

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЕ ПРИ ИЗГИБЕ

На примере задачи о контакте абсолютно жесткого диска с тонкой упругой полосой исследовано динамику изменения нормальных напряжений в области контакта с увеличением прикладываемой к диску силы, базируясь на точном решении задачи и соответствующем приближенном решении, построенном с использованием теории Герца – Тимошенко. Проведено сопоставление результатов, полученных с помощью точного и приближенного решений, которое обосновывает целесообразность использования гипотезы Герца – Тимошенко в контактной механике тонкостенных упругих элементов. Показано, что при достаточно больших значениях прикладываемой силы происходит отрыв полосы от диска в середине области контакта.

**Введение.** Задачи о контактном взаимодействии твердых тел с тонкостенными упругими элементами образуют специфический раздел контактной механики. Среди основных особенностей задач этого класса следует отметить высокую чувствительность законов распределения контактных напряжений к прогибам тонкостенных элементов, вызванных действием силовых факторов, а также к форме основания штампов, что во многих случаях приводит к некорректности использования прикладных теорий изгиба пластин и оболочек. Как отмечено в обзорной работе [2], при изгибе тонких упругих пластин и оболочек сосредоточенными силами вблизи точек приложения этих сил возникают области с резко неравномерным распределением нормальных и касательных напряжений. Детальное исследование задачи об изгибе тонкой упругой полосы сосредоточенными силами представлено в работе [4]. В этой статье отмечено существенное расхождение точного решения задачи и приближенного, полученного на основании гипотез Кирхгофа, вблизи точек приложения сосредоточенных сил. Приближенное эффективное решение этой задачи было построено на основе теории Герца – Тимошенко. Использование гипотезы Герца – Тимошенко дало возможность построить корректные решения некоторых плоских и пространственных задач о контактных взаимодействиях абсолютно жестких тел (штампов) с тонкими упругими элементами во всей области, включая локальные зоны вблизи приложения сосредоточенных нагрузок, для широкого диапазона значений параметров [3, 6, 7].

**1. Точное решение задачи о контактном взаимодействии абсолютно жесткого диска с тонким упругим слоем.** Рассмотрим неограниченную упругую полосу толщины  $2h$ , в которую вдавливаются абсолютно жесткий диск радиуса  $R$  вертикальной силой  $P$  (рис. 1). Полоса удерживается в равновесии сосредоточенными силами интенсивности  $P/2$ , приложенными в точках  $x = \pm \ell$  нижней поверхности.

В дальнейшем не учитываем силы трения в зоне контакта и принимаем, что  $\ell \gg h$ . При некотором фиксированном значении силы  $P$  контакт диска с полосой будет реализоваться на участке  $(-a, a)$ , размер которого зависит от величины силы  $P$  и изгиба полосы и определяется в процессе решения задачи.

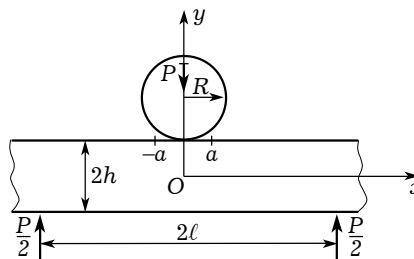


Рис. 1

Граничные условия сформулируем в виде

$$\begin{aligned}
u_y \Big|_{y=h} &\approx -\frac{a^2 - x^2}{2R} + \Delta, & |x| \leq a, \\
\sigma_y \Big|_{y=h} &= 0, & |x| > a, \\
\sigma_y \Big|_{y=h} &= -\frac{P}{2} [\delta(x - \ell) + \delta(x + \ell)], & -\infty < x < \infty, \\
\tau_{xy} \Big|_{y=\pm h} &= 0, & -\infty < x < \infty,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака, а  $\Delta$  – произвольная постоянная.

