

ЗАСТОСУВАННЯ LINE-SPRING MODEL ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБОЛОНКИ ДОВІЛЬНОЇ КРИВИНИ З ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ

Наведено методику дослідження напруженого стану ізотропної оболонки довільної кривини з внутрішньою тріщиною. Досліджено вплив різних геометричних параметрів (глибини й довжини тріщини, кривини оболонки) на коефіцієнти інтенсивності напружень у центральній точці внутрішньої тріщини в оболонці.

Моделюванню і дослідженню напружено-деформованого стану пластин і оболонок з внутрішніми тріщинами присвячено незначну кількість робіт. Це зумовлено складністю задачі та відсутністю простих і, водночас, досить точних методів її розв'язання.

Методом об'ємних сил були отримані коефіцієнти інтенсивності для внутрішньої еліптичної тріщини в нескінченній пластині, що знаходиться під дією розтягувального навантаження [5, 8]. У роботах [1, 2] використано аналог δ_c -моделі для розрахунку пластичних зон навколо внутрішньої тріщини в пружно-пластичній оболонці. Застосовуючи метод скінченних елементів, J. C. Newman, I. S. Raju [7] також дослідили коефіцієнти інтенсивності для внутрішньої тріщини в скінченному тілі.

Спочатку line-spring model (модель лінійних пружин) була запропонована для пружної пластини з поверхневою тріщиною [4]. Пізніше F. Erdogan і його учні поширили модель лінійних пружин на дослідження пластини з симетричною внутрішньою тріщиною [4].

У пропонованій роботі розглядаємо ізотропну оболонку довільної кривини товщини h з внутрішньою тріщиною довжини 2ℓ уздовж осі Ox . Осі координат орієнтовані вздовж ліній головних кривин серединної поверхні оболонки. Оболонка знаходиться під дією навантаження, симетричного відносно лінії тріщини.

Модель лінійних пружин базується на тому, що напруження, які виникають в прошарку суцільного матеріалу навколо фронту внутрішньої тріщини в оболонці чи пластині під дією розтягувального зусилля і згинального моменту, враховують, вводючи невідомі зусилля T і момент M . Після введення T і M тріщину можна розглядати як наскрізну і далі задачу розв'язувати у двовимірній постановці.

Для визначення T і M використовують співвідношення, яке пов'язує коефіцієнти інтенсивності напруження та енергію, що виділяється при руйнуванні [4]:

$$G = \frac{\partial}{\partial L} (U - V) = \frac{1 - \nu^2}{2E} (K_{I,A}^2 + K_{I,B}^2), \quad (1)$$

де U – робота зовнішніх навантажень; V – енергія деформації; $K_{I,A}$ і

$K_{I,B}$ – коефіцієнти інтенсивності напруження, визначені із задачі для смуги з внутрішньою поперечною тріщиною в умовах плоскої деформації (рис. 1).

Для довільної точки по фронту тріщини коефіцієнти інтенсивності напруження є такими:

$$K_{I,A} = \frac{1}{\sqrt{h}} \left(T g_{At}(s) + \frac{6M}{h} g_{Ab}(s) \right), \quad (2)$$

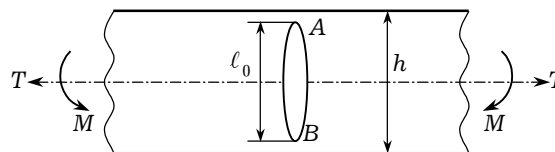


Рис. 1

$$K_{I,B} = \frac{1}{\sqrt{h}} \left(T g_{Bt}(s) + \frac{6M}{h} g_{Bb}(s) \right), \quad (3)$$

де $s = \frac{L}{h} = \frac{\ell_0}{2h} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2}$. Вигляд функцій $g_{At}(s)$, $g_{Ab}(s)$, $g_{Bt}(s)$, $g_{Bb}(s)$ отримано емпіричними методами в [6].

З іншого боку, енергію, яка пов'язана з приростом тріщини на dL , можна визначити як добуток навантаження на зміщення точок прикладання цих навантажень [4]:

$$G = \frac{1}{2} \left(T \frac{\partial \delta}{\partial L} + M \frac{\partial \theta}{\partial L} \right), \quad (4)$$

де δ – розкриття тріщини, а θ – кут повороту тріщини.

