УДК 539.3

В. А. Галазюк, Г. Т. Сулим, В. Р. Нестер

КЕРУВАННЯ ФОРМОЮ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПОРОЖНИНИ ЗА УМОВ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ТІЛА З РЕОЛОГІЧНИМИ ШАРАМИ

Побудовано некласичну математичну модель деформування пружного простору з циліндричною порожниною при частково детермінованому радіальному навантаженні її поверхні за умов плоскої деформації. При цьому з'ясовано, що припущення про існування поверхневого та прямолінійного внутрішнього межових реологічних шарів дає можливість розв'язати задачу про керування радіальними переміщеннями поверхні порожнини. Знайдено закон розподілу параметрів реологічних шарів, за якого ці переміщення є довільно заданими, зокрема, нульовими.

У праці [2] запропоновано нову модель деформування тіл, в якій постулюється існування зовнішнього та внутрішнього межових шарів на поверхні тріщини та її продовженні. Це − тонкі плівки з певними реологічними властивостями, які у випадку тіла з тріщиною уможливлюють виконання на вістрі тріщини фізично обґрунтованої вимоги неперервності компонент вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega} = 0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ і відтак її гладке (без зламів) розкриття, що обумовлює регулярний напружено-деформований стан. За виконання цієї вимоги поверхневий межовий шар продовжується у площині щілини поза її межі, де постулюється заникаючий за відповідним законом на безмежності внутрішній реологічний шар − поверхня розриву параметрів поля першого порядку [4]. При цьому стрибок пружних кутів повороту і відповідно дотичних напружень слід трактувати як характерну властивість математичної моделі внутрішнього реологічного шару.

Цю модель пропонується використати для формулювання задачі про напружено-деформований стан у необмеженому тілі з реологічними шарами та циліндричною порожниною радіуса R за умови плоскої деформації при частково детермінованому радіальному навантаженні її поверхні.

Подання розв'язків плоскої задачі теорії пружності у полярній системі координат через інтеграли Фур'є. Однорідне пружне тіло віднесемо до безрозмірної циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$:

$$x = R\alpha \sin\beta, \qquad 1 \le \alpha < \infty ,$$
$$y = R\alpha \cos\beta, \qquad -\pi \le \beta \le \pi ,$$
$$z = R\gamma, \qquad 0 \le |\gamma| < \infty ,$$

і будемо вважати, що під дією зовнішнього навантаження у ньому реалізується плоско-деформований стан. У цьому випадку система рівнянь рівноваги стосовно функцій об'ємної деформації $\theta(\alpha, \beta)$ і єдиної ненульової компоненти $\omega_\gamma(\alpha, \beta)$ вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega} = 0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ матиме наступний вигляд:

$$k^2 \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - \frac{2}{\alpha}\frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\beta} = 0, \qquad k^2 \frac{\partial\theta}{\partial\beta} + 2\alpha \frac{\partial\omega_\gamma}{\partial\alpha} = 0 , \tag{1}$$

де $k^2 = \dfrac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} = \dfrac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}$; λ і μ − пружні сталі Ляме; ν − коефіцієнт Пуассона. Величини $\theta(\alpha, \beta)$ і $\omega_\gamma(\alpha, \beta)$ у формулах (1) подаються через ненульові компоненти вектора пружного переміщення $\mathbf{u} = \mathbf{u}(Ru_\alpha, Ru_\beta, 0)$ так:

$$\theta \equiv \mathrm{div}\,\mathbf{u} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha u_\alpha) + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} ,$$
$$\omega_\gamma \equiv (0.5\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u})_\gamma = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha u_\beta) - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}\right]. \tag{2}$$

Розв'язки системи рівнянь (1) у просторі з циліндричною порожниною за навантаження, коли об'ємна деформація є парною функцією, можна подати у вигляді таких інтегралів Фур'є:

$$\theta(\alpha, \beta) = 4\int_0^\infty (\xi - 1) G(\xi) \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi \,,$$

$$\omega_\gamma(\alpha, \beta) = -2k^2 \int_0^\infty (\xi - 1) G(\xi) \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta)\, d\xi \,, \tag{3}$$