Согласно работе [5] решение будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u(\lambda, y) \cos \lambda x d\lambda, \\
u_y(x, y) &= \int_0^\infty v(\lambda, y) \cos \lambda x d\lambda,
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $u_x$ ,  $u_y$  – компоненты перемещений в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно, а функции  $u(\lambda, y)$  и  $v(\lambda, y)$  определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 u(\lambda, y) &= \lambda A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + C(\lambda) [(3 - 4\nu) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda y] + \\
&\quad + \lambda B(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y - D(\lambda) [(3 - 4\nu) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda y], \\
v(\lambda, y) &= A(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y + C(\lambda) y \operatorname{ch} \lambda y + B(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y - D(\lambda) y \operatorname{sh} \lambda y,
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Неизвестные функции  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  и  $D(\lambda)$  определяются из граничных условий. При этом выражения для нормальных и касательных напряжений принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_y}{2G} &= \int_0^\infty \{ \lambda A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y + C(\lambda) [(1 - 2\nu) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda y] + \\
&\quad + \lambda B(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y - D(\lambda) [(1 - 2\nu) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda y] \} \cos \lambda x d\lambda, \\
\frac{\tau_{xy}}{G} &= -\int_0^\infty \{ \lambda A(\lambda) \operatorname{sh} \lambda y + C(\lambda) [2(1 - \nu) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda y] + \\
&\quad + \lambda B(\lambda) \operatorname{ch} \lambda y - D(\lambda) [2(1 - \nu) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda y] \} \sin \lambda x d\lambda,
\end{aligned} \tag{4}$$

где  $G$  – модуль сдвига.

Удовлетворив смешанным граничным условиям (1), получим систему парных интегральных уравнений относительно неизвестной плотности  $C(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left\{ \left[ \operatorname{sh} \lambda h + \frac{\operatorname{ch}^2 \lambda h (\operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h)}{\operatorname{sh} \lambda h (\operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \lambda h)} \right] C(\lambda) - \right. \\
\left. - \frac{\operatorname{ch}^2 \lambda h}{\operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \lambda h} \frac{P^*}{\pi} \cos \lambda \ell \right\} \sin \lambda x d\lambda = \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{x}{R}, & |x| \leq a, \\
\int_0^\infty \left\{ 2 \frac{\operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h}{\operatorname{sh} \lambda h} C(\lambda) - \frac{P^*}{\pi} \cos \lambda \ell \right\} \cos \lambda x d\lambda = 0, & |x| > a,
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $P^* = P/2G$ .

Представим  $C(\lambda)$  как

$$C(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{\text{sh } \lambda h}{\text{ch } \lambda h \text{ sh } \lambda h + \lambda h} \left[ \int_0^a \varphi(r) J_0(\lambda r) dr + \frac{P^*}{\pi} \cos \lambda \ell \right]. \quad (6)$$

При этом второе уравнение системы (5) удовлетворяется тождественно, а первое после несложных преобразований приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{\text{ch} \lambda h \text{ sh} \lambda h + \lambda h} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\text{ch}^2 \lambda h}{\text{ch} \lambda h \text{ sh} \lambda h - \lambda h} \right] \int_0^a \varphi(r) J_0(\lambda r) dr + \left[ \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{\text{ch} \lambda h \text{ sh} \lambda h + \lambda h} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\text{ch}^2 \lambda h}{\text{ch} \lambda h \text{ sh} \lambda h - \lambda h} \right] \frac{P^*}{\pi} \cos \lambda \ell \right\} \sin \lambda x d\lambda = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x}{R}. \quad (7) \end{aligned}$$

Уравнение (7) легко преобразовывается к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этого сначала необходимо исключить из уравнения (7)  $P^*$  на основании интегрального условия равновесия

$$P^* = 2 \int_0^a \sigma^*(x) dx, \quad (8)$$

где  $\sigma^*(x) = -\sigma_y^*(x, h) = -\sigma_y(x, h)/2G$ ,  $|x| \leq a$ .

Установим взаимосвязь между функциями  $\sigma^*(x)$  и  $\varphi(x)$ :

$$\sigma^*(x) = \int_0^\infty \int_0^a \varphi(r) J_0(\lambda r) \cos \lambda x dr d\lambda = \int_x^a \frac{\varphi(r) dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad (9)$$

при этом

$$P^* = 2 \int_0^a \int_x^r \frac{\varphi(r) dr dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \pi \int_0^a \varphi(r) dr. \quad (10)$$

Учитывая равенства (8) и (10), уравнение (7) после соответствующих преобразований примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\varphi(r) dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} - \int_0^a \varphi(\eta) d\eta \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-\lambda h} \text{ch } \lambda h + \lambda h}{\text{sh}(2\lambda h) - 2\lambda h} [\cos \lambda \ell - J_0(\lambda \eta)] + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\lambda h} \text{sh } \lambda h + \lambda h}{\text{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h} [\cos \lambda \ell + J_0(\lambda \eta)] \right\} \sin \lambda x d\lambda = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x}{R}. \quad (11) \end{aligned}$$

