температурних і механічних полів. Пон-

деромоторні моменти кручення ($\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_E^* + \mathbf{M}_M^*$, де $\mathbf{M}_E^* = \mathbf{P} \times \mathbf{E}$ – електричні моменти, а $\mathbf{M}_M^* = \mathbf{M} \times \mathbf{B}$ – магнітні моменти; $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon \mathbf{E}$ і $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}$ – відповідно вектори поляризації і намагнічування) за рахунок паралельності векторів індукцій і напруженостей електричного та магнітного полів дорівнюють нулеві. У такому наближенні і при постійних характеристиках матеріалу (зокрема, рівних середнім значенням в розглядуваному інтервалі зміни температур) вихідні співвідношення для кількісного опису параметрів, що характеризують електромагнітні, теплові та механічні процеси в тілах за імпульсною електромагнітною дією, можна сформулювати за два етапи. На першому етапі записуємо рівняння на визначення параметрів ЕМП і вирази для виробництва тепла та пондеромоторних сил як функцій від електромагнітних параметрів. На другому етапі формулюємо залежності, що описують механічні та теплові параметри при заданих початкових і граничних умовах на температуру T і компоненти σ_{ij} тензора напружень $\hat{\sigma}$, у яких джерелами тепла та об'ємними силами є джоулеві тепловиділення і пондеромоторні сили, визначені на першому етапі. При відомих температурі та компонентах тензора напружень $\hat{\sigma}$ аналізуємо параметри наявних фізико-механічних процесів і їх особливості в залежності від імпульсних електромагнітних навантажень, а також з умови

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(\hat{\sigma}) - I_1^2(\hat{\sigma})} / \sqrt{2} \leq \sigma_{im\delta} \quad (2)$$

(де σ_i – інтенсивність напружень; $I_j(\hat{\sigma})$, $j=1,2$, – інваріанти тензора напружень) визначаємо допустимі параметри імпульсного ЕМП, які забезпечують граничну несучу здатність розглядуваних тіл.

Розв'язування такої комплексної задачі навіть для тіл простої геометричної конфігурації пов'язане зі значними математичними труднощами. З метою використання наближених підходів до розв'язування складових задач (зокрема, термопружності на другому етапі) за ключові функції виберемо \mathbf{H} , T , $\hat{\sigma}$, відносно яких сформулюємо задачі математичної фізики. Знайдемо, що формулювання прямих задач відносно цих ключових функцій дозволяє ефективно використати метод поліноміальної апроксимації розв'язків і суттєво підвищити їх точність [2, 4, 5, 13, 16].

На першому етапі, нехтуючи струми зміщення і за відсутності вільних зарядів у тілі, на основі рівнянь Максвелла для неферромагнітного електропровідного тіла записуємо рівняння для визначення параметрів ЕМП (вектора напруженості магнітного поля \mathbf{H}):

$$\Delta \mathbf{H} - \sigma_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

і вирази для тепловиділень і пондеромоторних сил

$$Q \equiv Q_j = [\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]^2 / \sigma_0, \quad \mathbf{F} = \mu \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \quad (4)$$

Рівняння (3) розв'язуємо за граничної умови (1) і початкової умови $\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = 0$ (відсутність поля в початковий момент часу $t = 0$).

При визначенні параметрів, що описують термопружний стан тіла, за ключові функції виберемо температуру T і тензор напружень $\hat{\sigma}$. Приймаючи, що в початковий момент часу $t = 0$ переміщення \mathbf{U} і швидкості $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$ дорівнюють нулеві, а температура T дорівнює T_0 [K], отримаємо початкові умови

$$T(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \sigma_{ik}(\mathbf{r}, 0) = 0, \\ \frac{1}{2G} \frac{\partial \sigma_{ik}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} + \left(\alpha \frac{\partial T(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_{*}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} \right) \delta_{ik} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Тут T – відхилення температури від початкової T_0 ; $\sigma_* \equiv I_1(\hat{\sigma}) = \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$; $G = E/[2(1 + \nu)]$ – модуль зсуву; α, ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона; E – модуль Юнга; δ_{ik} – символ Кронекера.

Згідно з означеними залежностями (4) чинниками впливу ЕМП на тіло, температуру T і компоненти тензора напружень σ_{ik} подаємо у вигляді суми двох складових

$$T = T^Q + T^F, \quad \sigma_{ik} = \sigma_{ik}^Q + \sigma_{ik}^F, \quad (6)$$

де T^Q , σ_{ik}^Q і T^F , σ_{ik}^F – складові, зумовлені відповідно джоулевым теплом і пондеромоторними силами.

