

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ І ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ З НЕКРУГОВИМ ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ НА ОСНОВІ СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЇ

Для розв'язування двовимірних крайових задач про напружено-деформований стан замкнених і відкритих оболонок змінної товщини при дії нерівномірно розподілених і локальних навантажень для довільних видів закріплення країв запропоновано нетрадиційний підхід, що базується на сплайн-апроксимації розв'язків в одному координатному напрямку та розв'язанні отриманої одновимірної крайової задачі за допомогою стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації. Наведено результати розв'язання задач у вигляді графіків і таблиць.

Дослідження напружено-деформованого стану оболонок і пластин, що знаходяться під дією різних видів навантаження при довільних способах закріплення країв, приводить до формулювання та розв'язування крайових задач, у загальному випадку, для систем диференціальних рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Складність розв'язання таких задач зумовлена не тільки високим порядком системи, змінністю коефіцієнтів і необхідністю точно задовольнити граничні умови. Використання того чи іншого методу для отримання розв'язку задачі з достатнім ступенем точності значною мірою залежить від геометричних і механічних параметрів, які характеризують деякі особливості задачі, і вигляду граничних умов, що інколи обмежує можливості розв'язання задач у важливих у прикладному відношенні випадках зміни жорсткості та закріплення оболонок і пластин. Крім того, в задачах теорії оболонок мають місце локальні та крайові ефекти, що накладає певні умови жорсткості на крайові задачі, які пов'язані з явищем нестійкості обчислень у процесі розрахунків.

Останнім часом у задачах обчислювальної математики, математичної фізики та механіки для їх розв'язання широко використовують сплайн-функції. Це можна пояснити перевагами апарата сплайн-наближень порівняно з іншими. До основних переваг можна віднести такі: стійкість сплайнів стосовно локальних збурень, тобто поведінка сплайна в околі точки не впливає на поведінку сплайна в цілому, як, наприклад, це має місце при поліноміальному наближенні; добра збіжність сплайн-інтерполяції, на відміну від багаточленної на комп'ютерах.

У зв'язку із зазначеними особливостями сплайн-функції широко використовують при розв'язуванні прикладних задач. Велику область для використання сплайн-апроксимації утворюють задачі теорії деформованих пружних тіл. При цьому сплайн-функції можуть бути ефективно застосовані для розв'язання одновимірних і двовимірних задач теорії оболонок і пластин, двовимірних і тривимірних задач теорії пружності.

Багато уваги у своїх роботах член-кореспондент НАН України Я. Й. Бурак приділяв і приділяє питанням, пов'язаним із узагальненням моделей деформування оболонок і розробкою методів їх розрахунку під дією силових і теплових навантажень, що викладено в книгах [2–4].

У цій роботі наводиться підхід до розв'язування класу двовимірних задач статички ізотропних і ортотропних некругових циліндричних оболонок змінної товщини з еліптичним і гофрованим поперечними перерізами при нерівномірному й локальному навантаженні та довільних граничних умовах на контурах.

1. Основні рівняння. За вихідні приймаємо рівняння теорії тонких оболонок на основі робіт Х. М. Муштарі, Л. Т. Доннелла, В. З. Власова та С. А. Амбарцумяна [5, 6]. При цьому покладаємо, що структура оболонок симетрична відносно їх серединної поверхні.

Віднесемо серединну поверхню циліндричної оболонки до ортогональної системи координат s, t , де s і t – відповідно довжини дуг уздовж твірної і напрямної. Перша квадратична форма запишеться у вигляді

$$dS^2 = ds^2 + dt^2. \quad (1)$$

Тоді основні вихідні рівняння будуть мати такий вигляд:

– вирази для деформацій

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \varepsilon_t &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{w}{R_t}, & \varepsilon_{st} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}, \\ \alpha_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, & \alpha_t &= -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \alpha_{st} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}; \end{aligned} \quad (2)$$

– рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial t} - Q_s &= 0, & \frac{\partial M_t}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} - Q_t &= 0, \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_t}{\partial t} - \frac{N_t}{R_t} + q_\gamma &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

– співвідношення пружності

$$\begin{aligned} N_s &= C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_t, & N_t &= C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_t, \\ S &= C_{66}\varepsilon_{st}, \\ M_s &= D_{11}\alpha_s + D_{12}\alpha_t, & M_t &= D_{12}\alpha_s + D_{22}\alpha_t, \\ H &= 2D_{66}\alpha_{st}, & 0 \leq s \leq L, & \quad t_1 \leq t \leq t_2, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_s h}{1 - \nu_s \nu_t}, & C_{12} &= \frac{\nu_t E_s h}{1 - \nu_s \nu_t} = \frac{\nu_s E_t h}{1 - \nu_s \nu_t}, & C_{22} &= \frac{E_t h}{1 - \nu_s \nu_t}, & C_{66} &= G_{st} h, \\ D_{11} &= \frac{E_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_t)}, & D_{12} &= \frac{\nu_s E_t h^3}{12(1 - \nu_s \nu_t)} = \frac{\nu_t E_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_t)}, \\ D_{22} &= \frac{E_t h^3}{12(1 - \nu_s \nu_t)}, & D_{66} &= G_{12} \frac{h^3}{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

У випадку ізотропних оболонок C_{ij} , D_{ij} у формулах (5) набувають таких значень:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2}, & C_{12} &= \frac{\nu Eh}{1 - \nu^2}, & C_{22} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2}, & C_{66} &= \frac{Eh}{2(1 + \nu)}, \\ D_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, & D_{12} &= \frac{\nu Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, & D_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, & D_{66} &= \frac{Eh^3}{24(1 + \nu)}. \end{aligned}$$

У співвідношеннях (2)–(4) u, v, w – переміщення у напрямку твірної, напрямної та нормалі до серединної поверхні; $h = h(s, t)$ – товщина оболонки; $R_t = R_t(t)$ – радіус кривизни в поперечному перерізі; E_s, E_t, ν_s, ν_t – модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона вздовж напрямів координатних осей; $q_\gamma(s, t)$ – нормальне навантаження.