С использованием общего решения уравнения Абеля равенство (11) преобразовывается к интегральному уравнению

$$\varphi(r) - r \int_0^a \mathcal{K}(r, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{r}{R} \quad (12)$$

с ядром

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(r, \eta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} \text{ch } \lambda h + \lambda h}{\text{sh}(2\lambda h) - 2\lambda h} [\cos \lambda \ell - J_0(\lambda \eta)] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda + \\ + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} \text{sh } \lambda h + \lambda h}{\text{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h} [\cos \lambda \ell + J_0(\lambda \eta)] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (13) \end{aligned}$$

Вводя новые переменные

$$\bar{x} = \frac{r}{a}, \quad \bar{y} = \frac{\eta}{a}, \quad 0 \leq \bar{x}, \bar{y} \leq 1,$$

$$\tilde{\sigma}^*(\bar{x}) = \sigma^*(a\bar{x}), \quad \tilde{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(a\bar{x}), \quad \tilde{\mathcal{K}}(\bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{K}(a\bar{x}, a\bar{y}), \quad (14)$$

перейдем к безразмерной форме записи уравнений (9), (10), (12), (13):

$$\tilde{\sigma}^*(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^1 \frac{\tilde{\varphi}(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \bar{x}^2}}, \quad (15)$$

$$P^* = a\pi \int_0^1 \tilde{\varphi}(\xi) d\xi, \quad (16)$$

$$\tilde{\varphi}(\bar{x}) - \bar{x} \int_0^a \tilde{\mathcal{K}}(\bar{x}, \bar{y}) \tilde{\varphi}(\bar{y}) d\bar{y} = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{a}{R} \bar{x}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}(\bar{x}, \bar{y}) = & \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{h}{a}\xi\right) \operatorname{ch}\left(\frac{h}{a}\xi\right) + \frac{h}{a}\xi}{\operatorname{sh}\left(2\frac{h}{a}\xi\right) - 2\frac{h}{a}\xi} \left[ \cos\left(\frac{\ell}{a}\xi\right) - J_0(\xi\bar{y}) \right] J_0(\xi\bar{x}) \xi d\xi + \\ & + \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{h}{a}\xi\right) \operatorname{sh}\left(\frac{h}{a}\xi\right) + \frac{h}{a}\xi}{\operatorname{sh}\left(2\frac{h}{a}\xi\right) + 2\frac{h}{a}\xi} \left[ \cos\left(\frac{\ell}{a}\xi\right) + J_0(\xi\bar{y}) \right] J_0(\xi\bar{x}) \xi d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

**2. Построение приближенного решения с использованием гипотезы Герца – Тимошенко.** Как было отмечено во введении, приближенное решение задачи об изгибе тонкой упругой полосы сосредоточенными силами, построенное с использованием гипотез Кирхгофа, существенно не соответствует точному решению задачи вблизи точек приложения этих сил. В качестве иллюстративного примера и дополнения к работе [4] изобразим отклонение нормальных напряжений, полученных на основании точного и приближенного кирхгофовского решения задачи вблизи точки приложения сосредоточенной силы (рис. 2).

Рис. 2 полностью соответствует постановке задачи, приведенной в работе [4], а также выбранным значениям параметров, которые использовались для численных расчетов. Область черного цвета, выделенная штриховым белым контуром, соответствует отклонениям, большим 20%.

Указанную выше некорректность можно легко преодолеть путем построения решения с использованием гипотезы Герца – Тимошенко. Согласно этой гипотезе напряженно-деформационное состояние тела представляется в виде суперпозиции сингулярного решения для полупространства (полуплоскости) и общего решения изгиба, вычисленного по теории Кирхгофа.

Обратимся к построению приближенного решения задачи о контакте абсолютно жесткого диска с тонкой упругой полосой по теории Герца – Тимошенко.