Відомо, що для електромагнітної дії класу імпульсних «неруйнівних» ЕМП тіла протягом такої дії нагріваються адіабатично – температура в точці визначається тільки кількістю енергії ЕМП незворотно поглинутої у відповідному елементарному об'ємі тіла (джоулевым теплом) [10, 12, 20, 23].

За таких умов температурне поле T^Q описується рівнянням $\frac{\partial T^Q}{\partial t} = \frac{\alpha}{\lambda} Q$, де α, λ – коефіцієнти температуро- і теплопровідності. Тому в розглядуваному випадку для складової температури T^Q маємо

$$T^Q(\mathbf{r}, t) = \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^t Q(\mathbf{r}, t) dt. \quad (7)$$

Приймаємо, що тіло вільне від силового навантаження. Тоді з рівнянь термомпружності для визначення компонент σ_{ik}^Q складової $\hat{\sigma}^Q$ тензора напружень, зумовлених температурою T^Q , отримаємо систему рівнянь [19, 22]

$$\text{Def}(\text{Div} \hat{\sigma}^Q) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{2G} \hat{\sigma}^Q + \left(\alpha T^Q - \frac{\nu}{E} \sigma_* \right) \hat{I} \right], \quad (8)$$

яку розв'язуємо за початкових

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}^Q(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{ik}^Q(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} = 0, \quad i \neq k, \\ \frac{\partial \sigma_{ik}^Q(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} = - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T^Q(\mathbf{r}, 0)}{\partial t}, \quad i = k, \end{aligned} \quad (9)$$

і граничних $\sigma_{ik}^Q n_k = 0$ при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ умов. Тут ρ – густина матеріалу тіла; \hat{I} – одиничний тензор.

При визначенні складових температури T^F і напружень σ_{ik}^F , зумовлених дією пондеромоторної сили, враховуємо той факт, що термічне збурення в електропровідному тілі (викликане деформацією від динамічної силової дії – пондеромоторної сили \mathbf{F} , яка має імпульсний характер) є малим. Тому за час імпульсної електромагнітної дії процес деформування електропровідного тіла можна вважати адіабатичним, за якого приріст температури T^F визначається формулою [9, 12, 13, 19]

$$T^F = - \frac{1}{\lambda} [(3\lambda_* + 2\mu_*) \alpha \varepsilon T_0 \varepsilon_{kk}^F], \quad (10)$$

де ε_{kk}^F – перший інваріант тензора деформацій $\hat{\varepsilon}^F$, зумовлених дією пондеромоторної сили; $\lambda_*, \mu_* \equiv G$ – ізотермічні коефіцієнти Ляме. Враховуючи, що у випадку адіабатичної деформації тіла закон Гука визначається співвідношенням

$$\sigma_{ik}^F = 2\mu_* \varepsilon_{ik}^F + \lambda_* \varepsilon_{kk}^F g_{ik},$$

запишемо вираз об'ємної деформації тіла у вигляді

$$\varepsilon_{kk}^F = \frac{1}{3\lambda_s + 2\mu_*} \sigma_{kk}^F,$$

де

$$\lambda_s = \lambda_\sigma + \frac{1}{\lambda} [(3\lambda_* + 2\mu_*)^2 \alpha \varkappa T_0] = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu E \left(1 + \varepsilon_* \frac{1-\nu}{\nu} \right) \right]$$

– адіабатичний коефіцієнт Ляме,

$$\varepsilon_* = \frac{1}{(\lambda_* + 2\mu_*)\lambda} [(3\lambda_* + 2\mu_*)^2 \alpha^2 \varkappa T_0] = \frac{1}{(1-\nu)(1-2\nu)\lambda} [\alpha^2 \varkappa E T_0 (1+\nu)]$$

– параметр зв'язаності полів деформації і температури. Тоді приріст температури T^F відносно початкової температури тіла T_0 буде таким [2, 5, 16]:

$$T^F = - \frac{(3\lambda_* + 2\mu_*) \alpha \varkappa T_0 \sigma_{kk}^F}{\lambda (3\lambda_s + 2\mu_*)} = - \frac{\alpha \varkappa T_0}{[1 + 3\varepsilon_* (1-\nu)/(1+\nu)] \lambda} \sigma_{kk}^F, \quad (11)$$