де $G(\xi)$ − довільна функція, яка забезпечує існування і обмеженість відповідних інтегралів. За відомими величинами $\theta(\alpha, \beta)$ і $\omega_\gamma(\alpha, \beta)$ із системи диференціальних рівнянь (2) знайдемо компоненти вектора пружного переміщення і запишемо їх так:

$$u_\alpha(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \xi W(\xi)\, \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi + {}$$
$$+ \alpha\int_0^\infty \Big[(1 - k^2)\xi - 2\Big] G(\xi)\, \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi \,, \tag{4}$$

$$u_\beta(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \xi W(\xi)\, \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta)\, d\xi + {}$$
$$+ \alpha\int_0^\infty \Big[(1 - k^2)\xi + 2k^2\Big] G(\xi)\, \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta)\, d\xi \,, \tag{5}$$

де $W(\xi)$ − довільна функція. Відповідно до подань (4) і (5) за законом Гука запишемо ненульові компоненти тензора напружень

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) = 2\mu\Bigg\{(k^2 - 1)\int_0^\infty (\xi - 1)(\xi + 2) G(\xi)\, \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi - {}$$
$$- \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \xi(\xi + 1) W(\xi)\, \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi\Bigg\} \,, \tag{6}$$

$$\sigma_{\beta\beta}(\alpha, \beta) = 2\mu\Bigg\{-(k^2 - 1)\int_0^\infty (\xi - 1)(\xi - 2) G(\xi)\, \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi + {}$$
$$+ \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \xi(\xi + 1) W(\xi)\, \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi\Bigg\} \,, \tag{7}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \beta) = 4\mu(k^2 - 2)\int_0^\infty (\xi - 1) G(\xi)\, \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi \,, \tag{8}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = 2\mu\Bigg\{(k^2 - 1)\int_0^\infty \xi(\xi - 1) G(\xi)\, \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta)\, d\xi - {}$$
$$- \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \xi(\xi + 1) W(\xi)\, \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta)\, d\xi\Bigg\} \,, \tag{9}$$

де довільні функції $G(\xi)$ і $W(\xi)$ визначаються відповідними крайовими умовами.

Застосуємо отримані вище подання та запропоновану фізичну модель до дослідження напружено-деформованого стану пружного простору з циліндричною порожниною радіуса R, що перебуває в умовах плоскої деформації, при частково детермінованому радіальному навантаженні поверхні порожнини.

Формулювання задачі та її розв'язання методом розривних інтегралів Фур'є. Для простору з циліндричною порожниною, що перебуває в умовах плоскої деформації, постулюватимемо існування реологічних зовнішнього межового шару нульової товщини на поверхні порожнини та прямолінійного внутрішнього шару на лінії $\beta = \pm\pi$, $\alpha > 1$. У розглядуваній задачі радіальні переміщення поверхні порожнини можуть бути довільно заданими, зокрема, нульовими. Вимагаючи незмінність діаметра порожнини за навантаження її поверхні радіальним частково детермінованим зусиллям (рис. 1), сформулюємо практично важливу задачу керування з такими крайовими умовами:

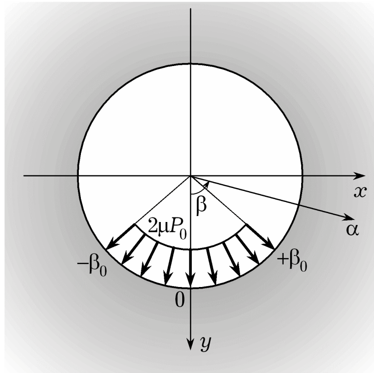

Рис. 1

$$\sigma_{\alpha\alpha}(1,\beta) = -2\mu P_0, \qquad 0 \le |\beta| \le \beta_0,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(1,\beta) = g(\beta^2), \qquad \beta_0 \le |\beta| \le \pi, \tag{10}$$

$$u_\alpha(1,\beta) = 0, \qquad 0 \le |\beta| \le \pi, \tag{11}$$

де функцію $g(\beta^2)$ будемо називати коригувальною функцією, яка забезпечує неперервність компоненти $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)$ тензора напружень на краю зони навантаження:

$$\lim_{\beta\to\beta_0-0} \sigma_{\alpha\alpha}(1,\beta) = \lim_{\beta\to\beta_0+0} \sigma_{\alpha\alpha}(1,\beta). \tag{12}$$

Зауважимо, що за виконання такої умови усі інші характеристики напружено-деформованого стану, зокрема, і єдина ненульова компонента ω_γ вектора локального жорсткого повороту також будуть неперервними на краю зони навантаження.