Введемо вектори $\bar{\tau} = \left\{ \begin{array}{c} T \\ \frac{6M}{h} \end{array} \right\}$ та $\bar{\omega} = \left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \frac{h\theta}{6} \end{array} \right\}$. Прирівнюючи (1) і (4), з урахуванням (2), (3) після відповідних перетворень запишемо

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial L} = \frac{1-v^2}{Eh} A \bar{\tau}, \quad (5)$$

де

$$A = \{a_{ij}\} = \left\| \begin{array}{cc} g_{At}^2 + g_{Bt}^2 & g_{At}g_{Ab} + g_{Bt}g_{Bb} \\ g_{At}g_{Ab} + g_{Bt}g_{Bb} & g_{Ab}^2 + g_{Bb}^2 \end{array} \right\|.$$

Зінтегрувавши співвідношення (5) за L , отримаємо два незалежних рівняння

$$\bar{\omega} = \frac{1-v^2}{E} \left(\frac{1}{h} \int_0^L A dL \right) \bar{\tau}. \quad (6)$$

Враховуючи, що $\delta(L(x)) = [v(x, 0)]$ і $\theta(L(x)) = [\theta_2(x, 0)]$, а також вигляд невідомих функцій

$$\psi_1 = \frac{Eh}{4\ell} \frac{d[v]}{dt}, \quad \psi_3 = \frac{Eh}{4\ell} \frac{\sqrt{3}(1-v)(3+v)}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{h}{6} \cdot \frac{d[\theta_2]}{dt} \right),$$

з системи (6) отримуємо вирази для T і M , які потім підставимо в систему рівнянь для оболонки з наскрізною тріщиною

$$\bar{\tau} = \frac{4}{1-v^2} \frac{\ell}{h} C \bar{b}, \quad C = A^{-1}, \quad \bar{b} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{-1}^x \psi_1 dx \\ \frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{3}(1-v)(3+v)} \int_{-1}^x \psi_3 dx \end{array} \right\}. \quad (7)$$

У роботі [3] отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь для оболонки довільної кривини з наскрізною тріщиною. Використаємо цю систему рівнянь, враховуючи, що на лінії тріщини діють невідомі зусилля T і момент M , які мають вигляд (7):

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sum_{j=1,3} \mathcal{K}_{1j}(t-\tau) \psi_j(t) dt - \frac{4\pi\ell}{(1-v^2)h} \left(c_{11} \int_{-1}^t \psi_1(t) dt + \right. \\ & \quad \left. + c_{12} \frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{3}(1-v)(3+v)} \int_{-1}^t \psi_3(t) dt \right) = \pi \Phi_1^*(\ell\tau), \\ & \int_{-1}^1 \sum_{j=1,3} \mathcal{K}_{3j}(t-\tau) \psi_j(t) dt - \frac{4\pi\ell}{(1-v^2)h} \left(c_{21} \frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{3}} \int_{-1}^t \psi_1(t) dt + \right. \\ & \quad \left. + c_{22} \frac{1+v}{3(3+v)} \int_{-1}^t \psi_3(t) dt \right) = \pi \Phi_3^*(\ell\tau), \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11}(x) &= \frac{1}{x} - \frac{4c^2\ell^2}{\pi} x \int_0^{\pi/2} d^2 \cos^3 \theta \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)\theta \operatorname{Im} G(\ell c|x||d|\sqrt{i}) d\theta, \\ \mathcal{K}_{13}(x) &= \frac{\mathcal{K}_{31}(x)}{(1-\nu)(3+\nu)}, \\ \mathcal{K}_{31}(x) &= \\ &= \frac{4c^2\ell^2}{\pi} x \int_0^{\pi/2} d^2 \cos \theta (v \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)\theta \operatorname{Re} G(\ell c|x||d|\sqrt{i}) d\theta, \\ \mathcal{K}_{33}(x) &= \frac{1}{x} + \\ &+ \frac{4c^2\ell^2 x}{\pi(1-\nu)(3+\nu)} \int_0^{\pi/2} \frac{(v \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2}{\cos \theta} d^2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)\theta \operatorname{Im} G(\ell c|x||d|\sqrt{i}) d\theta, \\ \Phi_1^* &= T_2(\ell\tau) - T_2^*(\ell\tau), & \Phi_3^* &= c^2 R_2 (M_2(\ell\tau) - M_2^*(\ell\tau)), \\ c^2 &= \sqrt{12(1-\nu^2)}/(R_2 h), & d^2 &= \cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $\lambda = R_2/R_1$; R_1, R_2 – радіуси головних кривин серединної поверхні оболонки.