а компоненти складової $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^F$ тензора напружень задовольняють рівняння

$$\text{Def}(\text{Div} \sigma_{ik}^F + \mathbf{F}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{2G} \sigma_{ik}^F - \frac{\nu \nu_*}{E} \sigma_*^F \delta_{ik} \right), \quad (12)$$

початкові

$$\sigma_{ik}^F(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{ik}^F(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

і граничні $\sigma_{ik}^F n_k = 0$ при $t > 0$ умови, де

$$\nu_* = 1 + [(1-\nu)(1-2\nu)\varepsilon_*] \frac{1}{\nu(1+\nu)(1+3\varepsilon_*(1-\nu)/(1+\nu))}.$$

Зауважимо, що, діючи на рівняння (8) і (12) оператором несумісності Ink і враховуючи, що $\text{Ink Def} \equiv 0$, а також початкові умови (9) і (13) на тензори напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^Q$ і $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^F$, отримаємо $\text{Ink} \hat{\boldsymbol{e}}^Q = 0$ і $\text{Ink} \hat{\boldsymbol{e}}^F = 0$, тобто умови неперервності деформацій виконуються тотожно при виконанні рівнянь (8) і (12).

При розгляді температур і напружень для моментів часу $t > t_i$ – більших за тривалість імпульсної дії – температурне поле $T^*(\mathbf{r}, t) = T^* = T^Q + T^F$ визначаємо з рівняння $\Delta T^* - \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial T^*}{\partial t} = 0$ за початкової умови $T^*(\mathbf{r}, 0) = T^Q(\mathbf{r}, t_i) + T^F(\mathbf{r}, t_i)$ і граничних умов, що відповідають конвективному теплообміну тіла з зовнішнім середовищем. Відповідне поле напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{T^*}$, враховуючи висновки роботи [9, 17] про зникання динамічних ефектів при тепловому ударі за скінченної швидкості росту температури на поверхні тіл, шукаємо в квазістатичній постановці з системи рівнянь

$$\text{Div} \sigma_{ik}^{T^*} = 0, \quad \text{Ink} \left[\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ik}^{T^*} + \left(\alpha T^* - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk}^{T^*} \right) g_{ik} \right] = 0, \quad (14)$$

яка впливає зі співвідношень (8) за граничних умов $\sigma_{ik}^{T^*} n_k = 0$ на поверхні електропровідного тіла.

При дослідженні фізико-механічних полів у тілах конкретної геометрії вигідно використовувати криволінійні системи координат, в яких зручно параметризуються граничні поверхні тіл. Розглянуті вище співвідношення термомеханіки сформульовано для електропровідних тіл циліндричної та сферичної геометрії і тіл з плоскпаралельними границями [2, 6, 14, 15].

Розв'язок сформульованих вище задач стосовно ключових функцій $\Phi = \{H_i, \sigma_{ik}^Q, \sigma_{ik}^F, T^*, \sigma_{ik}^{T^*}\}$ може бути знайдений з використанням відомих методів розв'язування задач математичної фізики [3]. Для тіл з плоскпа-

ралельними ($i, k = x, y, z$), циліндричними ($i, k = r, \varphi, z$) і сферичними ($i, k = r, \varphi, \theta$) границями побудуємо наближені розв'язки цих задач, використовуючи апроксимацію шуканих функцій $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t)$ (при відповідній їх гладкості [13, 20]) многочленом третього степеня за координатною змінною γ [2, 4–6, 14, 16]

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t) = \sum_{i=1}^4 a_i^\Phi(\alpha_1, \alpha_2, t) \gamma^{i-1}, \quad (15)$$

де $\gamma = z$ для плоскопаралельного шару та $\gamma = r$ для циліндричних і сферичних тіл. Коефіцієнти $a_i^\Phi(\alpha_1, \alpha_2, t)$ виражаємо через інтегральні характеристики $\Phi_s(\alpha_1, \alpha_2, t)$ цих величин (віднесені до відповідної елементарної площі чи елементарного моменту), тобто

$$\Phi_s(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{s + \ell + 1}{r_1^{s+\ell+1} - r_0^{s+\ell+1}} \int_{r_0}^{r_1} \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t) \gamma^{s+\ell} d\gamma, \quad s = 1, 2, \quad (16)$$