Співвідношення (2)–(4) утворюють замкнену систему диференціальних рівнянь у частинних похідних восьмого порядку, що описує напружено-деформований стан оболонок. Для визначення довільностей, що містяться у загальному інтегралі цієї системи, необхідно задати граничні умови на контурах для відкритих оболонок або граничні умови на торцях та умови періодичності вздовж напрямної для замкнутих оболонок.

2. Підхід до розв'язання задач. Для розв'язування такого класу двовимірних задач застосовуємо підхід, що базується на апроксимації шуканого розв'язку в одному координатному напрямі за допомогою сплайн-функцій та використанні методу сплайн-колокації [1, 7, 8], а для розв'язання отриманої при цьому крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь застосовуємо стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації [5]. Такий підхід дозволяє отримати розв'язок вихідної крайової задачі для довільних граничних умов на контурах оболонки з високим ступенем точності. У відповідності з вказаним на основі (2)–(4) розв'язувальну систему рівнянь у переміщеннях запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
& C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} + \frac{\partial C_{11}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial C_{66}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} + \\
& \quad + \frac{C_{12}}{R_t} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial C_{66}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial C_{12}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial C_{12}}{\partial s} \frac{w}{R_t} = 0, \\
& C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial C_{22}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{C_{22}}{R_t} \frac{\partial w}{\partial t} + \\
& \quad + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial C_{12}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} + \left(\frac{\partial C_{22}}{\partial t} \frac{1}{R_t} - \frac{C_{22}}{R_t^2} \frac{\partial R_t}{\partial t} \right) w = 0, \\
& D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + (2D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial t^2} + 2 \frac{\partial D_{11}}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + 2 \frac{\partial D_{22}}{\partial t} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + \\
& \quad + \left(2 \frac{\partial D_{12}}{\partial t} + 4 \frac{\partial D_{66}}{\partial t} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial t} + \left(2 \frac{\partial D_{12}}{\partial s} + 4 \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial t^2} + \\
& \quad + \left(\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\
& \quad + 4 \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial s \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + \frac{C_{12}}{R_t} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{C_{22}}{R_t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{C_{22}}{R_t^2} w - q_\gamma = 0. \tag{6}
\end{aligned}$$

З метою апроксимації розв'язку двовимірної крайової задачі в напрямку твірної перетворимо систему рівнянь (6) до такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{14} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{15} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} + a_{16} \frac{\partial v}{\partial t} + a_{17} w + a_{18} \frac{\partial w}{\partial s}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a_{21} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + a_{24} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + a_{25} \frac{\partial v}{\partial s} + a_{26} \frac{\partial v}{\partial t} + a_{27} w + a_{28} \frac{\partial w}{\partial t}, \\
\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} &= a_{31} \frac{\partial u}{\partial s} + a_{32} \frac{\partial v}{\partial t} + a_{33} w + a_{34} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + a_{35} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + a_{36} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + a_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + \\
& \quad + a_{38} \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial t} + a_{39} \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial t^2} + a_{3,10} \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial t^2} + a_{3,11} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_{3,12} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + b_1, \tag{7}
\end{aligned}$$

де коефіцієнти $a_{ij}(s, t)$, b_1 мають вигляд

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{C_{11}}{C_{66}}, & a_{12} &= -\frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{11}}{\partial s}, & a_{13} &= -\frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{66}}{\partial t}, \\
a_{14} &= -\frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{66}}{\partial t}, & a_{15} &= -\frac{C_{12} + C_{66}}{C_{66}}, & a_{16} &= -\frac{1}{C_{66}} \frac{\partial C_{12}}{\partial s}, \\
a_{17} &= -\frac{1}{R_t C_{66}} \frac{\partial C_{12}}{\partial s}, & a_{18} &= -\frac{C_{12}}{C_{66} R_t}; \\
a_{21} &= -\frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{12}}{\partial t}, & a_{22} &= -\frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{66}}{\partial s}, & a_{23} &= -\frac{C_{66} + C_{12}}{C_{22}}, & a_{24} &= -\frac{C_{66}}{C_{22}}, \\
a_{25} &= -\frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{66}}{\partial s}, & a_{26} &= -\frac{1}{C_{22}} \frac{\partial C_{22}}{\partial t}, & a_{27} &= -\frac{1}{R_t C_{22}} \left(\frac{\partial C_{22}}{\partial t} - \frac{C_{22}}{R_t} \frac{\partial R_t}{\partial t} \right), \\
a_{28} &= -\frac{1}{R_t}; & a_{31} &= -\frac{C_{12}}{D_{22} R_t}, & a_{32} &= -\frac{C_{22}}{D_{22} R_t}, & a_{33} &= -\frac{C_{22}}{D_{22} R_t^2}, \\
a_{34} &= -\frac{1}{D_{22}} \left(\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial t^2} \right), & a_{35} &= -\frac{2}{D_{22}} \frac{\partial D_{11}}{\partial s}, \\
a_{36} &= -\frac{D_{11}}{D_{22}}, & a_{37} &= -\frac{4}{D_{22}} \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial s \partial t}, \\
a_{38} &= -\frac{2}{D_{22}} \left(2 \frac{\partial D_{66}}{\partial t} + \frac{\partial D_{12}}{\partial t} \right), & a_{39} &= -\frac{2}{D_{22}} \left(2 \frac{\partial D_{66}}{\partial s} + \frac{\partial D_{12}}{\partial s} \right), \\
a_{3,10} &= -\frac{2}{D_{22}} (2D_{66} + D_{12}), & a_{3,11} &= -\frac{1}{D_{22}} \left(\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial s^2} \right), \\
a_{3,12} &= -\frac{1}{D_{22}} \frac{\partial D_{22}}{\partial t}, & b_1 &= -\frac{q_\gamma}{D_{22}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Додаючи до системи розв'язувальних рівнянь (7) граничні умови або умови симетрії, отримуємо двовимірну крайову задачу.