Отриману систему сингулярних інтегральних рівнянь розв'язуємо методом механічних квадратур, за допомогою якого система (8) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для прикладу розглянуто симетричну внутрішню тріщину в оболонці. З огляду на симетричність задачі $g_{At}(s) = g_{Bt}(s)$, $g_{Ab}(s) = -g_{Bb}(s)$. Ці функції мають вигляд [4]

$$\begin{aligned} g_{At}(s) &= \sqrt{\pi s} (0.7071 + 0.4325s^2 - 0.1091s^4 + 7.3711s^6 - 57.7894s^8 + \\ &+ 271.1551s^{10} - 744.4204s^{12} + 1183.9529s^{14} - \\ &- 1001.4920s^{16} + 347.9786s^{18}), \\ g_{Ab}(s) &= \sqrt{\pi s} (0.1013 - 2.7775s + 90.3734s^2 - 862.4307s^3 + \\ &+ 4843.4692s^4 - 17069.1142s^5 + 38813.4897s^6 - \\ &- 56865.3055s^7 + 51832.6941s^8 - 26731.2995s^9 + \\ &+ 5959.4888s^{10}). \end{aligned}$$

Тоді матриця (5) набуде вигляду $A = \begin{vmatrix} 2g_{At}^2 & 0 \\ 0 & 2g_{Ab}^2 \end{vmatrix}$.

На рис. 2 зображено залежність $K(\ell_0)/K_0$ від параметра ℓ/ℓ_0 для пластини при розтягувальному зусиллі ($T_2^* = \text{const}$, $M_2^* = 0$). При цьому $K_0 = T_2^*/(h\sqrt{\pi\ell_0/2})$. Суцільною лінією зображено результат розв'язання системи (8), а штриховою – результат, наведений у роботі [4]. Розбіжність у результатах пояснюється використанням різних теорій: у цій роботі застосовується класична теорія, а в роботі [4] – моментна. Похибка не перевищує 3% (внутрішній рисунок).

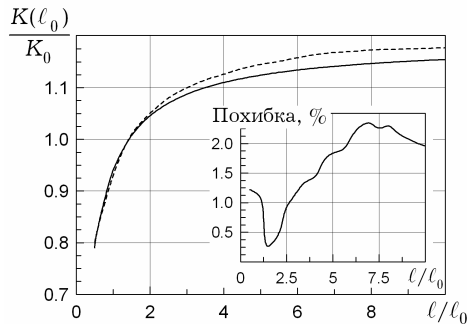


Рис. 2

На рис. 3, 4 наведено залежність $K(\ell_0)/K_0$ від відношення півдовжини тріщини до товщини оболонки при $T_2^* = \text{const}$, $M_2^* = 0$ (рис. 3) і при $T_2^* = 0$, $M_2^* = \text{const}$ (рис. 4) для сферичної оболонки. При цьому для розрахунку кривих на рис. 4 приймали $K_0 = 6M_2^*/(h^2\sqrt{\pi\ell_0/2})$. Криві відповідають глибинам тріщин $\ell_0/h = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$. У всіх розрахунках вважали, що $R_2/h = 100$.

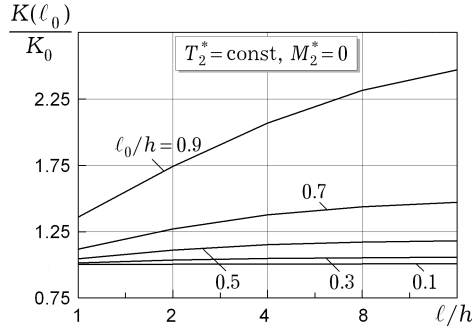


Рис. 3

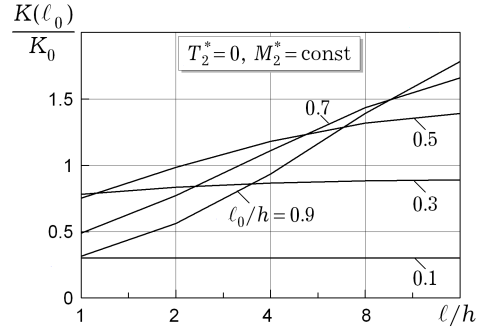


Рис. 4

На рис. 5 зображено залежність коефіцієнта інтенсивності від глибини тріщини ℓ_0/h при згинальному (крива 1) і розтягувальному (крива 2) навантаженні в сферичній оболонці. При цьому $\ell/h = 8$.