і задані граничні значення $\Phi^\pm(\alpha_1, \alpha_2, t)$ ключових функцій чи відомі граничні умови стосовно цих функцій на граничних поверхнях. Тут $\alpha_1 = x, \alpha_2 = y, \ell = -1, r_0 = 0, r_1 = h$ (h – товщина) – для шару з плоскопаралельними границями; $\alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = z, \ell = 0$ – для циліндричного тіла; $\alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = \theta, \ell = 1$ – для сферичного тіла; r_0 і r_1 – внутрішній і зовнішній радіуси порожнистих циліндра чи сфери; $r_0 = 0$ і $r_1 = R$ (R – радіус) – для суцільних циліндра і кулі.

Рівняння для визначення інтегральних характеристик $\Phi_s(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $s = 1, 2$, отримаємо, домноживши на $\gamma^{s+\ell}$ вихідні рівняння для відповідних величин і проінтегрувавши по γ з урахуванням співвідношень (16).

При неоднорідних граничних умовах на ключові функції $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t)$ для підвищення точності апроксимації за недостатньої гладкості функцій $\Phi^\pm(\alpha_1, \alpha_2, t)$ або, коли значення $\Phi^\pm(\alpha_1, \alpha_2, t)$ не є відомі, використовуємо подання ключових функцій у вигляді

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t) = \Phi^0(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t) + \Phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t).$$

Функція $\Phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t)$ задовольняє задані неоднорідні граничні умови і має відповідну структуру залежно від геометрії тіла. Для розглядуваних тіл функцію Φ^* вибираємо у вигляді:

– для циліндричного і сферичного шарів

$$\Phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t) = \frac{1}{2} \left\{ [\Phi^+(\alpha_1, \alpha_2, t) + \Phi^-(\alpha_1, \alpha_2, t)] + \frac{2r - (r_1 + r_0)}{r_1 - r_0} [\Phi^+(\alpha_1, \alpha_2, t) - \Phi^-(\alpha_1, \alpha_2, t)] \right\}, \quad (18)$$

– для шару з плоскопаралельними границями

$$\Phi^* = \frac{1}{2} \left[[\Phi^+(\alpha_1, \alpha_2, t) + \Phi^-(\alpha_1, \alpha_2, t)] + \frac{z}{h} [\Phi^+(\alpha_1, \alpha_2, t) - \Phi^-(\alpha_1, \alpha_2, t)] \right], \quad (19)$$

– для суцільних циліндра та кулі

$$\Phi^* = \frac{r}{R} \Phi^+(\alpha_1, \alpha_2, t). \quad (20)$$

При цьому знаходження розв'язків вихідних задач на ключові функції $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t)$ зводимо до розв'язання задач на функції $\Phi^0(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t)$, що описуються рівнянням $L(\Phi^0) = -L(\Phi^*)$ за однорідних граничних умов. Тут $L(\Phi)$ – диференціальний оператор вихідного рівняння на функцію Φ , а Φ^* визначається співвідношеннями (18)–(20). Тоді, застосувавши апроксимації (15) вже до функцій $\Phi^0(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t)$, коефіцієнти $a_i^{\Phi^0}(\alpha_1, \alpha_2, t)$ подаємо через аналогічні до (16) інтегральні характеристики $\Phi_s^0(\alpha_1, \alpha_2, t)$ цих функцій та їх нульові граничні значення.

Отримані двовимірні рівняння на інтегральні характеристики розв'язуємо відомими аналітичними чи числовими методами або стосуємо повторно апроксимацію інтегральних характеристик $\Phi_s(\alpha_1, \alpha_2, t)$ чи $\Phi_s^0(\alpha_1, \alpha_2, t)$ за просторовими змінними α_1 і α_2 кубічним законом.

З використанням цієї методики побудовано розв'язки крайових задач для тіл розглядуваної геометрії за конкретних типів імпульсних електромагнітних навантажень [2, 4–6, 16].

Як приклад досліджено термомеханічну поведінку суцільного та порожнистого електропровідних циліндрів за умов електромагнітної дії в режимі з модуляцією амплітуди при імпульсному модулюючому сигналі.