Відповідно до подань (4) і (6) та крайових умов (10) і (11) для визначення функцій $G(\xi)$ і $W(\xi)$ одержимо такі інтегральні рівняння Фредгольма першого роду:

$$2\mu\int_0^\infty \Big[(k^2-1)(\xi-1)(\xi+2)G(\xi) - \xi(\xi+1)W(\xi)\Big]\cos(\xi\beta)\,d\xi = -2\mu P_0,$$

$$0 \le |\beta| \le \beta_0,$$

$$\int_0^\infty \Big[\xi W(\xi) + \big[(1-k^2)\xi - 2\big]G(\xi)\Big]\cos(\xi\beta)\,d\xi = 0, \qquad 0 \le |\beta| \le \pi.$$

Якщо

$$\xi W(\xi) = -\big[(1-k^2)\xi - 2\big]G(\xi), \tag{13}$$

то друге рівняння виконується тотожно, а перше після відповідних спрощень набуде вигляду

$$\int_0^\infty (k^2+\xi)G(\xi)\cos(\xi\beta)\,d\xi = \frac{P_0}{2}, \qquad 0 \le |\beta| \le \beta_0. \tag{14}$$

Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду (14) розв'яжемо методом розривних інтегралів Фур'є [1], відповідно з яким підінтегральну функцію подамо у вигляді узагальненого ряду Неймана

$$(k^2+\xi)G(\xi) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{J_{2n-q+1}(\beta_0\xi)}{\xi^q} \tag{15}$$

з наперед невизначеними коефіцієнтами a_n і параметром q.

Подальші дослідження ґрунтуватимуться на властивостях розривного інтеграла Фур'є [3] (для $\frac{1}{2} < \lambda < \nu + 1$):

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\beta_0\xi)\cos(\xi\beta)}{\xi^\lambda}d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}\right)\beta_0^{\lambda-1}F\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2};\frac{1-\lambda-\nu}{2};\frac{1}{2};\frac{\beta^2}{\beta_0^2}\right)}{2^\lambda\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+1}{2}\right)}, \qquad 0 \le |\beta| \le \beta_0,$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\beta_0\xi)\cos(\xi\beta)}{\xi^\lambda}d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}\right)\beta_0^{\nu}F\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2};\frac{2-\lambda+\nu}{2};\nu+1;\frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right)}{2^\lambda\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right)|\beta|^{\nu-\lambda+1}}, \qquad |\beta| \ge \beta_0, \tag{16}$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\beta_0\xi)\sin(\xi\beta)}{\xi^\lambda}d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2}\right)\beta F\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2};\frac{2-\lambda-\nu}{2};\frac{3}{2};\frac{\beta^2}{\beta_0^2}\right)}{2^{\lambda-1}\beta_0^{2-\lambda}\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)}, \qquad 0 \le |\beta| \le \beta_0,$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\beta_0\xi)\sin(\xi\beta)}{\xi^\lambda}d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2}\right)\beta_0^{\nu}F\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2};\frac{1-\lambda+\nu}{2};\nu+1;\frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right)\operatorname{sgn}\beta}{2^\lambda\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\nu}{2}\right)|\beta|^{\nu-\lambda+1}}, \quad |\beta| \ge \beta_0. \tag{17}$$

У цих виразах $\Gamma(x)$ – ґамма-функція Ейлера, $F(a;b;c;x^2)$ – гіпергеометрична функція Ґаусса, задана гіпергеометричним рядом

$$F(a;b;c;x^2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)}\frac{x^{2k}}{k!}, \tag{18}$$

який збігається при $|x| \le 1$ (має одиничний радіус збіжності) за умови $c - a - b > 0$. Якщо ж $c - a - b = 0$, ряд збігається в крузі $|x| < 1$ і має при $x = 1$ має логарифмічну особливість. Зауважимо, що при $a = -k$ або $b = -k$, де $k \in \mathbb{N}_0$ гіпергеометричний ряд зводиться до полінома степеня $2k$, який можна виразити через поліноми Якобі.