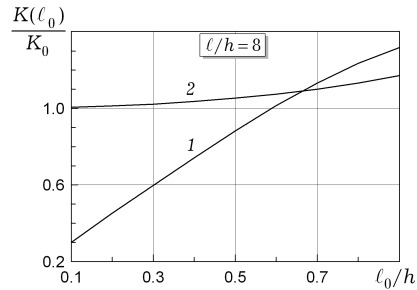


Рис. 5

Наведено також результати розрахунків $K(\ell_0)/K_0$ для оболонок різної кривини (параметр $\lambda = R_2/R_1$) при $\ell_0/h = 0.5$ і різних значеннях відносної довжини тріщини $\ell/h = 4, 8, 16$ при $T_2^* = \text{const}$, $M_2^* = 0$ (рис. 6) і $T_2^* = 0$, $M_2^* = \text{const}$ (рис. 7).

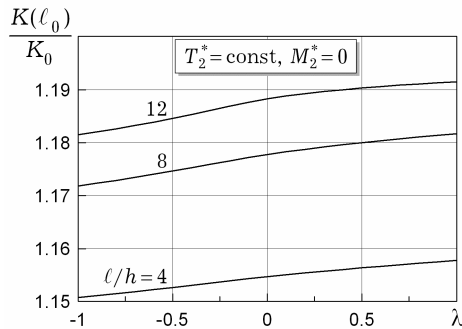


Рис. 6

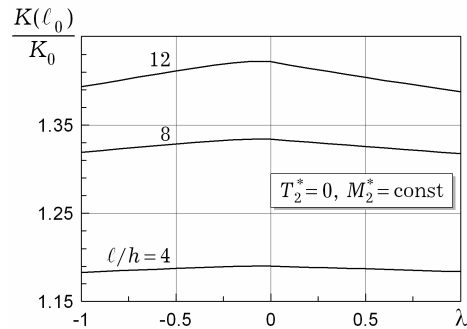


Рис. 7

Таким чином, з отриманих результатів можна зробити наступні висновки:

- зі збільшенням довжини тріщини коефіцієнт інтенсивності зростає при обох випадках навантаження;
- вплив кривини оболонки на коефіцієнт інтенсивності для розглянутих параметрів незначний. Найбільше значення досягається при розтяганні для сферичної і при згині для циліндричної оболонок.

1. Довбня К. М., Корохіна О. А. Напружений стан пружно-пластичної оболонки, послабленої внутрішньою тріщиною // *Машинознавство*. – 2005. – № 3. – С. 8–11.
2. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛЮМ, 2003. – 318 с.
3. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А. Ортоотропные оболочки с трещинами (разрезами) // *Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений*. – Киев: А. С. К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7). – С. 212–249.
4. Эрдоган Ф. Модель в виде линейных пружин // *Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Алтури*. – С. 243–265. – Москва: Мир, 1990. – 391 с.
5. Isida M., Noguchi H. Tension of a plate containing an embedded elliptical crack // *Engng. Fract. Mech.* – 1984. – **20**, No. 3. – P. 387–408.
6. Kaya A. C., Erdogan F. Stress intensity factors and COD in an orthotropic strip // *Int. J. Fract.* – 1980. – **16**. – P. 171–190.
7. Newman J. C., Raju I. S. Stress intensity factor equations for crack in three-dimensional finite bodies // *ASTM STP791*, 1983. – P. 238–256.
8. Nisitani H., Murakami Y. Stress intensity factors of an elliptical crack or a semi-elliptical crack subjected to tension // *Int. J. Fract.* – 1974. – **10**, No. 3. – P. 353–368.

ПРИМЕНЕНИЕ LINE-SPRING MODEL К ИССЛЕДОВАНИЮ ОБОЛОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ

Приведена методика исследования напряженного состояния изотропной оболочки произвольной кривизны с внутренней трещиной. Исследовано влияние различных геометрических параметров (глубины и длины трещины, кривизны оболочки) на коэффициенты интенсивности напряжений в центральной точке внутренней трещины в оболочке.

APPLICATION OF LINE-SPRING MODEL TO INVESTIGATION OF SHELL OF ARBITRARY CURVATURE CONTAINING INTERNAL CRACK

The method of studying the stress state of isotropic shell of arbitrary curvature with internal crack is proposed. Influence of different geometric parameters (depth and crack length, curvature of the shell) on the stress intensity factors at the central point of internal crack in the shell is investigated.

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано
27.03.07