Для зниження розмірності системи диференціальних рівнянь (7) застосуємо сплайн-апроксимацію розв'язків у напрямі твірної, тобто розв'язки крайової задачі для системи рівнянь (7) шукаємо в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
u(s, t) &= \sum_{i=0}^N u_i(t) \varphi_{1i}(s), & v(s, t) &= \sum_{i=0}^N v_i(t) \varphi_{2i}(s), \\
w(s, t) &= \sum_{i=0}^N w_i(t) \psi_i(s),
\end{aligned} \tag{9}$$

де $u_i, v_i, w_i, i = 0, \dots, N$, – шукані функції, а $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \psi_i, i = 0, \dots, N, N \geq 6$, – лінійні комбінації В-сплайнів третього та п'ятого степенів [8], що дозволяє задовольнити різні граничні умови на контурах оболонки. При цьому $\varphi_{ki}(s), k = 1, 2, \psi_i(s)$ можна виразити через В-сплайни таким чином:

$$\begin{aligned}
\varphi_{10} &= \alpha_{11} B_3^{-1} + \alpha_{12} B_3^0, & \varphi_{11} &= B_3^{-1} + \alpha_{21} B_3^0 + \alpha_{22} B_3^1, \\
\varphi_{1j} &= B_3^j, & j &= 2, \dots, N-2, \\
\varphi_{1N-1} &= \beta_3^{N+1} + \beta_{21} B_3^N + \beta_{22} B_3^{N-1}, & \varphi_{1N} &= \beta_{11} B_3^{N+1} + \beta_{12} B_3^N; \\
\psi_0 &= \gamma_{11} B_5^{-2} + \gamma_{12} B_5^{-1} + B_5^0, & \psi_1 &= \gamma_{21} B_5^{-1} + \gamma_{22} B_5^0 + B_5^{-1},
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= \gamma_{31} B_5^{-2} + \gamma_{32} B_5^0 + B_5^2, \\
\psi_i &= B_5^i, \quad i = 3, \dots, N-3, \\
\psi_{N-2} &= \delta_{31} B_5^{N+2} + \delta_{32} B_5^N + B_5^{N-2}, \\
\psi_{N-1} &= \delta_{21} B_5^{N+1} + \delta_{22} B_5^N + B_5^{N-1}, \quad \psi_N = \delta_{11} B_5^{N+2} + \delta_{12} B_5^{N+1} + B_5^N, \quad (11)
\end{aligned}$$

де B_3^j , $j = -1, \dots, N+1$, – кубічні В-сплайни; B_5^j , $j = -2, \dots, N+2$, – сплайни п'ятого степеня, побудовані на рівномірній сітці; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – сталі коефіцієнти, які визначаються в залежності від вигляду граничних умов. Вирази для φ_{2i} відрізняються від виразів (10) значеннями вказаних коефіцієнтів.

Після побудови лінійних комбінацій В-сплайнів у вигляді функцій $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\psi(s)$, що задовольняють граничні умови на контурах оболонки, підставляємо вирази (9) у розв'язувальні рівняння (7) і вимагаємо їх задоволення в точках колокації $s = s_k$, $k = 0, \dots, N$. Тоді отримуємо систему $3(N+1)$ звичайних диференціальних рівнянь. Так само поступаємо з граничними умовами на контурах $s = \text{const}$. Одержана система диференціальних рівнянь разом з відповідними граничними умовами утворює двоточкову крайову задачу на інтервалі $t_1 \leq t \leq t_2$.

Якщо ввести позначення

$$\begin{aligned}
\bar{U} &= \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{w}'', \bar{w}'''\}^\top = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_6, \bar{u}_7, \bar{u}_8\}^\top, \\
\bar{u}_m &= \{u_{m_0}, u_{m_1}, \dots, u_{m_N}\}^\top, \quad m = 1, \dots, 8, \quad (12)
\end{aligned}$$

то отриману крайову задачу можна записати у вигляді

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = A(t)\bar{U} + \bar{f}(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (13)$$

$$B_1 \bar{U}(t_1) = \bar{b}_1, \quad B_2 \bar{U}(t_2) = \bar{b}_2. \quad (14)$$

Крайову задачу (13), (14) розв'язуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Підставляючи отримані значення функцій $u_i(t)$, $v_i(t)$, $w_i(t)$, $i = 0, \dots, N$, у вирази (9), знаходимо розв'язки вихідної задачі для переміщень, а за ними обчислюємо всі фактори напружено-деформованого стану оболонки.

У деяких задачах виникає необхідність проводити сплайн-апроксимацію у напрямку t , а одновимірну крайову задачу розв'язувати за координатою s .

3. Результати розв'язання задач. Наведемо результати розв'язання ряду задач на основі запропонованого підходу. Розглянемо задачі про напружено-деформований стан замкнутих і відкритих ізотропних циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом під дією навантаження q_γ [9, 11].

