УДК 539.3

А. В. Ясінський

ОБЕРНЕНА ОСЕСИМЕТИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ ЗА НЕПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ТЕПЛОВЕ НАВАНТАЖЕННЯ

Для осесиметрично деформованого півпростору сформульовано та розв'язано задачу ідентифікації потужності внутрішніх теплових джерел, розміщених у площині, паралельній до граничної поверхні, його теплового та термонапруженого станів за температурою і радіальними переміщеннями граничної поверхні. Досліджено обернену задачу термопружності, до якої зведено вихідну задачу. З використанням розв'язку прямої задачі термопружності проведено числову апробацію методики розв'язання задачі ідентифікації.

Одновимірні обернені задачі термопружності, до яких зводяться задачі ідентифікації теплового та термонапруженого станів пружних тіл за неповної інформації про теплове навантаження, розглянуто в працях [6, 7, 10–12, 14]. У статтях [6, 11, 12] в межах квазістатичної і динамічної задач термопружності побудовано розв'язки обернених задач для товстого шару. У працях [7, 10, 14] в межах квазістатичної зв'язаної та незв'язаної задач термопружності досліджено обернені задачі для довгого циліндра. Двовимірні осесиметричні обернені задачі термопружності для тонкої круглої пластинки розглянуто в працях [5, 13]. Зазначимо, що згадані вище задачі ідентифікації виникають під час діагностики теплового та термонапруженого станів деталей працюючого теплоенергообладнання, коли вимірювання параметрів теплового процесу можливе лише на частині граничної поверхні деталі [8, 9].

У цій статті на основі методики, запропонованої у роботах [5–7], досліджено двовимірну осесиметричну обернену задачу термопружності, до якої зводиться задача ідентифікації потужності внутрішніх теплових джерел у півпросторі, його теплового та термонапруженого станів, коли додатково відома поведінка радіальних переміщень граничної поверхні.

1. Постановка задачі. Розглянемо вільний від силового навантаженя однорідний ізотропний півпростір, віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z. Нехай нагрівання півпростору здійснюється розміщеними у площині $z = z_0$, $z_0 = \mathrm{const}$, внутрішніми джерелами тепла, потужність яких задається функцією $u_*(r, \tau_*)$, де τ_* – час. Вважаємо, що відома температура $t(r, \tau_*)$ граничної поверхні $z = 0$ і в початковий момент часу температура півпростору є нульовою.

Тоді нестаціонарне осесиметричне температурне поле півпростору є розв'язком такої крайової задачі:

$$\Delta T(\rho, x, \tau) = \frac{\partial T(\rho, x, \tau)}{\partial \tau} - u(\rho, \tau)\delta(x - x_0), \quad \rho \in [0, \infty), \quad \tau \in (0, \tau_m], \tag{1}$$

$$T(\rho, 0, \tau) = t(\rho, \tau), \qquad \lim_{\substack{\rho \to \infty \\ x \to \infty}} T(\rho, x, \tau) = 0, \tag{2}$$

$$T(\rho, x, 0) = 0, \tag{3}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{\partial}{\partial x^2}$ – оператор Лапласа; $\rho = r/R$, $x = z/R$ – безрозмірні циліндричні координати; $\tau = a\tau_*/R^2$ – критерій Фур'є; a – коефіцієнт температуропровідності; R – деякий характерний розмір тіла; $u(\rho, \tau) = u_*(\rho, \tau)R^2/\lambda$ – відносна потужність внутрішніх теплових джерел; λ – ко-

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. – 50, № 4. – С. 124-129.

ефіцієнт теплопровідності; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака; $\tau_m = \mathrm{const}$. Вважаємо, що в початковий момент часу $t(\rho,0)=0$, $u(\rho,0)=0$.

Задачу термопружності, яка відповідає температурному полю $T(\rho,x,\tau)$, опишемо такою системою диференціальних рівнянь [2, 4]:

$$\Delta u_r - \frac{u_r}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha_T R \frac{\partial T}{\partial \rho} = 0,$$

$$\Delta u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha_T R \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

за умов

$$\sigma_{zz}\big|_{x=0} = \sigma_{rz}\big|_{x=0} = 0, \qquad (5)$$

де $e = \dfrac{\partial u_r}{\partial \rho} + \dfrac{u_r}{\rho} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}$; u_r, u_z – компоненти вектора переміщень; σ_{zz}, σ_{rz} – компоненти тензора напружень; ν – коефіцієнт Пуассона; α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Задача (1)–(5) за відомих функцій і коефіцієнтів, які входять у рівняння і крайові умови, називається прямою задачею термопружності. Методи розв'язання осесиметричних задач термопружності наведені у працях [2, 4].