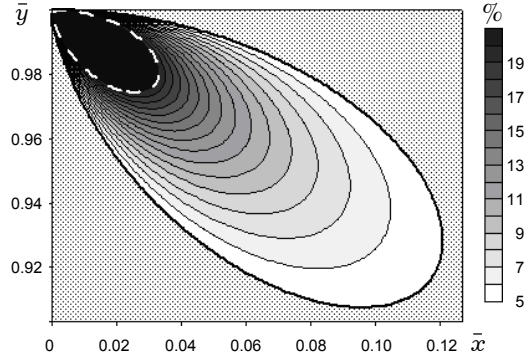


Рис. 2

Воспользуемся общим решением плоской контактной задачи для полуплоскости [1], которое с учетом условий симметрии можно представить в виде

$$\sigma^*(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ C - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta - x} f(\eta) d\eta \right], \quad (19)$$

где

$$f(\eta) = -\frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial u_y}{\partial \eta} \Big|_{y=h}. \quad (20)$$

Константа  $C$  определяется в процессе решения задачи из условия равенства нулю нормальных напряжений  $\sigma^*(x)$  на границах области контакта.

Учитывая по методу суперпозиции локальное обжатие полосы и ее изгиб с точностью до главного члена, вычисленный по теории Кирхгофа, представим функцию  $f(\eta)$  в виде

$$f(\eta) = -\frac{1}{2(1-\nu)} \left( \frac{1}{R} - P^* \alpha \right) \eta, \quad (21)$$

где

$$\alpha = \frac{3\ell}{4(1+\nu)h^3}. \quad (22)$$

С учетом равенств (20)–(22) уравнение (19) преобразуется к виду

$$\sigma^*(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ C + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left( \frac{1}{R} - P^* \alpha \right) \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta - x} \eta d\eta \right]. \quad (23)$$

Выполнив элементарные вычисления и воспользовавшись условием  $\sigma^*(a) = 0$ , получим

$$\sigma^*(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left[ C + \frac{1}{2(1-\nu)} \left( \frac{1}{R} - P^* \alpha \right) \left( \frac{1}{2} a^2 - x^2 \right) \right], \quad (24)$$

$$C = \frac{1}{4(1-\nu)} a^2 \left( \frac{1}{R} - P^* \alpha \right). \quad (25)$$

Подставив (25) в (24), получим

$$\sigma^*(x) = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ \frac{1}{R} \sqrt{a^2 - x^2} - P^* \alpha \sqrt{a^2 - x^2} \right]. \quad (26)$$

Интегрируя это уравнение от 0 до  $a$  и используя интегральное уравнение равновесия (8), запишем соотношение для вычисления силы  $P^*$ :

$$P^* = \frac{\pi a^2}{R[4(1-\nu) + \pi \alpha a^2]}. \quad (27)$$

Легко видеть, что решение Герца для полуплоскости можно получить из решения (26), (27), если параметру  $\alpha$  присвоить значение, равное 0.

В безразмерном виде уравнение (26) можно переписать следующим образом:

$$\tilde{\sigma}^*(\bar{x}) = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ \frac{a}{R} \sqrt{1 - \bar{x}^2} - P^* \alpha a \sqrt{1 - \bar{x}^2} \right]. \quad (28)$$

**3. Результаты численных расчетов и их анализ.** Исследуем распределение нормальных напряжений в области контакта, пользуясь точным решением задачи (15)–(18). В качестве значений параметров выберем  $\nu = 0,3$ ,  $\ell = 20$  см,  $R = 4$  см. Значения других параметров варьировались. На рис. 3 изображено распределение нормальных напряжений для относительно небольших значений толщины полосы ( $h = 0,5$  см и соответственно  $\ell/h = 40$ ). Кривые 1–4 на графике соответствуют значениям параметра  $a = 3, 2, 1,5, 1$  см. При этом для кривых 2–4 относительные значения силы  $P^* = 0,00313, 0,00308$

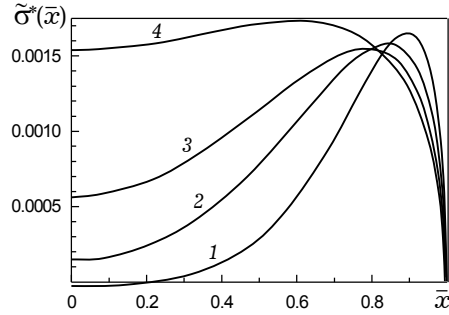


Рис. 3

и 0,00301. Из рис. 3 следует, что при некоторых значениях параметров нормальные напряжения  $\tilde{\sigma}^*(\bar{x})$  в центральной части области контакта могут принимать отрицательные значения (кривая 1), что, в свою очередь, демонстрирует возможность отрыва диска от полосы. Однако следует отметить, что эффект отрыва некорректно исследовать в данной постановке задачи, поскольку мы *a priori* заложили существование единственной сплошной области контакта.