Поперечний переріз серединної поверхні параметрично задається у вигляді

$$x = b \cos \varphi, \quad z = a \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (15)$$

де b, a – півосі еліпса ($b > a$); φ – кутовий параметр; R – радіус круга. При цьому

$$\begin{aligned}
\pi(a+b)f &= 2\pi R, \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots, \quad \Delta = \frac{b-a}{b+a}, \\
a &= \frac{R}{f}(1-\Delta), \quad b = \frac{R}{f}(1+\Delta), \quad \frac{a}{b} = \frac{1-\Delta}{1+\Delta}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Товщина оболонки змінюється уздовж напрямної за законом

$$h(\varphi) = h_0(1 + \alpha |\sin \varphi|), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (17)$$

Розглянемо оболонку при рівномірно розподіленому навантаженні $q_\gamma = q_0 = \text{const}$ для трьох варіантів:

Варіант 1 – відкрита оболонка ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$), прямолінійні контури якої жорстко закріплені, тобто виконуються умови

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = -\pi/2, \pi/2.$$

Варіант 2 – відкрита оболонка ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$), прямолінійні контури якої шарнірно оперті, тобто виконуються умови

$$u = v = w = M_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = -\pi/2, \pi/2.$$

Варіант 3 – замкнута оболонка.

Задачу розв'язували при $R = 20$, $2\ell = 60$, $h_0 = 0.5$, $\nu = 0.3$. Значення α і Δ показано в таблицях. У табл. 1, 2 наведено максимальні значення прогину w для варіантів 1 і 2 при $\varphi = 0.7\pi/2$, і значення моменту M_φ для варіанта 1 при $\varphi = \pi/2$, для варіанта 2 при $\varphi = 0.8\pi/2$, для варіанта 3 при $\varphi = \pi/2$ для середнього перерізу $s = \ell$.

Таблиця 1

$Ew / 10^4 q_0$						
Δ	n	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$
0.10	1	0.4299	0.3484	0.2885	0.2408	0.2023
	2	0.4523	0.3676	0.3055	0.2577	0.2196
	3	0.5102	0.4092	0.3413	0.2921	0.2545
0.15	1	0.6450	0.5104	0.4215	0.3505	0.2932
	2	0.6170	0.5536	0.4592	0.3864	0.3283
	3	0.7921	0.6352	0.5297	0.4532	0.3947
0.20	1	0.9000	0.7004	0.5759	0.4767	0.3967
	2	0.9571	0.7758	0.6418	0.5383	0.4556
	3	1.1342	0.9091	0.7576	0.6477	0.5635
0.25	1	1.2050	0.9285	0.7564	0.6250	0.5151
	2	1.2919	1.0439	0.8605	0.7188	0.6058
	3	1.5553	1.2459	1.0375	0.8860	0.7696
0.30	1	1.5731	1.2044	0.9675	0.7907	0.6500
	2	1.7025	1.3701	1.1241	0.9342	0.7831
	3	2.0819	1.6664	1.3860	1.1817	1.0245
0.35	1	2.0175	1.5326	1.2141	0.9842	0.8030
	2	2.2098	1.7687	1.4427	1.1916	0.9925
	3	2.7501	2.1988	1.8260	1.5535	1.3431

Як впливає з аналізу наведених у табл. 1, 2 результатів, збільшення параметра α зумовлює зменшення максимальних значень прогину та збільшення максимальної величини моменту. Так, при $\alpha = 0.5$ прогин зменшується на 40%, а при $\alpha = 1$ – у 2.5 разів. Момент при $\alpha = 0.5$ збільшується в 1.8 разів, а при $\alpha = 1$ – в 2.7 разів. Порівнюючи величини значень прогину та моменту в табл. 1, 2, можна побачити, що збільшення ступеня еліп-

Таблиця 2

$M_\varphi / 10q_0$						
Δ	n	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$
0.10	1	-0.3165	-0.4356	-0.5604	-0.6875	-0.8136
	2	0.1256	0.1688	0.2198	0.2717	0.3229
	3	-0.0499	0.0602	0.0779	0.0981	0.1205
0.15	1	-0.4525	-0.6271	-0.7981	-0.9766	-1.1520
	2	0.1847	0.2488	0.3243	0.4015	0.4777
	3	-0.0778	0.0915	0.1191	0.1505	0.1855
0.20	1	-0.5988	-0.8200	-1.049	-1.2800	-1.5040
	2	0.2492	0.3357	0.4373	0.5411	0.6431
	3	-0.1101	0.1252	0.1634	0.2068	0.2553
0.25	1	-0.7600	-1.0366	-1.3210	-1.6036	-1.8768
	2	0.3213	0.4325	0.5625	0.6947	0.8237
	3	-0.1461	0.1633	0.2133	0.2702	0.3336
0.30	1	-0.9416	-1.2776	-1.6192	-1.9547	-2.2750
	2	0.4040	0.5430	0.7042	0.8669	1.0240
	3	-0.1850	0.2080	0.2721	0.3448	0.4257
0.35	1	-1.1494	-1.3081	-1.5492	-1.9503	-2.2036
	2	0.5009	0.6714	0.8670	1.0624	1.2485
	3	-0.2244	0.2625	0.3439	0.4359	0.5376

тичності поперечного перерізу приводить до зростання максимальних величин прогину в 3–5 разів. Зі зростанням ступеня еліптичності поперечного перерізу збільшується різниця між максимальними прогинами при різних умовах на прямолінійних контурах, а різниця між максимальними моментами зменшується. З таблиць видно, що за рахунок вибору законів зміни товщини та граничних умов на прямолінійних контурах з урахуванням ступеня еліптичності можна впливати на величини прогину і напружень з метою знаходження раціональних параметрів оболонкових елементів.