Для гіпергеометричної функції справджуються такі формули підсумовування:

$$F(a;b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad c - a - b > 0,$$

$$F(a;b;c;x^2) = (1-x^2)^{c-a-b}F(c-a;c-b;c;x^2).$$

Зауважимо, що інтеграли Фур'є неперервні в точках $|\beta| = \beta_0$ за умови $\lambda > \frac{1}{2}$ і дорівнюють нулеві в області $|\beta| > \beta_0$ відповідно при $\lambda - \nu = -2k$ або $\lambda - \nu + 1 = -2k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Підставивши подання (15) в інтегральне рівняння (14) та помінявши порядок підсумовування та інтегрування, одержимо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\beta_0 \xi)\cos(\xi\beta)}{\xi^q} d\xi = \frac{P_0}{2}, \qquad 0 \le |\beta| \le \beta_0 .$$

Обчисливши розривний інтеграл в області $0 \le |\beta| \le \beta_0$, отримуємо алгебричне рівняння відносно коефіцієнтів a_n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+1)\beta_0^{q-1} F\left(n-q+1; -n; \frac{1}{2}; \frac{\beta^2}{\beta_0^2}\right)}{2^q \Gamma(n+1)} = \frac{P_0}{2}. \tag{19}$$

Оскільки гіпергеометрична функція Ґаусса $F\left(n-q+1; -n; \frac{1}{2}; \frac{\beta^2}{\beta_0^2}\right)$ другим параметром має від'ємне ціле число, то вона є поліномом степеня $2n$ і в такому випадку відповідно до апроксимаційної теореми Вейєрштрасса про наближення неперервної функції на скінченному інтервалі системою поліномів розв'язок рівняння (19) є таким:

$$a_0 = \frac{P_0 \cdot 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}, \qquad a_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тому відповідно до подання (15) і рівності (13) функції $G(\xi)$ та $W(\xi)$ матимуть такий вигляд:

$$G(\xi) = \frac{P_0 2^q J_{1-q}(\beta_0\xi)}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)\xi^q(k^2+\xi)},$$

$$\xi W(\xi) = \frac{P_0 2^q J_{1-q}(\beta_0\xi)\left[2-(1-k^2)\xi\right]}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)\xi^q(k^2+\xi)},$$

і згідно з інтегральними зображеннями (3)–(9) можемо записати усі характеристики напружено-деформованого стану, зокрема:

$$\theta(\alpha,\beta) = \frac{2P_0 2^q}{\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)} \int_0^{\infty} \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)(\xi-1)}{\xi^q(k^2+\xi)} \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi ,$$

$$\omega_\gamma(\alpha,\beta) = -\frac{k^2 P_0 2^q}{\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)} \int_0^{\infty} \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)(\xi-1)}{\xi^q(k^2+\xi)} \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta)\, d\xi ,$$

$$u_\alpha(\alpha,\beta) = \frac{P_0 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)} \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)\left[2-(1-k^2)\xi\right]}{\xi^q(k^2+\xi)} \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \alpha \int_0^{\infty} \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)\left[(1-k^2)\xi - 2\right]}{\xi^q(k^2+\xi)} \alpha^{-\xi} \cos(\xi\beta)\, d\xi \right\},$$

$$u_\beta(\alpha,\beta) = \frac{P_0 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)} \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)\left[2-(1-k^2)\xi\right]}{\xi^q(k^2+\xi)} \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \alpha \int_0^{\infty} \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)\left[(1-k^2)\xi + 2k^2\right]}{\xi^q(k^2+\xi)} \alpha^{-\xi} \sin(\xi\beta)\, d\xi \right\},$$

$$\frac{\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)}{2\mu}=\frac{P_0 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\left\{(k^2-1)\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)(\xi-1)(\xi+2)}{\xi^q(k^2+\xi)}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)\left[2-(1-k^2)\xi\right](\xi+1)}{\xi^q(k^2+\xi)}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi\right\},$$

$$\frac{\sigma_{\beta\beta}(\alpha,\beta)}{2\mu}=-\frac{P_0 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\left\{(k^2-1)\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)(\xi-1)(\xi-2)}{\xi^q(k^2+\xi)}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)\left[2-(1-k^2)\xi\right](\xi+1)}{\xi^q(k^2+\xi)}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi\right\},$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\beta)}{2\mu}=\frac{P_0 2^q(k^2-2)}{\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)(\xi-1)}{\xi^q(k^2+\xi)}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi,$$