Теперь проведем сравнительный анализ точного решения задачи и решения, построенного с использованием гипотезы Герца – Тимошенко. В качестве вычислительного примера построим эпюры распределения нормальных напряжений для значений параметров  $a = 1$  см и  $h = 3$  см (рис. 4),  $a = 1$  см и  $h = 0,5$  см (рис. 5).

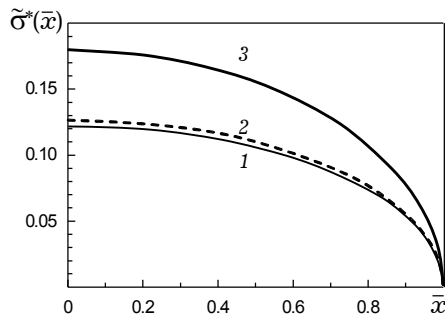


Рис. 4

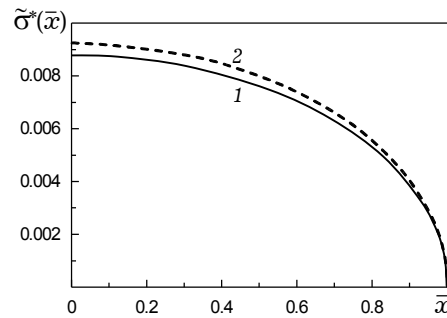


Рис. 5

Кривые 1 на рис. 4 и 5 соответствуют приближенному решению, а кривые 2, обозначенные штриховыми линиями, построены на основании точного решения. Кривая 3 на рис. 4, выделенная жирной линией, соответствует распределению Герца для полуплоскости. Эти результаты свидетельствуют о высокой точности приближенного решения, построенного по теории Герца – Тимошенко, что и обосновывает целесообразность использования этой гипотезы при построении решений задач контактной механики тонкостенных элементов.

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. – Москва: Гостехиздат, 1953. – 264 с.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41. – № 1. – С. 12–33.
3. Мазур С. Г. Уточненная теория изгиба тонких пластин сосредоточенными силами // Прикл. механика. – 1979. – 15, № 4. – С. 86–89.

4. Моргунов М. О. Границі застосування теорії Кірхгофа при згині пружної кулі зосередженими силами // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2000. – № 5. – С. 72–80.
5. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 342 с.
6. Улитко А. Ф., Моргунов М. А. О контактном взаимодействии жесткого шара с тонким упругим слоем при изгибе // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Спецвыпуск. – 2001. – С. 150–153.
7. Улитко А. Ф., Моргунов М. О. Контакт жорсткого диску з тонкою пружною смугою при згині // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2001. – № 4. – С. 164–173.

#### ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНИХ НАПРУЖЕНЬ У ТОНКІЙ ПРУЖНІЙ СМУЗІ ПРИ ЗГІНІ

На прикладі задачі про контакт абсолютно жорсткого диску з тонкою пружною смугою досліджено динаміку зміни нормальних напружень у зоні контакту зі збільшенням прикладеної до диску сили, базуючись на точному розв'язку задачі й відповідному наближеному розв'язку, побудованому з використанням теорії Герца – Тимошенка. Проведено співставлення результатів, одержаних за допомогою точного та наближеного розв'язків, що обґрунтовує доцільність використання гіпотези Герца – Тимошенка в контактній механіці пружних тонкостінних елементів. Показано, що при досить великих значеннях прикладеної сили відбувається відрив смуги від диску всередині області контакту.

#### INVESTIGATION OF CONTACT STRESSES IN THIN ELASTIC STRIP UNDER BENDING

Both the exact solution of the smooth contact between a rigid disc and a thin elastic strip under the specified external loads and the corresponding approximate solution based on the Hertz – Timoshenko theory has been constructed. The dynamics of changes of contact stresses depending on increasing the magnitude of the force for this problem has been investigated. Comparison of both solutions shows high accuracy of the approximate solution. This validates the advisability of using the Hertz – Timoshenko hypothesis in contact problems dedicated to thin-walled elastic substrates. It has been shown that under sufficiently large magnitudes of applied force a strip is undergoing tearing off from the stamp in the center of contact zone.

Київ нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Получено  
21.01.06