Розглянемо також задачу про напружено-деформований стан ізотропних циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом при локальних вздовж напрямної навантаженнях. Нехай розподілене навантаження задається у вигляді

$$-q_\gamma(\varphi) = \begin{cases} q_0(\cos \varphi - \cos \alpha), & 2\pi - \alpha \leq \varphi \leq \alpha, \\ 0, & \alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha, \\ -q_0(\cos \varphi + \cos \alpha), & \pi - \alpha \leq \varphi \leq \pi + \alpha, \\ 0, & \pi + \alpha \leq \varphi \leq 2\pi - \alpha, \end{cases} \quad (18)$$

де α – граничний кут, яким визначається ступінь локалізації навантаження.

Оболонка жорстко закріплена на торцях, тому граничні умови формулюються у вигляді

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_1, \quad s = s_2.$$

Апроксимацію розв'язків проводимо вздовж твірної.

Для того щоб сумарне навантаження S , прикладене до оболонки, було однаковим при різних ступенях локалізації, тобто при різних значеннях кута α , встановимо залежність q_0 від α . Маємо

$$S = \int_0^\alpha q_j(\varphi) d\varphi = 2 \int_0^\alpha q_0(\alpha) (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi = 2q_0(\alpha) (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha),$$

звідки отримуємо

$$q_0(\alpha_i) = q_0(\alpha_j) \frac{\sin \alpha_j - \alpha_j \cos \alpha_j}{\sin \alpha_i - \alpha_i \cos \alpha_i}. \quad (19)$$

Якщо прийняти, що $q_0(\pi/12) = q_0$, то згідно з формулою (19) $q_0(\pi/6) \approx 0.1273118q_0$, $q_0(\pi/4) \approx 0.0391422q_0$.

Таким чином, за допомогою виразу (19) при різних значеннях α_i та α_j , тобто при різних ступенях локалізації, можемо розглядати задачі при постійному сумарному навантаженні, прикладеному до оболонки.

Розв'язування задачі проводили при таких даних: $R = 20$, $2l = 40$, $h = 0.5, 1$; $\Delta = 0, 0.1, 0.2, 0.3$; $\alpha = \pi/12, \pi/6, \pi/4$; $\nu = 0.3$.

Результати розв'язання задач при $h = 0.5$ ілюструє рис. 1, звідки бачимо, як впливає ступінь локалізації навантаження на зміну прогину при $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi/2$, тобто в залежності від жорсткості оболонки, обумовленої еліптичністю.

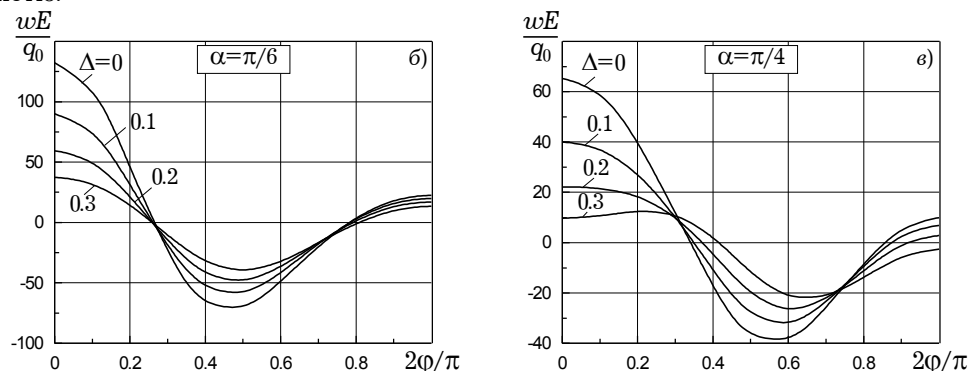


Рис. 1

Однією із вказаних задач є задача про розрахунок циліндричних оболонок з гофрами в поперечному перерізі. Поперечний переріз поверхні відліку в полярній системі координат записується у вигляді [10]

$$r = r_0 + \alpha \cos k\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (20)$$

де r_0 – радіус круга; α – амплітуда; k – частота гофра; r – полярний радіус; φ – полярний кут.

Граничні умови на торцях при $s = \text{const}$ формулюються у вигляді

– при жорсткому закріпленні:

$$u = v = w = \vartheta_s = 0,$$

– при шарнірному закріпленні:

$$N_s = v = w = M_s = 0.$$

Апроксимацію розв'язків В-сплайнами проводили вздовж твірної.

Задачу розв'язували при $0 \leq s \leq 30$, $r_0 = 15$; значення h , α , k наведено в табл. 3.

Таблиця 3

$Ew / 10^3 q_0$							
h	n	Жорстке закріплення торців			Шарнірне закріплення торців		
		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.05$		$\alpha = 0$	$\alpha = 0.05$	
			$k = 4$	$k = 8$		$k = 4$	$k = 8$
0.75	1	0.2767	0.1365	0.2170	0.2986	0.1113	0.2388
	2	0.2767	0.1820	0.2382	0.2986	0.1720	0.2601
	3	0.2767	0.2807	0.2842	0.2986	0.3041	0.3061
	4	0.2767	0.3858	0.3329	0.2986	0.4442	0.3549
	5	0.2767	0.4249	0.3510	0.2986	0.4962	0.3730
0.45	1	0.4601	0.0441	0.1831	0.5009	-0.1620	0.2216
	2	0.4601	0.1688	0.2813	0.5009	0.0530	0.3205
	3	0.4601	0.4711	0.4937	0.5009	0.5194	0.5347
	4	0.4601	0.7844	0.7190	0.5009	1.0160	0.7619
	5	0.4601	0.9013	0.8025	0.5009	1.2006	0.8461
0.3	1	0.6901	-0.1382	-0.2458	0.7529	-0.7642	-0.1995
	2	0.6901	0.1267	0.0856	0.7529	-0.3433	0.1378
	3	0.6901	0.7086	0.8031	0.7529	0.7926	0.8679
	4	0.6901	1.3385	1.5640	0.7529	1.9338	1.6421
	5	0.6901	1.5754	1.8461	0.7529	2.3594	1.9291

У табл. 3 наведено значення прогину при $s = 15$ для $k = 4$ в п'яти точках на інтервалі $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ і для $k = 8$ – в п'яти точках на інтервалі $0 \leq \varphi \leq \pi/8$ (зі сталим кроком), які позначені номером n , для жорсткого (а) та шарнірного (б) закріплення торців. Значення $\alpha = 0$ відповідає круговій оболонці.