Сформулюємо таку задачу ідентифікації, яка відповідає задачі (1)–(5). Припустимо, що потужність внутрішніх теплових джерел невідома, тобто невідома функція $u(\rho,\tau)$, $\rho\in[0,\infty)$, $\tau\in[0,\tau_m]$. Потрібно визначити цю функцію, температурне поле півпростору, а також його термонапружений стан, якщо додатково відома поведінка радіальних переміщень граничної поверхні $x=0$, тобто

$$u_r(\rho,0,\tau) = \psi_*(\rho,\tau), \qquad \rho\in[0,\infty), \qquad \tau\in[0,\tau_m], \qquad (6)$$

де $\psi_*(\rho,\tau)$ – задана функція.

2. Побудова розв'язку задачі. Використавши відомі методи [2, 4] інтегрування диференціальних рівнянь задачі (4), (5), радіальні та вертикальні переміщення півпростору подамо у вигляді

$$u_r(\rho,x,\tau) = \frac{(1+\nu)\alpha_T R}{2(1-\nu)}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty s\xi T(\xi,\eta,\tau)\big[(3-4\nu-2sx)\exp(-s(x+\eta)) +$$
$$+\exp(-s|x-\eta|)\big]J_0(s\xi)J_1(s\rho)\,ds\,d\xi\,d\eta,$$

$$u_z(\rho,x,\tau) = \frac{(1+\nu)\alpha_T R}{2(1-\nu)}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty s\xi T(\xi,\eta,\tau)\big[\exp(-s|x-\eta|)\,\mathrm{sgn}\,(x-\eta) -$$
$$-(3-4\nu+2sx)\exp(-s(x+\eta))\big]J_0(s\xi)J_0(s\rho)\,ds\,d\xi\,d\eta, \qquad (7)$$

де $J_\ell(\rho)$ – функції Бесселя першого роду порядку ℓ, $\ell = 0,1$. Припустимо що функція $u(\rho,\tau)$ відома. Тоді, скориставшись інтегральними перетвореннями Ганкеля і Лапласа [3], розв'язок задачі теплопровідності (1)–(3) запишемо як

$$T(\rho,x,\tau) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\tau\left(\frac{dt(v,\tau-\zeta)}{d\tau} + \xi^2 t(v,\tau-\zeta)\right)G_1(\rho,x,v,\xi,\zeta)\,d\zeta\,dv\,d\xi +$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\tau u(v,\tau-\zeta)\,G_2(\rho,x,v,\xi,\zeta)\,d\zeta\,dv\,d\xi, \qquad (8)$$

де

$$G_1(\rho, x, v, \xi, \zeta) = v\xi J_0(\xi v) J_0(\xi\rho) \exp(-\xi^2\zeta)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\zeta}}\right),$$

$$G_2(\rho, x, v, \xi, \zeta) = v\xi J_0(\xi v) J_0(\xi\rho) \frac{\exp(-\xi^2\zeta)}{2\sqrt{\pi\zeta}}\left[\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\zeta}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{4\zeta}\right)\right],$$

$\mathrm{erfc}(x)$ – інтеграл ймовірностей [3].

Підставивши температурне поле (8) у вираз для радіальних переміщень (7) і використавши умову (6), отримаємо інтегральне рівняння першого роду на шукану функцію $u(\rho, \tau)$:

$$\int_0^\infty \int_0^\tau \mathcal{K}_1(\rho, v, \zeta) u(v, \tau - \zeta)\, d\zeta\, dv = \psi(\rho, \tau) -$$

$$- \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\tau \mathcal{K}_2(\rho, v, \xi, \zeta)\left(\frac{dt(v, \tau-\zeta)}{d\tau} + \xi^2 t(v, \tau-\zeta)\right) d\zeta\, d\xi\, dv\,, \qquad (9)$$

