УДК 517.912

О. О. Власій

СТИСК І КРУЧЕННЯ ВАЛУ ЗІ ЗМІННОЮ ЖОРСТКІСТЮ

Досліджено задачу на стиск і кручення валу зі сталою жорсткістю на основі концепції квазіпохідних. Знайдено наближений розв'язок задачі на власні значення для валу зі змінною жорсткістю.

Вступ. При створенні математичних моделей, які враховують єдність дискретної і неперервної природи реальних фізичних явищ, виникають диференціальні рівняння із узагальненими функціями в коефіцієнтах. Наявність у таких рівняннях доданків вигляду $\left(a(x)y^{(n)}(x)\right)^{(m)}$ із принаймні розривними коефіцієнтами $a(x)$ при розкритті дужок за допомогою класичного диференціювання приводить до некоректних добутків у сенсі теорії узагальнених функцій. Введення поняття квазіпохідних дало змогу дослідити рівняння із узагальненими коефіцієнтами шляхом зведення їх до узагальнених диференціальних систем першого порядку, для яких повинна виконуватися необхідна та достатня умова коректності [7]. Рівняння такого типу прийнято називати квазідиференціальними рівняннями (КДР). Дослідження, наприклад, задач математичної фізики та будівельної механіки приводить до скалярних та векторних КДР (див. [5] і бібліографію там). Розв'язування таких рівнянь зводиться до розв'язування відповідних їм так званих асоційованих матричних квазідиференціальних рівнянь [7]. Особливої уваги заслуговує розробка наближених методів розв'язування скалярних і векторних КДР [2, 6, 8]. У цій статті пропонується знаходження точного розв'язку задачі на власні значення для матричного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (яке розглядається авторами як КДР) за допомогою двоточкової еквівалентної формули (точної різницевої схеми), а також знаходження наближеного розв'язку відповідної задачі для матричного рівняння зі змінними коефіцієнтами, які апроксимуються кусково-сталими або узагальненими функціями (в цьому випадку одержуємо наближену двоточкову формулу). Варто зауважити, що навіть у скалярних випадках побудувати наближену різницеву схему для узагальненого КДР класичними методами неможливо внаслідок невизначеності узагальненої функції в точці.

Позначення. E_m – одинична матриця m-го порядку; O_2 – нульова матриця другого порядку; $J = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$; $\mathcal{I}$ – відкритий інтервал дійсної осі $\mathbb{R}$; $BV_{\mathrm{loc}}^{+}(\mathcal{I})$ – простір неперервних справа функцій локально обмеженої на $\mathcal{I}$ варіації; $\mathbb{R}^{p\times q}$ – простір дійснозначних матриць розміру $p\times q$; $BV_{\mathrm{loc}}^{+}(\mathcal{I},\mathbb{R}^{p\times q})$ – простір дійснозначних матриць-функцій розміру $p\times q$, елементи яких належать до простору $BV_{\mathrm{loc}}^{+}(\mathcal{I})$; $\delta(x-x_s)$ – функція Дірака з носієм у точці x_s.

Задача для валу із сталою жорсткістю. Нехай на вал сталої жорсткості g довжини ℓ діє осьова стискувальна сила P і крутильний момент M. Стан валу в слабо деформованому стані описується системою диференціальних рівнянь

$$-gz'' = Pz - My', \qquad -gy'' = Py + Mz'. \tag{1}$$

Для валу із закріпленими кінцями відповідні крайові умови для системи (1) матимуть вигляд

$$z(0) = z(\ell) = 0, \qquad y(0) = y(\ell) = 0. \tag{2}$$

У роботі [4] досліджено цю задачу на власні значення шляхом зведення системи (1) до диференціального рівняння четвертого порядку. Знайдемо точний розв'язок, опираючись на концепцію квазіпохідних. Введемо такі позначення:

$$\bar{Y}(x) = \left\| \begin{matrix} z(x) \\ y(x) \end{matrix} \right\|, \qquad A = \frac{M}{g} \cdot J, \qquad B = \frac{P}{g} \cdot E_2 .$$

Систему (1) тоді систему запишемо у вигляді векторного рівняння

$$\bar{Y}''(x) + A\bar{Y}'(x) + B\bar{Y}(x) = 0 , \tag{3}$$

а крайові умови (2) набудуть вигляду

$$\bar{Y}(0) = \bar{Y}(\ell) = 0 . \tag{4}$$

Щоб знайти розв'язок векторного рівняння (3), достатньо знайти розв'язок асоційованого до нього матричного рівняння

$$Y''(x) + AY'(x) + BY(x) = 0 , \tag{5}$$

де $Y(x)$ − невідома квадратна матриця-функція порядку 2.