З табл. 3 випливає, що у випадку (а) при $h = 0.75$, $k = 4$ прогин у вершині опуклої частини гофра ($\theta = 0$) майже в два рази менший, ніж у круговій оболонці, а у вершині увігнутої частини ($\theta = \pi/4$) гофра майже в 1.5 разів більший. При $k = 8$ в опуклій частині ($\theta = 0$) прогин в 1.5 разів більший, ніж при $k = 4$, а в увігнутій – він менший, ніж при $k = 4$, на 20%. У випадку (б) для $k = 4$ прогин при $\theta = 0$ майже в 3 рази менший, а при $\theta = \pi/4$ у 1.5 разів більший порівняно з круговою оболонкою. Для $k = 8$ при $\theta = 0$ прогин збільшується майже вдвічі, а при $\theta = \pi/8$ зменшується в 1.3 разів порівняно з випадком $k = 4$.

Для $h = 0.45$ маємо, що у випадку (а) при $k = 4$, $\theta = 0$ прогин стрімко спадає (в 11 разів) і при $\theta = \pi/4$ зростає майже вдвічі, а при $k = 8$, $\theta = 0$ прогин спадає в 2.5 разів і при $\theta = \pi/8$ – трохи менше, ніж при $k = 4$. У випадку (б) при $k = 4$ в опуклій частині гофра вершина зсувається вже в іншому напрямі, тобто проти дії прикладеного навантаження, а при $\theta = \pi/4$ прогин збільшується майже в 2.5 разів. При $k = 8$ картина близька до випадку (а).

Для $h = 0.3$ вже при $k = 4$, $k = 8$ в обох випадках закріплення торців вершина гофра ($\theta = 0$) зсувається в протилежному напрямі, а прогин увігнутої частини збільшується у декілька разів.

Проаналізуємо вплив зміни величини амплітуди гофра при заданій частоті гофрування на напружено-деформований стан циліндричних оболонок. Задачу розв'язували при таких даних: $r_0 = 15$; $L = 30$; $h_0 = 0.5$; $\nu = 0.3$; $q_r = q_0 = \text{const}$; $k = 4, 8$; $\alpha = 0, 0.1, 0.3, 0.5$; $0 \leq \varphi \leq \pi/4$.

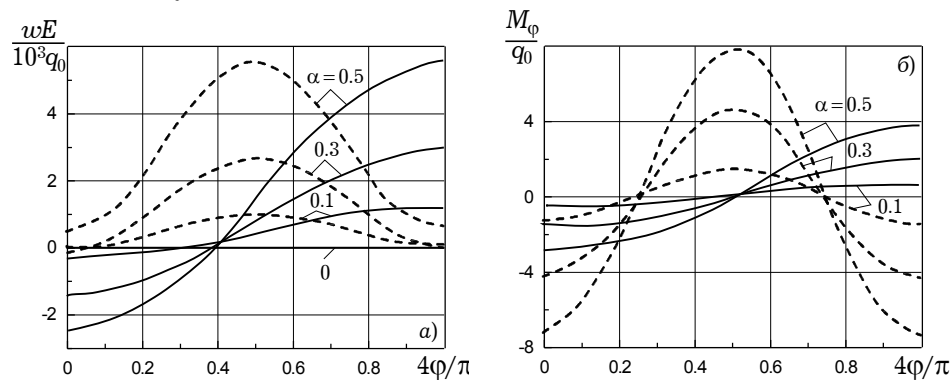


Рис. 2

На рис. 2 показано графіки розподілу прогину w та згинного моменту M_φ уздовж твірної для $k = 4$ (суцільні лінії) та $k = 8$ (штрихові лінії) в перерізі $L/2$. Із рис. 2а видно, що збільшення параметра α при $k = 4$ веде до зростання величини прогину вершини опуклої частини гофра ($\varphi = 0$) в 5.7 і 9.9 разів при $\alpha = 0.3$ і $\alpha = 0.5$ відповідно порівняно з прогином при $\alpha = 0.1$. Причому ця частина гофра прогинається у напрямі, протилежному дії навантаження. Увігнута частина гофра ($\varphi = \pi/4$) зсувається у напрямі дії навантаження, і цей прогин зростає зі збільшенням α в 2.8, 7.2, 13.3 разів при $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5$ відповідно порівняно з прогином при $\alpha = 0$.

В оболонці з частотою гофрування $k = 8$ прогин вершини опуклої частини гофра ($\varphi = 0$) при $\alpha = 0.1$ незначний, при $\alpha = 0.3$ вершина опуклої частини гофра трохи прогинається у напрямку дії навантаження при всіх значеннях параметра α , і цей прогин зростає зі збільшенням α в 2.2, 6.4, 12.8 разів при $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5$ відповідно порівняно з прогином при $\alpha = 0$.

На рис. 2б бачимо, як змінюється величина згинного моменту при різних значеннях гофрування $k = 4$ і $k = 8$ на інтервалі $[0, \pi/4]$ і $[0, \pi/8]$.