де

$$\mathcal{K}_1(\rho, v, \zeta) = \frac{v}{2}\int_0^\infty \xi\left(\exp(-\xi x_0)\,\mathrm{erfc}\left(\xi\sqrt{\zeta} - \frac{x_0}{2\sqrt{\zeta}}\right) - \right.$$

$$\left. - \exp(\xi x_0)\,\mathrm{erfc}\left(\xi\sqrt{\zeta} + \frac{x_0}{2\sqrt{\zeta}}\right)\right) J_0(\xi v) J_1(\xi\rho)\, d\xi\,,$$

$$\mathcal{K}_2(\rho, v, \xi, \zeta) = v\left[\exp(-\xi^2\zeta) - \mathrm{erfc}(\xi\sqrt{\zeta})\right] J_0(\xi v) J_1(\xi\rho)\,,$$

$$\psi(\rho, \tau) = \frac{\psi_*(\rho, \tau)}{2(1+\nu)\alpha_T R}\,.$$

Отже, задача ідентифікації зведена до оберненої задачі термопружності, яка описується рівнянням (9) і в якій за відомою поведінкою радіальних переміщень граничної поверхні півпростору потрібно визначити потужність внутрішніх теплових джерел, розміщених у площині, паралельній до граничної поверхні.

Якщо в рівнянні (9) покласти $\tau = 0$, то отримаємо умову на розподіл радіальних переміщень граничної поверхні півпростору в початковий момент часу $\psi(\rho, 0) = 0$, виконання якої забезпечує неперервність розв'язку цього рівняння.

Перейдемо до розв'язання рівняння (9). Застосувавши до нього за координатою ρ інтегральне перетворення Ганкеля з ядром $J_1(s\rho)$, отримаємо

$$\int_0^\tau \mathcal{L}(s, \tau-\zeta) u_H(s, \zeta)\, d\zeta = \Phi(s, \tau)\,, \qquad (10)$$

де

$$\mathcal{L}(s, \zeta) = \frac{1}{2}\left(\exp(-s x_0)\,\mathrm{erfc}\left(s\sqrt{\zeta} - \frac{x_0}{2\sqrt{\zeta}}\right) - \exp(s x_0)\,\mathrm{erfc}\left(s\sqrt{\zeta} + \frac{x_0}{2\sqrt{\zeta}}\right)\right),$$

$$\Phi(s, \tau) = \psi_{H_1}(s, \tau) -$$

$$- \int_0^\tau \left(\frac{dt_H(s, \tau-\zeta)}{d\tau} + s^2 t_H(s, \tau-\zeta)\right)\frac{1}{s}\left[\exp(-s^2\zeta) - \mathrm{erfc}(s\sqrt{\zeta})\right] d\zeta\,,$$

$$u_H(s, \zeta) = \int_0^\infty \rho u(\rho, \zeta) J_0(s\rho)\, d\rho, \qquad \psi_{H_1}(s, \tau) = \int_0^\infty \rho\psi(\rho, \tau) J_1(s\rho)\, d\rho\,.$$

Рівняння (10) є інтегральним рівнянням Вольтерра першого роду типу згортки за змінною τ на функцію $u_H(s,\tau)$. Використовуючи диференціювання за змінною τ, рівняння (10) можна звести до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, з чого випливає коректність цієї задачі.

Побудуємо наближений розв'язок рівняння (10). Для цього розіб'ємо часовий інтервал $[0,\tau_m]$ на m інтервалів довжини $h=\tau_m/m$ і замінимо на кожному з них функцію $u_H(s,\tau)$ за змінною τ лінійним сплайном [1]

$$S_j^{(1)}(s,\tau)=u_H^{(j-1)}(s)\frac{\tau_j-\tau}{h}+u_H^{(j)}(s)\frac{\tau-\tau_{j-1}}{h}, \qquad (s,\tau)\in[0,\infty)\times\left[\tau_{j-1},\tau_j\right],$$

де $\tau_j=hj$, $u_H^{(j)}(s)=u_H(s,\tau_j)$. Внаслідок цього отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$u_H^{(1)}(s)=\frac{\Phi_1(s)}{hb_{11}},$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}u_H^{(j)}(s)\left[\tau_{j+1}a_{k\,j+1}(s)-\tau_{j-1}a_{kj}(s)+hb_{kj}(s)-hb_{k\,j+1}(s)\right]+$$

$$+u_H^{(k)}(s)\left[hb_{kk}(s)-\tau_{k-1}a_{kk}(s)\right]=\Phi_k(s), \qquad k=2,\ldots,m, \qquad (11)$$