За допомогою введення вектора $\bar{U}(x) = \left\| \begin{matrix} Y(x) \\ Y'(x) \end{matrix} \right\|$ рівняння (5) зводиться до диференціальної системи

$$\bar{U}'(x) = C \cdot \bar{U}(x), \qquad C = \left\| \begin{matrix} O_2 & E_2 \\ -B & -A \end{matrix} \right\| . \tag{6}$$

Для системи (6) існує фундаментальна матриця $\mathcal{B}(x,\alpha)$, за допомогою якої розв'язок цієї системи подається у вигляді $\bar{U}(x) = \mathcal{B}(x,\alpha)\bar{U}(\alpha)$. Фундаментальна матриця має наступну структуру [9]:

$$\mathcal{B}(x,\alpha) = \left\| \begin{matrix} K^{*\{1\}*}(x,\alpha) & K(x,\alpha) \\ K^{*\{1\}*[1]}(x,\alpha) & K^{[1]}(x,\alpha) \end{matrix} \right\| ,$$

де $K(x,\alpha)$ − матрична функція Коші рівняння (5), а вираз $K^{*\{1\}*[1]}(x,\alpha)$ означає, що над матрицею $K(x,\alpha)$ виконуються такі операції: [1] − квазідиференціювання за змінною x в сенсі вихідного рівняння, «$*$» − ермітове спряження (яке у випадку дійснозначних коефіцієнтів перетворюється у звичайне транспонування), $\{1\}$ − квазідиференціювання за змінною x у сенсі спряженого рівняння і знову «$*$» − ермітове спряження.

Із подання розв'язку системи (6) через фундаментальну матрицю випливає рівність

$$\bar{U}(\ell) = \mathcal{B}(\ell,0)\bar{U}(0) ,$$

яку запишемо як

$$\left\| \begin{matrix} Y(\ell) \\ Y'(\ell) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} K^{*\{1\}*}(\ell,0) & K(\ell,0) \\ K^{*\{1\}*[1]}(\ell,0) & K^{[1]}(\ell,0) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Y(0) \\ Y'(0) \end{matrix} \right\| ,$$

звідки $Y(\ell) = K^{*\{1\}*[1]}(\ell,0)Y(0) + K(\ell,0)Y'(0)$. Враховуючи крайові умови (4), отримуємо, що $K(\ell,0)Y'(0) = 0$. Для того щоб одержаний розв'язок не був тривіальним, повинна виконуватися умова $\operatorname{Det} K(\ell,0) = 0$, яка і визначає характеристичне рівняння для відшукання власних значень P і M.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що функція Коші для рівняння (5) має вигляд

$$K(x,\alpha) = \frac{2g}{\sqrt{D}} \sin\left(\frac{\sqrt{D}}{2g}(x-\alpha) \right) \left\| \begin{matrix} \cos\left(\frac{M}{2g}(x-\alpha) \right) & \sin\left(\frac{M}{2g}(x-\alpha) \right) \\ -\sin\left(\frac{M}{2g}(x-\alpha) \right) & \cos\left(\frac{M}{2g}(x-\alpha) \right) \end{matrix} \right\| ,$$

де $D = M^2 + 4Pg$.

Із умови $\operatorname{Det} K(\ell, 0) = 0$ випливає рівняння $\sin\left(\frac{\sqrt{D}}{2g}\ell\right) = 0$. Отже, взаємозв'язок між значеннями крутильного моменту та осьової сили виражається у явному вигляді рівнянням

$$P = -\frac{M^2}{4g} + \frac{\pi^2 g}{\ell^2}.$$

Задача для валу із змінною жорсткістю. Розглянемо задачу (1), (2) для валу довжини $\ell = \pi$ зі змінною жорсткістю $g(x) = \frac{1}{1+\sin x}$:

$$-\frac{1}{1+\sin x} z'' = Pz - My', \qquad -\frac{1}{1+\sin x} y'' = Py + Mz', \tag{7}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \qquad z(0) = z(\pi) = 0. \tag{8}$$

Позначимо $A(x) = M(1+\sin x)\cdot J$, $B(x) = P(1+\sin x)\cdot E_2$. Тоді систему (7) запишемо у вигляді векторного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$\bar{Y}''(x) + A(x)\bar{Y}'(x) + B(x)\bar{Y}(x) = 0,$$