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)}{2\mu}=\frac{P_0 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\left\{(k^2-1)\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)\xi(\xi-1)}{\xi^q(k^2+\xi)}\alpha^{-\xi}\sin(\xi\beta)\,d\xi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)\left[2-(1-k^2)\xi\right](\xi+1)}{\xi^q(k^2+\xi)}\alpha^{-\xi}\sin(\xi\beta)\,d\xi\right\}. \qquad (20)$$

Відповідно до гіпотези суцільності на краю зони навантаження $|\beta|=\beta_0$ усі характеристики напружено-деформованого стану, зокрема, компоненти $\sigma_{\alpha\alpha}(1,\beta)$ тензора напружень і $\omega_\gamma(1,\beta)$ вектора локального жорсткого повороту повинні бути неперервними згідно з фізично обґрунтованою вимогою (12). Для встановлення умов, що забезпечують таку неперервність, обчислимо радіальні напруження на контурі $\alpha=1$, де вони вироджуються в розривні інтеграли Фур'є, за формулами (16), (17):

$$\frac{\sigma_{\alpha\alpha}(1,\beta)}{2\mu}=-\frac{P_0 2^q}{\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)}{\xi^q}\cos(\xi\beta)\,d\xi=-P_0, \qquad 0\le|\beta|\le\beta_0,$$

$$\frac{\sigma_{\alpha\alpha}(1,\beta)}{2\mu}=-\frac{P_0 2^q}{\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)}{\xi^q}\cos(\xi\beta)\,d\xi=$$

$$=-P_0\frac{\sqrt{\pi}\,\beta_0^{2-2q}F\left(1-q;\frac{3}{2}-q;2-q;\frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right)}{\Gamma(2-q)\Gamma\left(q-\frac{1}{2}\right)|\beta|^{2-2q}}, \qquad |\beta|\ge\beta_0.$$

Аналіз цих формул вказує на те, що радіальні напруження мають різні аналітичні вирази в областях $0\le|\beta|\le\beta_0$ та $|\beta|\ge\beta_0$ і визначені гіпергеометричним рядом (18), який є збіжним у точках $|\beta|=\beta_0$ за умови $c-a-b>0$. Згідно з цією нерівністю та умовою існування розривних інтегралів на параметр q одержуємо таке обмеження:

$$0.5<q<1. \qquad (21)$$

За виконання нерівності (21) усі характеристики, означені поданнями (20), неперервні на межі області навантаження $|\beta|=\beta_0$ і залежать від параметра q, який будемо вважати зведеною характеристикою межового шару. За виконання умов (12) і (21) дотичні напруження у межовому шарі та радіальні напруження поза областю навантаження можна трактувати як необхідне довантаження границі циліндричної порожнини у пружному просторі для забезпечення незмінності її діаметра.

Інтеграли у виразах (20) можна обчислити числовими методами.

Числовий аналіз. За формулами (20) для значень $\beta_0 = 0.2\pi, 0.5\pi, 0.8\pi, \pi$ виконано розрахунки та побудовано графіки розподілу радіальних (рис. 2) і кільцевих (рис. 3) напружень на поверхні порожнини $\alpha = 1$ (пунктирною лінією показано напруження у граничному випадку при $\beta_0 = \pi$).