Розглянуто порожнистий (з внутрішнім $r_0 = 8$ мм і зовнішнім $r_1 = 10$ мм радіусами) і суцільний (радіуса $R = 10$ мм) циліндри, виготовлені зі сталі Х18Н9Т. Функцію $H_*(t)$ у співвідношенні (1) приймали такою: $H_*(t) = kH_0(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t})$ (k – нормуючий множник; H_0 – максимальне значення напруженості магнітного поля в імпульсі; β_1 і β_2 – параметри, що характеризують швидкість зростання і спадання модулюючого імпульсу). Параметри імпульсу вибирали такими: тривалість імпульсу $t_i = 10^{-4}$ с, $\beta_1 = 69000$, $\beta_2 = 2\beta_1$; $k = 4$. Ці значення відповідають часу фронту наростання імпульсу $t_{iner} = 0.1t_i$.

З аналізу виразів для радіальних напружень σ_{rr} випливає, що при частоті ЕМП $\omega = \omega_* \approx \omega_r/2$ (тут ω_r – частота власних механічних коливань) значно зростають рівні складових напружень σ_{ik}^F , зумовлених пондеромоторною силою, порівняно зі складовими σ_{ik}^Q . Такі частоти ЕМП за аналогією з індукційним нагрівом усталеним ЕМП [19, 22] будемо називати резонансними. Залежності від часу колових напружень $\sigma_{\phi\phi}$ (які є найбільшими і приймають максимальні значення на зовнішній поверхні $r = r_1$ і $r = R$ циліндрів) за частоти несучого сигналу $\omega \neq \omega_*$ показано на рис. 1 для порожнистого (при $\omega = 1.236$ МГц) і на рис. 2 – для суцільного (при $\omega = 314$ КГц) циліндрів.

Ці частоти є приблизно в три рази меншими від значення першої резонансної частоти $\omega_{*1} = 4.87$ МГц для порожнистого і $\omega_{*1} = 1.1$ МГц – для суцільного циліндрів. Колові напруження $\sigma_{\phi\phi}^Q$ в обох циліндрах є більшими від напружень $\sigma_{\phi\phi}^F$ (у порожнистому – в 5 разів, у суцільному – в 1.5). При цьому напруження $\sigma_{\phi\phi}^Q$ в порожнистому циліндрі приблизно в 6 разів більші від таких же напружень у суцільному циліндрі.

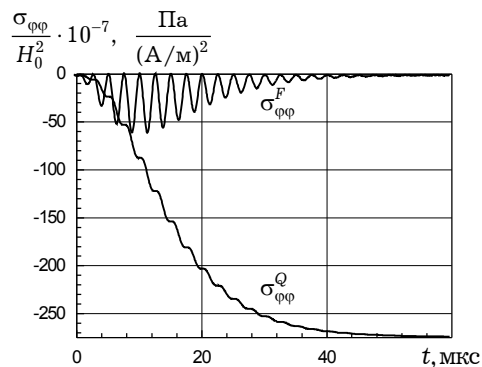


Рис. 1

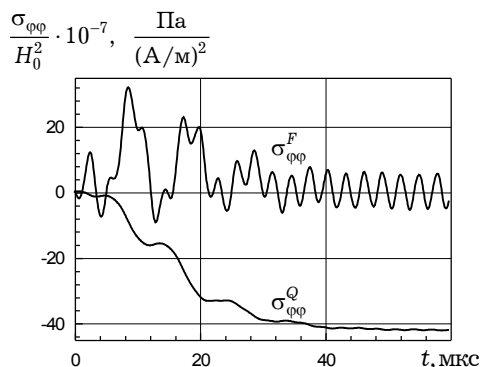


Рис. 2

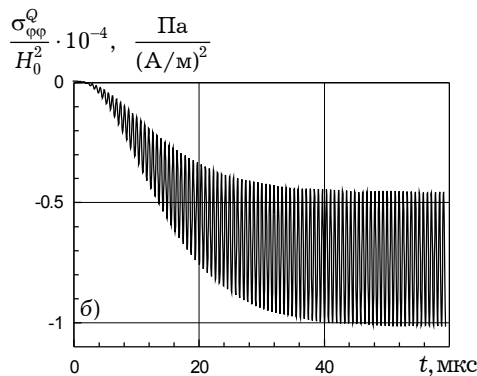
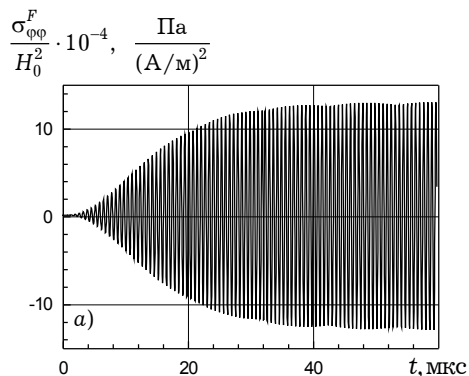