а тому потрібно знайти розв'язок асоційованого рівняння

$$Y''(x) + A(x)Y'(x) + B(x)Y(x) = 0. \tag{9}$$

Введемо вектор $\bar{U}(x) = \begin{Vmatrix} Y(x) \\ Y'(x) \end{Vmatrix}$, тоді рівняння (9) зведеться до диференціальної системи першого порядку

$$\bar{U}'(x) = C'(x)\cdot \bar{U}(x), \tag{10}$$

для якої $C'(x) = \begin{Vmatrix} O_2 & E_2 \\ -B(x) & -A(x) \end{Vmatrix}$.

Розіб'ємо відрізок $[0, \pi]$ на n рівних частин з кроком $h = \frac{\pi}{n}$:

$$0 \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_s < x_{s+1} < \ldots < x_n \equiv \pi.$$

На кожному інтервалі $[x_s, x_{s+1})$ апроксимуємо матрицю $C(x)$ таким чином. Застосуємо до елемента $C_{21}(x)$ блочної матриці $C(x)$ апроксимацію, запропоновану в [1], яку доцільно назвати дискретизацією або D-апроксимацією. Наближаємо функцію $C_{21}(x)$ східчастою функцією $C_{21}^n(x)$, яка на кожному інтервалі $[x_s, x_{s+1})$ дорівнює $C_{21}(x_s)$. Можна переконатися, що $C_{21}(x) = -P(x - \cos x)\cdot E_2 + C_1$, де $C_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Тоді

$$C_{21}^n(x) = -P(x_s - \cos x_s)\cdot E_2 + C_1 \qquad \text{для} \qquad x \in [x_s; x_{s+1}).$$

Стрибок $\Delta C_{21}^n(x_s)$ функції $C_{21}^n(x_s)$ у точці x_s буде

$$\Delta C_{21}^n(x_s) = C_{21}^n(x_s) - C_{21}^n(x_{s-1}) = -P(h - \cos x_s + \cos x_{s-1})\cdot E_2.$$

Позначимо $a_s = h - \cos x_s + \cos x_{s-1}$. Тоді для наближеної матриці $(C^n)'(x)$ елемент $(C_{21}^n)'(x)$ буде мати вигляд

$$(C_{21}^n)'(x) = -\sum_{s=1}^{n} P a_s \delta(x - x_s)\cdot E_2.$$

До елемента $C_{22}(x) = -M(x - \cos x)\cdot J + C_2$, де $C_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, блочної матриці $C(x)$ застосуємо так звану L-апроксимацію (див., наприклад, [3]). Наближаємо функцію $C_{22}(x)$ на кожному інтервалі $[x_s, x_{s+1})$ відрізком, що сполучає точки $(x_s, C_{22}(x_s))$ і $(x_{s+1}, C_{22}(x_{s+1}))$. Тоді

$$\left(C_{22}^n\right)'(x) = -\sum_{s=0}^{n-1} \frac{M(h - \cos x_{s+1} + \cos x_s)}{h} \cdot J \qquad \text{при} \qquad x \in [x_s, x_{s+1}).$$

Позначимо через $\theta_s(x)$ характеристичну функцію інтервалу $[x_{s-1}, x_s)$, визначену при $x \in [0, \pi]$:

$$\theta_s(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{s-1}, x_s), \\ 0, & x \notin [x_{s-1}, x_s), \end{cases} \qquad s = 1, \ldots, n.$$

Тоді

$$(C_{22}^n)'(x) = -\sum_{s=1}^{n} \frac{M(h - \cos x_s + \cos x_{s-1})}{h} \theta_s(x) \cdot J = -\sum_{s=1}^{n} \frac{Ma_s}{h} \theta_s(x) \cdot J.$$

Отже, одержали таку наближену узагальнену диференціальну систему першого порядку:

$$\left\| \begin{matrix} Y^n(x) \\ (Y^n(x))' \end{matrix} \right\|' = \left\| \begin{matrix} O_2 & E_2 \\ -\sum\limits_{s=1}^{n} Pa_s \delta(x - x_s) \cdot E_2 & -\sum\limits_{s=1}^{n} \frac{Ma_s}{h} \theta_s(x) \cdot J \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Y^n(x) \\ (Y^n(x))' \end{matrix} \right\|. \tag{11}$$

Згідно з побудовою маємо, що $C^n(x) \in BV_{\text{loc}}^+(\mathcal{I}, \mathbb{R}^{2\times 2})$. Оскільки $\Delta(C^n)'(x_s) =$
$= \left\| \begin{matrix} O_2 & O_2 \\ -Pa_s \cdot E_2 & O_2 \end{matrix} \right\|$, $s = 1, \ldots, n$, то очевидно, що

$$\forall x_s \in [0, \pi] \qquad \left(\Delta(C^n)'(x_s)\right)^2 \equiv 0.$$

Отже, узагальнена диференціальна система (11) є коректною.