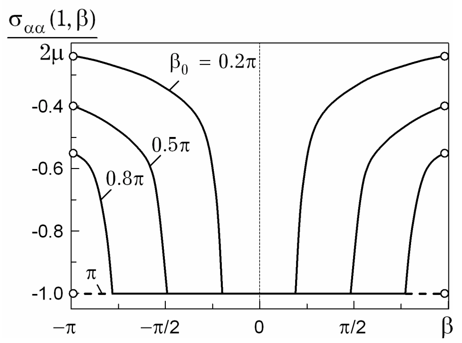

Рис. 2

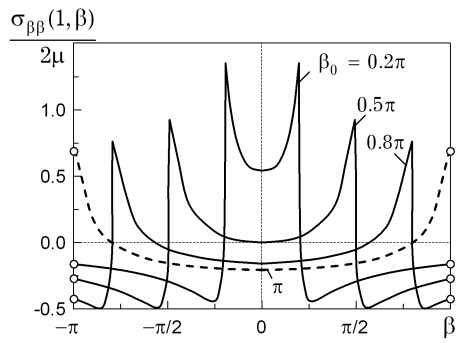

Рис. 3

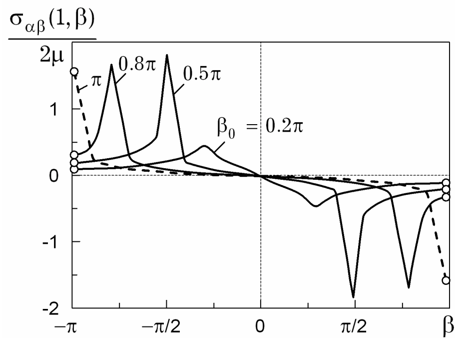

Рис. 4

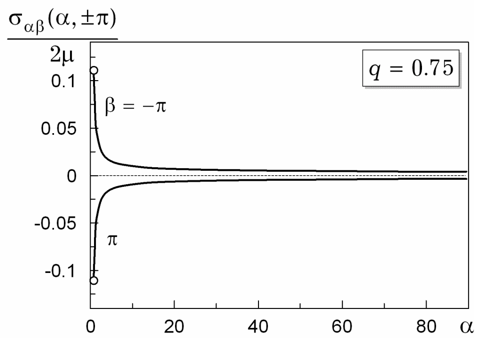

Рис. 5

На рис. 4 показано розподіл дотичних напружень у межовому шарі на поверхні циліндричної порожнини для тих самих значень β_0 (пунктирна лінія відповідає $\beta_0 = \pi$).

За існування внутрішнього межового шару дотичне напруження $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)$ стрибкоподібно змінює знак на протилежний у точках $\beta = \pm\pi$, діаметрально протилежній відносно точки симетрії навантаження $\beta = 0$, і цей стрибок відповідно до гіпотези суцільності поширюється у тілі вздовж діаметра $\beta = \pm\pi$, $\alpha > 1$, де є внутрішній реологічний шар (рис. 5). Графіки в цьому випадку побудовано при $\beta_0 = 0.2\pi$.

Усі обчислення для вищепобудованих графіків на рис. 1–5 виконано при $q = 0.75$. Досліджено також залежність напружено-деформованого стану від зведеної характеристики межового шару q. На рис. 6 побудовано графіки дотичних напружень у внутрішньому реологічному шарі ($\beta = \pm\pi$) при значеннях параметра $q = 0.6, 0.75, 0.9$.

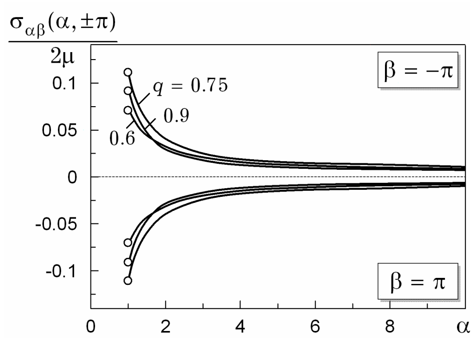

Рис. 6

Зробимо порівняльний аналіз цієї задачі із плоскою задачею теорії пружності про навантаження простору з циліндричною порожниною локалізованим радіальним зусиллям за умов існування межового шару та рівності нулеві дотичних напружень на поверхні порожнини, тобто із задачею з такими крайовими умовами:

$$\sigma_{\alpha\alpha}(1, \beta) = -2\mu P_0, \qquad 0 \le |\beta| \le \beta_0,$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(1, \beta) = 0, \qquad 0 \le |\beta| \le \pi.$$

Як і в попередній задачі, задовольнивши крайові умови, одержимо інтегральні рівняння Фредгольма першого роду:

$$2\mu\int_0^\infty \left[(k^2-1)(\xi-1)(\xi+2)G(\xi) - \xi(\xi+1)W(\xi)\right]\cos(\xi\beta)\,d\xi = -2\mu P_0,$$

$$0 \le |\beta| \le \beta_0,$$

$$\int_0^\infty \left[(k^2-1)\xi(\xi-1)G(\xi) - \xi(\xi+1)W(\xi)\right]\sin(\xi\beta)\,d\xi = 0, \qquad 0 \le |\beta| \le \pi.$$