Рис. 3

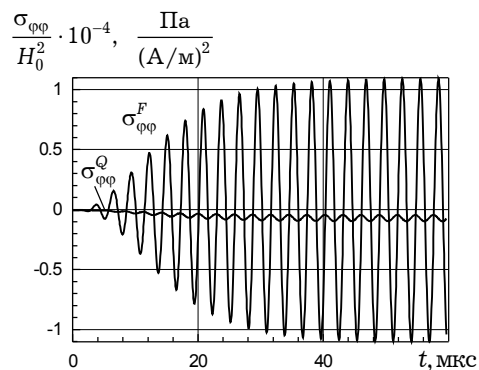


Рис. 4

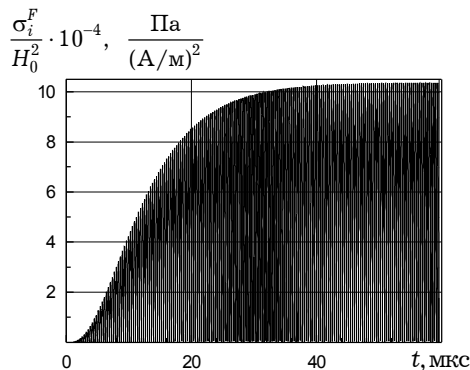


Рис. 5

Рис. 3 і 4 ілюструють зміну в часі при частоті $\omega = \omega_{*1}$ колових напружень $\sigma_{\varphi\varphi}^F$ і $\sigma_{\varphi\varphi}^Q$ (відповідно рис. 3а і рис. 3б) у порожнистому та суцільному (рис. 4) циліндрах.

Видно, що в обох циліндрах напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^F$ мають симетричний осцилюючий характер, а максимальні значення амплітуд їх осциляцій стають на порядок більшими від максимальних значень стискальних коливних напружень $\sigma_{\varphi\varphi}^Q$. На рис. 5 показано зміну в часі інтенсивності сумарних напружень σ_i в порожнистому циліндрі при частоті $\omega = \omega_{*1}$. Максимальні значення колових напружень $\sigma_{\varphi\varphi}^F$ та інтенсивності сумарних напружень σ_i в порожнистому циліндрі є на порядок більшими від таких же значень цих величин у суцільному циліндрі цього ж зовнішнього діаметра. На основі

отриманих залежностей встановлено значення величини H_0 , при якому інтенсивності напружень σ_i досягають межі пружної деформації (зокрема, для тривалості імпульсу $t_i = 10^{-4}$ с значення $\sigma_i = 300$ МПа [1, 18] (межа пружності для сталі X18H9T) досягаються при частотах $\omega \neq \omega_*$ в порожньому циліндрі при $H_0 = 3.5 \cdot 10^6$ А/м ($\omega = 1.236$ МГц) і в суцільному – при $H_0 = 8.5 \cdot 10^6$ А/м ($\omega = 314$ КГц), а при частотах $\omega = \omega_{*1}$ в порожньому циліндрі – при $H_0 = 5 \cdot 10^5$ А/м і в суцільному – при $H_0 = 1.5 \cdot 10^6$ А/м).

Проведений аналіз розв'язків показав, що напружений стан неферомагнітних електропровідних тіл за умов дії імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди зумовлюється як джоулевим теплом, так і пондеромоторними силами. При одиночному електромагнітному імпульсі та дії в режимі згасної синусоїди вплив джоулевого тепла та пондеромоторних сил на величину напружень у тілі є рівнозначним. Дія в режимі згасної синусоїди однакової тривалості з дією електромагнітного імпульсу дозволяє досягнути тієї ж величини напружень і температури T^Q при значно меншій величині напруженості магнітного поля H_0 . За умов дії імпульсного модулюючого сигналу при частоті несучого сигналу $\omega \neq \omega_*$ (поза околom резонансних частот) визначальними є напруження σ_{ik}^Q , а складова температури T^F є нехтовно малою. В околі частот $\omega = \omega_*$ несучого сигналу різко зростають рівні напружень σ_{ik}^F , а складова температури T^F складає 10–15% від складової температури T^Q для сталених тіл і може бути співвимірною з нею для мідних тіл.