яка апроксимує інтегральне рівняння (10). Тут

$$\Phi_k(s)=\Phi(s,\tau_k),$$

$$a_{kj}(s)=\frac{1}{2}\int\limits_{j-1}^{j}\left[\exp(-sx_0)\operatorname{erfc}\left(s\sqrt{h}\sqrt{k-\xi}-\frac{x_0}{2\sqrt{h}\sqrt{k-\xi}}\right)-\right.$$

$$\left.-\exp(sx_0)\operatorname{erfc}\left(s\sqrt{h}\sqrt{k-\xi}+\frac{x_0}{2\sqrt{h}\sqrt{k-\xi}}\right)\right]d\xi,$$

$$b_{kj}(s)=\frac{1}{2}\int\limits_{j-1}^{j}\xi\left[\exp(-sx_0)\operatorname{erfc}\left(s\sqrt{h}\sqrt{k-\xi}-\frac{x_0}{2\sqrt{h}\sqrt{k-\xi}}\right)-\right.$$

$$\left.-\exp(sx_0)\operatorname{erfc}\left(s\sqrt{h}\sqrt{k-\xi}+\frac{x_0}{2\sqrt{h}\sqrt{k-\xi}}\right)\right]d\xi.$$

Вигляд системи (11) дає змогу безпосередньо записати рекурентну формулу для визначення невідомих $u_H^{(j)}(s)$, $1\le j\le m$.

Знаючи $u_H^{(j)}(s)$, $1\le j\le m$, за формулою обернення для інтегрального перетворення Ганкеля [3]

$$u^{(j)}(\rho)=\int\limits_0^\infty su_H^{(j)}(s)J_0(s\rho)\,ds$$

чисельно знаходимо шукану функцію. Тут $u^{(j)}(\rho)=u(\rho,\tau_j)$, $1\le j\le m$.

Визначивши потужність теплових джерел, за формулою (8) знаходимо температурне поле півпростору. Термонапружений стан півпростору, який відповідає знайденому температурному полю, знаходимо на основі залежностей (7) і основних співвідношень термопружності [2, 4].

3. Числова апробація методики. З метою апробації запропонованої методики розв'язання сформульованої задачі розглянемо пряму задачу термопружності для півпростору за умов

$$t(\rho,\tau)=0, \qquad u(\rho,\tau)=Q\exp\left(-\beta\rho^2\right)\left(1-\exp(-\alpha\tau)\right),$$

де $\alpha,\beta,Q=\mathrm{const}$, і визначимо радіальні переміщення граничної поверхні. Використаємо знайдені переміщення як задані в оберненій задачі та знайдемо відносну потужність внутрішніх теплових джерел як розв'язок оберненої задачі $u^{(j)}(\rho)$, $1 \le j \le m$. Порівнюючи $u^{(j)}(\rho)$, $1 \le j \le m$, із заданою у прямій задачі функцією $u(\rho,\tau)$, оцінимо величину відхилення $u^{(j)}(\rho)$, $1 \le j \le m$, від $u(\rho,\tau)$.

Розподіл відносних радіальних переміщень граничної поверхні півпростору $\psi(\rho,\tau)$ за радіальною координатою ρ, визначених з прямої задачі термопружності при $\alpha = 2.0$, $\beta = 2.0$, $Q = 1.0$, $x_0 = 0.5$, $\tau_m = 1.5$ для моментів часу $\tau = 0.5, 0.8, 1.5$ зображено на рис. 1. Поведінку в часі розв'язку оберненої задачі термопружності відповідно в точках $\rho = 0.5, 0.7, 1.0$ при апроксимації функції $\psi(\rho,\tau)$ кубічним сплайном двох змінних [1] з відносною похибкою $5.0 \cdot 10^{-3}$ і розрахунковому кроці $h = 0.01$ наведено на рис. 2. Кружечки на цих кривих позначають поведінку за часом функції $u(\rho,\tau)$ при відповідних значеннях координати ρ. Рис. 3 ілюструє поведінку розв'язку оберненої задачі за радіальною координатою у моменти часу $\tau = 0.3, 0.6, 1.5$ при вказаній вище апроксимації радіальних переміщень. Кружечки на цих кривих позначають поведінку за радіальною координатою функції $u(\rho,\tau)$ у відповідні моменти часу.