Якщо

$$(k^2-1)\xi(\xi-1)G(\xi) = \xi(\xi+1)W(\xi), \tag{22}$$

то друге рівняння виконується тотожно, а перше після відповідних спрощень набуде вигляду

$$\int_0^\infty (k^2-1)(\xi-1)G(\xi)\cos(\xi\beta)\,d\xi = -\frac{P_0}{2}, \qquad 0 \le |\beta| \le \beta_0. \tag{23}$$

Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду (23) розв'яжемо методом розривних інтегралів Фур'є [1], відповідно з яким підінтегральну функцію подамо у вигляді узагальненого ряду Неймана

$$(k^2-1)(\xi-1)G(\xi) = \sum_{n=0}^\infty b_n \frac{J_{2n-q+1}(\beta_0\xi)}{\xi^q} \tag{24}$$

з наперед невизначеними коефіцієнтами b_n і параметром q.

Підставивши подання (24) в інтегральне рівняння (23) та помінявши порядок підсумовування та інтегрування, одержимо, що

$$\sum_{n=0}^\infty b_n \int_0^\infty \frac{J_{2n-q+1}(\beta_0\xi)\cos(\xi\beta)}{\xi^q}\,d\xi = -\frac{P_0}{2}, \qquad 0 \le |\beta| \le \beta_0.$$

Обчисливши розривний інтеграл в області $0 \le |\beta| \le \beta_0$, отримуємо алгебричне рівняння відносно коефіцієнтів b_n:

$$\sum_{n=0}^\infty b_n \frac{\Gamma(n-q+1)\beta_0^{q-1}F\left(n-q+1;-n;\frac{1}{2};\frac{\beta^2}{\beta_0^2}\right)}{2^q\,\Gamma(n+1)} = -\frac{P_0}{2}. \tag{25}$$

Оскільки гіпергеометрична функція Ґаусса $F\left(n-q+1;-n;\frac{1}{2};\frac{\beta^2}{\beta_0^2}\right)$ другим параметром має від'ємне ціле число, то вона є поліномом степеня $2n$ і в такому випадку відповідно до апроксимаційної теореми Вейєрштрасса про наближення неперервної функції на скінченному інтервалі системою поліномів розв'язок рівняння (25) є таким:

$$b_0 = -\frac{P_0 \cdot 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}, \qquad b_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тому відповідно до подання (24) і рівності (22) функції $G(\xi)$ і $W(\xi)$ у розглядуваному випадку матимуть такий вигляд:

$$G(\xi) = -\frac{P_0 2^q J_{1-q}(\beta_0\xi)}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)\xi^q(k^2-1)(\xi-1)},$$

$$\xi W(\xi) = -\frac{P_0 2^q J_{1-q}(\beta_0\xi)}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)\xi^{q-1}(\xi+1)},$$

і відповідно до інтегральних подань (3)–(9) можемо записати усі характеристики напружено-деформованого стану, зокрема:

$$u_\alpha(\alpha,\beta) = -\frac{P_0 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\left\{\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)}{\xi^{q-1}(\xi+1)}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{k^2-1}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)\left[(1-k^2)\xi-2\right]}{\xi^q(\xi-1)}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi\right\},$$

$$u_\beta(\alpha,\beta) = -\frac{P_0 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\left\{\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)}{\xi^{q-1}(\xi+1)}\alpha^{-\xi}\sin(\xi\beta)\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{k^2-1}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)\left[(1-k^2)\xi+2k^2\right]}{\xi^q(\xi-1)}\alpha^{-\xi}\sin(\xi\beta)\,d\xi\right\},$$

$$\frac{\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)}{2\mu} = -\frac{P_0 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\left\{\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)(\xi+2)}{\xi^q}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)}{\xi^{q-1}}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi\right\},$$

$$\frac{\sigma_{\beta\beta}(\alpha,\beta)}{2\mu} = \frac{P_0 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\left\{\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)(\xi-2)}{\xi^q}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)}{\xi^{q-1}}\alpha^{-\xi}\cos(\xi\beta)\,d\xi\right\},$$

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)}{2\mu} = -\frac{P_0 2^q}{2\beta_0^{q-1}\Gamma(1-q)}\left\{\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)}{\xi^{q-1}}\alpha^{-\xi}\sin(\xi\beta)\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{J_{1-q}(\beta_0\xi)}{\xi^{q-1}}\alpha^{-\xi}\sin(\xi\beta)\,d\xi\right\}.$$

На контурі $\alpha = 1$ дотичні напруження дорівнюють нулеві, а їх розподіл в масиві при $\alpha > 1$, $\beta = \pm\pi$, $q = 0.75$, $\beta_0 = 0.2\pi$ показано на рис. 7.