Таким чином, запропоновано варіант термомеханіки електропровідних тіл, який дозволяє дослідити їх термомеханічну поведінку за умов дії імпульсних ЕМП з модуляцією амплітуди та встановити критичні значення параметрів ЕМП, за яких забезпечується гранична несуча здатність.

1. *Белый И. В., Фертюк С. М., Хименко Л. Т.* Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. – Харьков: Вища шк., 1977. – 168 с.
2. *Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусій Р. С.* Задачі термомеханіки електропровідних оболонок за умов дії неусталених електромагнітних полів імпульсного типу // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 70–75.
3. *Галицын А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1976. – 282 с.
4. *Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Стасюк Г. Б.* Термопружний стан електропровідної пластини під час електромагнетної дії в режимі згасної синусоїди // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 6. – С. 25–30.
5. *Гачкевич А. Р., Мусій Р. С., Стасюк Г. Б.* Температурные поля и напряжения в длинном полом электропроводном цилиндре при электромагнитном воздействии в режиме с модуляцией амплитуды при импульсном модулирующем сигнале // Теорет. и прикл. механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 168–181.
6. *Гачкевич А. Р., Мусій Р. С., Стасюк Г. Б.* Термомеханическое состояние в полой электропроводной сфере при импульсном электромагнитном воздействии // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 9–17.
7. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.)
8. *Ионов В. Н., Огибалов П. М.* Напряжения в телах при импульсивном нагружении. – Москва: Высш. шк., 1975. – 463 с.
9. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
10. *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсные магнитные поля. – Москва: Мир, 1972. – 392 с.
11. *Михайлов В.М.* Импульсные электромагнитные поля. – Харьков: Вища шк., 1979. – 138 с.

12. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – Москва: Мир, 1991. – 560 с.
13. *Мотовиловец И. А., Козлов В. И.* Термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1987. – 263 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 1.)
14. *Мусій Р. С.* Формулювання і методика розв'язування просторових і двовимірних динамічних крайових задач електромагнітотермопружності для циліндричних тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1999. – **42**, № 3. – С. 131–139.
15. *Мусій Р. С.* Рівняння в напруженнях три-, дво- та одновимірних динамічних задач термопружності // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2000. – **36**, № 2. – С. 20–26.
16. *Мусій Р. С.* Термопружний стан електропровідного циліндра під дією поверхневих електромагнетних імпульсів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2004. – **40**, № 2. – С. 45–52.
17. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
18. *Орленко Л. П.* Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках. – Москва: Машиностроение, 1964. – 168 с.
19. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1977. – 248 с.
20. *Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение /* Под ред. Ф. Херлаха. – Москва: Мир, 1988. – 456 с.
21. *Улітко А. Ф., Мольченко Л. В., Ковальчук В. Ф.* Магнітопружність при динамічному навантаженні. – Київ: Либідь, 1994. – 156 с.
22. *Gaczkiewicz A., Kasperski Z.* Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. – Opole: OWPO, 1999. – 367 s.
23. *Moyn F. O.* Problem in magneto-solid mechanics // *Mechanics Today.* – 1978. – **4**. – P. 307–309.

ТЕРМОУПРУГОСТЬ НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Предложена математическая модель описания и методика определения термоупругого состояния неферромагнитных электропроводных тел при воздействии внешних неустановившихся электромагнитных полей импульсного типа, имеющих характер широко используемого в инженерной практике режима с модуляцией амплитуды при импульсном модулирующем сигнале. Модель является развитием известных в литературе моделей для квазиустановившегося и импульсного электромагнитных полей. В качестве примера исследовано термомеханическое состояние сплошного и полого цилиндров при таком воздействии.

THERMOELASTICITY OF NON-FERROMAGNETIC ELECTROCONDUCTING SOLIDS UNDER INFLUENCE OF PULSE ELECTROMAGNETIC FIELDS

A mathematical model for description and methodology for definition of thermo-stressed state of non-ferromagnetic solids which are influenced by external non-stationary electromagnetic fields of impulse type, which are widely used in engineering praxis, are presented. This model is the development of well-known models for quasi-stationary and impulse electromagnetic fields. As example, thermo-mechanical behavior of continuous and hollow cylinders during such influence is considered.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

³ Політехніка Опольська, Опольце, Польща

Одержано
01.02.06