Зауважимо, що до елемента $C_{22}(x)$ не можна застосувати D-апроксимацію, оскільки внаслідок неї одержали б некоректну диференціальну систему (11).

Для матриці $(C^n)'(x)$ виконуються всі умови теореми, доведеної в [2]. Отже, розв'язок системи (11) буде за нормою (див. [2]) збігатися до розв'язку системи (10). Рівняння, наближене до рівняння (9), матиме вигляд

$$(Y^n)'' + \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{Ma_s}{h} \theta_s J\right)(Y^n)' + \left(\sum_{s=1}^{n} Pa_s \delta(x - x_s) E_2\right) Y^n = 0. \tag{12}$$

Оскільки система (11) є коректною, то для неї існує [7] фундаментальна матриця $\mathcal{B}(x, \alpha)$ така, що розв'язок цієї системи подається у вигляді

$$\bar{U}^n(x) = \mathcal{B}(x, \alpha) \cdot \bar{U}^n(\alpha).$$

Згідно з означенням фундаментальна матриця системи (11) є розв'язком за x цієї системи, тому для неї справджується умова стрибка $\Delta\mathcal{B}(x, \alpha) = \Delta C^n(x) \mathcal{B}(x - 0, \alpha)$, тому

$$\bar{U}^n(x) = (E_4 + \Delta C^n(x)) \mathcal{B}(x - 0, \alpha) \cdot \bar{U}^n(\alpha). \tag{13}$$

Зауважимо, що $\mathcal{B}(x - 0, \alpha)$ – це фундаментальна матриця, що відповідає «неперервній» частині рівняння (12).

З формули (13) випливає таке рекурентне співвідношення:

$$\bar{U}^n(x_s) = (E_4 + \Delta C^n(x_s)) \mathcal{B}(x_s - 0, x_{s-1}) \cdot \bar{U}^n(x_{s-1}), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

На кожному інтервалі $[x_{s-1}, x_s)$ знайдемо функцію Коші для «неперервної» частини рівняння (12):

$$\bar{Z}'' + \frac{Ma_s}{h} J\bar{Z}' = 0, \qquad \bar{Z} = \bar{U}^n. \tag{15}$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що

$$K(x,\alpha) = A_s^{-1} - A_s^{-1} \cdot e^{-A_s(x-\alpha)}, \quad \text{де} \quad A_s = \frac{Ma_s}{h} \cdot J.$$

Для рівняння (15) квазіпохідна в сенсі вихідного рівняння співпадає зі звичайною похідною $\bar{Z}^{[1]} = \bar{Z}'$, однак квазіпохідна в сенсі спряженого рівняння буде відмінною від звичайної похідної:

$$\bar{Z}^{\{1\}} = -\bar{Z}' + A_s\bar{Z}.$$

Зважаючи на структуру фундаментальної матриці, одержимо, що

$$\mathcal{B}(x-0,\alpha) = \begin{Vmatrix} E_2 & A_s^{-1} - A_s^{-1}e^{-A_s(x-\alpha)} \\ O_2 & e^{-A_s(x-\alpha)} \end{Vmatrix},$$

тоді, оскільки $x_s - x_{s-1} = h,\ s = 1,\dots,n$, маємо:

$$\mathcal{B}(x_{s+1}-0,x_s) = \begin{Vmatrix} E_2 & A_s^{-1} - A_s^{-1}e^{-A_s h} \\ O_2 & e^{-A_s h} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_2 & A_s^{-1} - A_s^{-1}e^{-Ma_s J} \\ O_2 & e^{-Ma_s J} \end{Vmatrix}.$$

Позначимо $W_s = \bar{U}^n(x_s)$, тоді для розв'язку системи (11) згідно з (14) маємо рекурентну формулу

$$W_s = \left\Vert E_4 + \begin{Vmatrix} O_2 & O_2 \\ -Pa_sE_2 & O_2 \end{Vmatrix} \right\Vert \cdot \begin{Vmatrix} E_2 & A_s^{-1} - A_s^{-1}e^{-Ma_s J} \\ O_2 & e^{-Ma_s J} \end{Vmatrix} W_{s-1}, \tag{16}$$