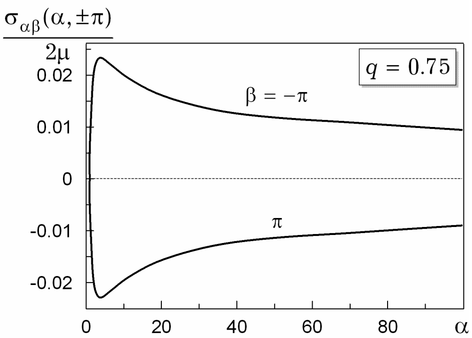

Рис. 7

Якщо порівняти ці результати із попередньою задачею (рис. 5, 6), то у випадку незмінюваності циліндричної порожнини максимум стрибка дотичних напружень є на поверхні порожнини. А у випадку рівності нулеві дотичних напружень на поверхні максимум їх стрибка є в масиві у внутрішньому реологічному шарі на певній відстані поверхні (рис. 7).

Таким чином, запропонована математична модель дозволяє розв'язати задачу про незмінюваність діаметра циліндричної порожнини при частково детермінованому навантаженні її поверхні за умов плоскої деформації. Фактично доведено таке твердження: у межах припущень фізично та геометрично лінійної моделі деформівного твердого тіла за умов плоскої деформації і частково детермінованого радіального навантаження циліндричної порожнини завжди існує закон розподілу дотичних напружень у межовому шарі на її поверхні та внутрішньому реологічному шарі, за якого радіальні переміщення поверхні є довільно заданими, зокрема, нульовими, $u_\alpha(1, \beta) = 0$. При цьому з'ясовано, що за існування поверхневого та внутрішнього межових реологічних шарів кільцева складова $u_\beta(1, \beta)$ вектора $\mathbf{u}$ стрибкоподібно змінює знак на протилежний у точці $\beta = \pm\pi$, діаметрально протилежній відносно точки симетрії навантаження $\beta = 0$, і цей стрибок відповідно до гіпотези суцільності поширюється у тілі вздовж діаметра $\beta = \pm\pi$, $\alpha > 1$, де є внутрішній реологічний шар, утворюючи поверхню розриву параметрів поля нульового порядку [4]. При цьому компонента $\omega_\gamma(\alpha, \beta)$ вектора $\mathbf{\Omega}$ і дотичне напруження $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)$ також стрибкоподібно змінюють знак під час переходу діаметра $\beta = \pm\pi$ і цей стрибок можна трактувати як механічний ефект межового шару.

1. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Некласична модель деформування тіл з тріщинами // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту. Сер. Механіка. – 2001. – **1**, вип. 4. – С. 39–49.
2. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 17–33.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
4. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.

УПРАВЛЕНИЕ ФОРМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТЕЛА С РЕОЛОГИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ

Построена неклассическая математическая модель деформирования упругого пространства с цилиндрической полостью при частично детерминированной радиальной нагрузке ее поверхности в условиях плоской деформации. При этом показано, что предположение о существовании поверхностного и прямолинейного внутреннего пограничных реологических слоев дает возможность решить задачу об управлении радиальными перемещениями поверхности полости. Найден закон распределения параметров реологических слоев, при котором эти перемещения являются произвольно заданными, в частности, нулевыми.

FORM MANAGEMENT OF CYLINDRICAL CAVITY UNDER PLANE STRAIN CONDITIONS FOR BODY WITH RHEOLOGICAL LAYERS

A non-classical mathematical model of deformation of elastic space with cylindrical cavity under partially determinate radial loading of its boundary with the plane strain conditions has been constructed. It has been cleared up, that a supposition about existence of the external and the rectilinear internal boundary layers enables to solve the problem regarding the radial displacements management of the cavity boundary. The distribution law of the rheological layers parameters, when these displacements are arbitrarily assigned, in particular, zero, has been found.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
07.03.07