Зі збільшенням амплітуди гофра максимальний момент зростає в 3.3 і 6.2 разів при $k = 4$ ($\varphi = \pi/4$) і в 3.1 і 5.3 разів при $k = 8$ ($\varphi = \pi/8$) для $\alpha = 0.3, 0.5$ відповідно порівняно з моментом для $\alpha = 0.1$.

Розглянемо також ортотропні оболонки для п'яти варіантів пружних характеристик матеріалу. Приймаємо, що модуль пружності $E_s = E = \text{const}$, а змінюються модуль пружності $E_t = \mu E$, модуль зсуву $G_{st} = \lambda E$ і коефіцієнт ν_s . Розглянемо такі варіанти значень пружних сталей матеріалу оболонки [6]:

- 1) $\mu = 2, \quad \lambda = 0.3, \quad \nu_s = 0.075$;
- 2) $\mu = 1.35, \quad \lambda = 0.215, \quad \nu_s = 0.122$;
- 3) $\mu = 1, \quad \lambda = 0.385, \quad \nu_s = 0.3$;
- 4) $\mu = 0.741, \quad \lambda = 0.159, \quad \nu_s = 0.165$;
- 5) $\mu = 0.5, \quad \lambda = 0.125, \quad \nu_s = 0.15$.

Значення пружних характеристик варіанта 3 відповідає ізотропному випадку.

Розглянемо задачу для замкнутих уздовж твірної оболонок з жорстко закріпленими торцями, тобто задано такі граничні умови:

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = L.$$

Задачу розв'язували при таких початкових даних: $R = 20$, $2\ell = L = 60$, $\Delta = 0, 0.5, 0.10, 0.15$.

Отримані результати для значень прогину w і зусилля N_φ для $h = 1$ при $s = 30$ містяться в табл. 4. З огляду на симетрію задачі значення величин наведено у трьох точках на інтервалі $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Цифрами 1–5 позначено номери варіантів ортотропії.

Таблиця 4

$Ew/10^4 q_0$					
$2\varphi/\pi$	1	2	3	4	5
$\Delta = 0$					
0-1	0.0197	0.0291	0.0368	0.0530	0.0791
$\Delta = 0.05$					
0	-0.0710	-0.0906	-0.0434	-0.1077	-0.1242
0.5	0.0231	0.0335	0.0402	0.0590	0.0867
1	0.1242	0.1668	0.1289	0.2384	0.3142
$\Delta = 0.10$					
0	-0.1511	-0.1958	-0.1143	-0.2488	-0.3023
0.5	0.0334	0.0469	0.0506	0.0774	0.1102
1	0.2457	0.3273	0.2363	0.4549	0.5891
$\Delta = 0.15$					
0	-0.2226	-0.2896	-0.1782	-0.3742	-0.4602
0.5	0.0510	0.0701	0.0687	0.1091	0.1507
1	0.3889	0.5162	0.3637	0.7103	0.9140
$N_\varphi 10^2 q_0$					
$\Delta = 0$					
0-1	0.2000	0.2000	0.2000	0.1999	0.1997
$\Delta = 0.05$					
0	0.1756	0.1753	0.1742	0.1745	0.1740
0.5	0.2009	0.2010	0.2010	0.2009	0.2007
1	0.2278	0.2281	0.2294	0.2287	0.2288
$\Delta = 0.10$					
0	0.1544	0.1537	0.1517	0.1522	0.1513
0.5	0.2036	0.2038	0.2036	0.2038	0.2038
1	0.2592	0.2597	0.2627	0.2611	0.2619
$\Delta = 0.15$					
0	0.1361	0.1350	0.1323	0.1327	0.1314
0.5	0.2082	0.2085	0.2082	0.2088	0.2090
1	0.2946	0.2953	0.3004	0.2979	0.2997

З табл. 4 видно, що зі зменшенням модуля пружності E_t прогин зростає. При $\Delta = 0.05$ і $\varphi = \pi/2$ прогини для чотирьох варіантів ортотропії у порівнянні з першим зростають у такому відношенні: 1, 1.35, 1.04, 1.92, 2.53. При $\Delta = 0.10$ маємо: 1, 1.33, 0.96, 1.85, 2.40, а при $\Delta = 0.15$: 1, 1.33, 0.94, 1.83, 2.35. Зі збільшенням ступеня еліптичності величина прогину зростає. Так,

при $\Delta = 0.05, 0.10, 0.15$ для варіанта 5 при $\varphi = \pi/2$ маємо відношення: 1, 1.87, 2.91. Таким чином, зміна механічних параметрів матеріалу і ступеня еліптичності може суттєво впливати на деформування оболонки. На відміну від цього, для зусилля N_φ зміна параметрів ортотропії не має великого впливу на його величину, а зміна ступеня еліптичності впливає на зміну зусилля N_φ на 30%. Відмітимо, що у випадку кругової оболонки зміна механічних параметрів майже не впливає на зусилля N_φ .

У випадку незамкнутої $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ циліндричної оболонки з еліптичним поперечним перерізом для тих самих варіантів ортотропії 1–5 задачу розв'язано при таких даних: $R = 20, 2\ell = L = 60, h = 1, \Delta = 0, 0.5, 0.10, 0.15$.

Результати розв'язування задачі при $s = \ell = 30$ для прогину w наведено у вигляді графіків на рис. 3, де для значень $\Delta = 0, 0.05, 0.10, 0.15$ на інтервалі $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ показано розподіл прогину для п'яти варіантів ортотропії.