для $s = 1,\dots,n$. Можна показати, що $e^{-t\cdot J} = \begin{Vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{Vmatrix}$, тому для обчислення $e^{-Ma_s J}$ маємо формулу

$$e^{-Ma_s J} = \begin{Vmatrix} \cos(Ma_s) & \sin(Ma_s) \\ -\sin(Ma_s) & \cos(Ma_s) \end{Vmatrix}.$$

Враховуючи крайові умови (8), початковий вектор для рекурентної формули (16) доцільно задати у вигляді $W_0 = \begin{Vmatrix} O_2 \\ E_2 \end{Vmatrix}$. Тоді вектор $W_n = \bar{U}^n(\pi)$ обчислюється однозначно. Аналогічно, як і у випадку задачі зі сталою жорсткістю, характеристичне рівняння для визначення P і M буде мати вигляд $\operatorname{Det}(W_n)_{11} = 0$. Однак у цьому випадку це рівняння буде неявним. Задаючи послідовно значення крутильного моменту M, можемо обчислити відповідні значення осьової стискувальної сили P. На рис. 1 цій залежності відповідає крива при $\varepsilon = 1$.

Крім того, виконано розрахунки залежностей осьової стискувальної сили P від крутильного моменту M для задачі (1), (2) при $g(x,\varepsilon) = \dfrac{1}{1+\varepsilon\cdot\sin x}$, коли $\varepsilon = 0$, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 (див. рис. 1). Зауважимо, що при $M = 0$ вихідну задачу потрібно розв'язувати окремо, оскільки матриця A в цьому випадку вироджується в нульову матрицю і тому не можна знайти обернену матрицю A^{-1} і скористатися формулою (16).

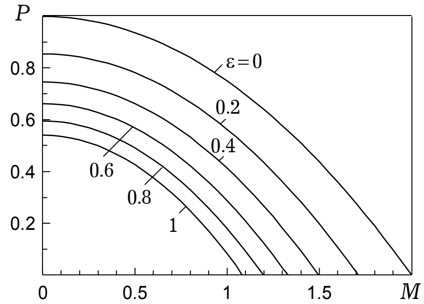

Рис. 1

Висновок. У статті запропоновано використання L-апроксимації і D-апроксимації до коефіцієнтів векторного (а одночасно й матричного) квазідиференціального рівняння, внаслідок чого одержано наближений розв'язок відповідної задачі на власні значення. Зауважимо, що використання тільки D-апроксимації призвело би до некоректного рівняння і тому було запропоновано поєднання двох видів апроксимації. Одержані результати є новими, а у часткових випадках співпадають із відомими раніше (наприклад, [4]).

1. *Аткинсон Ф. О.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. – Москва: Мир, 1968. – 749 с.
2. *Власій О.* Про збіжність наближених розв'язків диференціальних рівнянь з мірами // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2005. – № 540. – С. 62–64.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
4. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). – Москва: Наука, 1968. – 504 с.
5. *Мазуренко В.* Про коливання балок з дискретно-неперервним розподілом параметрів // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2 т. – Львів, 2000. – Т. 2 – С. 255–259.
6. *Стасюк М. Ф., Власій О. О.* Рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика – 2000. – № 407. – С. 82–87.
7. *Тацій Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. держ. ун-т ім. І. Франка. – Львів, 1994. – 37 с.
8. *Тацій Р. М., Власій О. О.* Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння 4-го порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 49–55.
9. *Тацій Р. М., Пахолок Б. Б.* Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 27–30.

СЖАТИЕ И КРУЧЕНИЕ ВАЛА С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Исследована задача на сжатие и кручение вала с постоянной жесткостью с использованием концепции квазипроизводных. Найдено приближенное решение задачи на собственные значения для вала с переменной жесткостью.

COMPRESSION AND TORSION OF SHAFT WITH VARIABLE INFLEXIBILITY

Exact solution of the problem about compression and torsion of a shaft with constant inflexibility on the basis of conception of quasi-derivatives is obtained. The approximate solution of the eigenvalues-problem for the shaft with variable inflexibility is found.

Прикарпат. ун-т
ім. В. Стефаника, Ів.-Франківськ

Одержано
26.01.07