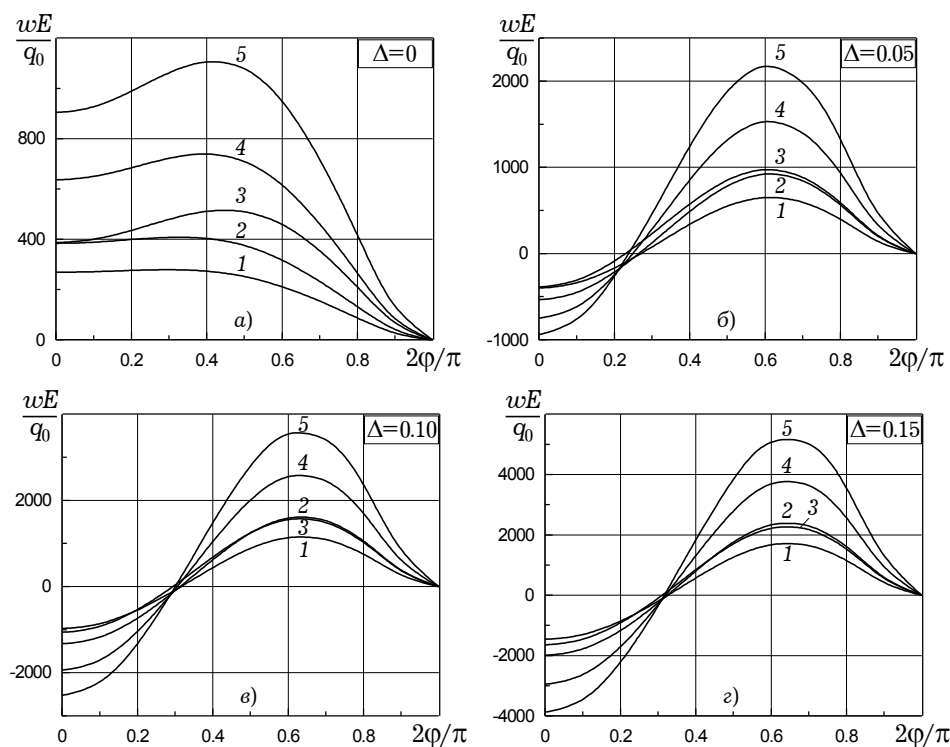


Рис. 3

Із рис. 3а при $\Delta = 0$ впливає, що максимальне значення прогину оболонки в середньому перерізі зростає у такому відношенні: 1, 1.43, 2.69, 4.00.

Із рис. 3б при $\Delta = 0.05$ отримуємо: 1, 1.39, 1.46, 2.32, 3.29.

Із рис. 3в і 3г відповідно знаходимо при $\Delta = 0.10$: 1, 1.42, 1.35, 2.27, 3.15 і при $\Delta = 0.15$: 1, 1.38, 1.30, 2.93, 3.08.

1. Алберг Д., Нильсон Э., Уолл Л. Теория сплайнов и ее приложения. – Москва: Мир, 1972. – 318 с.
2. Бурак Я. Й. Вибрані праці. – Львів: НУЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Вид-во «Ахіл», 2001. – 352 с.
3. Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В. Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках. – Киев: Наук. думка, 1984. – 157 с.

4. Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с.
5. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
6. Григоренко Я. М., Григоренко О. Я., Захарийченко Л. И. Расчет напряженно-деформированного состояния ортотропных замкнутых и открытых некруговых цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 7. – С. 83–92.
7. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 6. – С. 3–27.
8. Завьялов Ю. С., Квасов Ю. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
9. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Stress analysis of orthotropic noncircular cylindrical shells of variable thickness in a refined formulation // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 3. – P. 266–274.
Те саме: Григоренко Я. М., Яремченко С. Н. Исследование напряженного состояния ортотропных некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины в уточненной постановке // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 3. – С. 35–44.
10. Grigorenko Ya. M., Zakhariichenko L. I. Studying the effect of the spatial frequency and amplitude of corrugation on the stress-strain state of cylindrical shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 12. – P. 1429–1435.
Те саме: Григоренко Я. М., Захарийченко Л. И. Исследование влияния изменения частоты и амплитуды гофрировки цилиндрических оболочек на их напряженно-деформированное состояние // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 12. – С. 78–85.
11. Grigorenko Ya. M., Zakhariichenko L. I. Stress-strain analysis of elliptic cylindrical shells under local loads // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 10. – P. 1157–1163.
Те саме: Григоренко Я. М., Захарийченко Л. И. Анализ напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением при локализованных нагрузках // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 10. – С. 113–121.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С НЕКРУГОВЫМ
ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ НА ОСНОВЕ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ**

Для решения двумерных краевых задач о напряженно-деформированном состоянии замкнутых и открытых некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины при действии неравномерно распределенных и локальных нагрузок для произвольных видов закрепления краев предложен нетрадиционный подход, основанный на сплайн-аппроксимации решения в одном координатном направлении и решении полученной одномерной краевой задачи с помощью устойчивого численного метода дискретной ортогонализации. Приведены результаты решения задачи в виде графиков и таблиц.

**SOLUTION OF PROBLEMS AND INVESTIGATION OF STRESS STATE OF NONCIRCULAR
CYLINDRICAL VARIABLE THICKNESS SHELLS ON SPLINE-APPROXIMATION BASE**

A non-standard approach is proposed for solution of two-dimensional boundary-value stress-strain problems for closed and open variable thickness cylindrical shells with arbitrarily fixed ends under non-uniformly distributed and local loadings. The approach is based on the spline-approximation of the solution in one coordinate direction and solving the one-dimensional boundary-value problem by the stable numerical method of discrete orthogonalization. The results obtained are presented in the form of plots and tables.

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
01.12.05