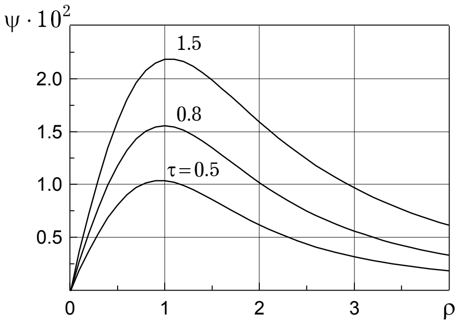

Рис. 1

Рис. 2

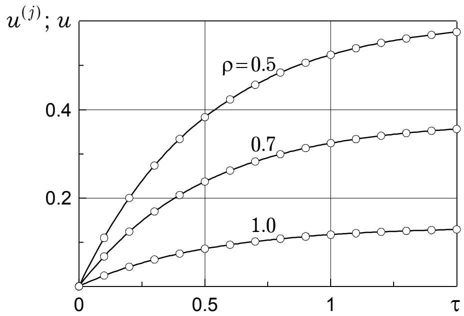

Рис. 2

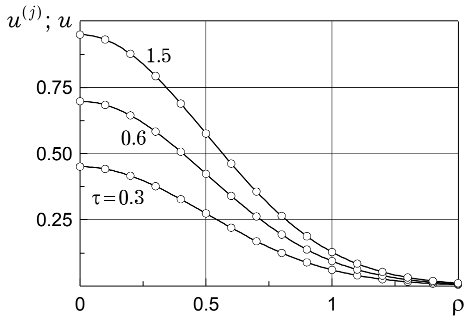

Рис. 3

Проведені дослідження показали, що для розглядуваного випадку справджуються нерівності

$$\frac{\left|u(\rho,\tau_j) - u^{(j)}(\rho)\right|}{\left|u^{(j)}(\rho)\right|} \le 1.17 \cdot 10^{-2}, \qquad \rho \in [0,\infty), \qquad 1 \le j \le 150 .$$

Це підтверджує стійкість розв'язку оберненої задачі до малих похибок вхідних даних і свідчить про задовільну точність, з якою знайдено цей розв'язок.

Рис. 3

Висновок. Для осесиметрично деформованого півпростору ідентифікацію невідомої потужності внутрішніх теплових джерел, розміщених у площині, паралельній до граничної поверхні, його теплового і термонапруженого станів здійснено опосередковано через температуру та радіальні переміщення граничної поверхні. Показано, що сформульовану задачу ідентифікації можна звести до оберненої задачі термопружності. На основі розв'язку прямої задачі термопружності проведено числову апробацію методики розв'язання задачі ідентифікації.

1. *Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А.* Сплайны в инженерной геометрии. – Москва: Машиностроение, 1985. – 224 с.
2. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1973. – 736 с.
4. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
5. *Ясинский А. В., Шипка Р. И.* Определение осесимметричного температурного поля и термонапряженного состояния круглой пластинки по прогибу // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 8. – С. 118–124.
6. *Ясінський А. В.* Ідентифікація теплового навантаження і термонапруженого стану шару за поверхневими деформаціями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 1. – С. 155–162.
7. *Ясінський А.* Обернена задача визначення теплового навантаження та термонапруженого стану циліндричних тіл за поверхневими переміщеннями // Машинознавство. – 2003. – № 11. – С. 18-22.
8. *Alifanov O. M.* Inverse heat transfer problems. – Berlin: Springer, 1994. – 348 p.
9. *Beck J. V., Blackwell B., Clair C. R. St.* Inverse heat conduction: Ill-posed problems. – New York: Wiley-Intersci. Publ., 1985. – 308 p.
10. *Blanc G., Raynaud M.* Solution of the inverse heat conduction problem from thermal strain measurements // ASME J. Heat Transfer. – 1996. – **118**. – P. 842–849.
11. *Chen H. T., Wu X. Y., Hsiao Y. S.* Estimation of surface condition from the theory of dynamic thermal stresses // Int. J. Therm. Sci. – 2004. – **43**. – P. 95–104.
12. *Grysa K., Cialkowski M., Kaminski H.* An inverse temperature field problem of the theory of thermal stresses // Nuclear Eng. and Design. – 1981. – **64**. – P. 169–184.
13. *Khobragade N. L., Deshmukh K. C.* An inverse quasi-static thermal deflection problem for a thin clamped circular plate // J. Therm. Stresses. – 2005. – **28**. – P. 353–361.
14. *Lee H. L., Yang Y. C.* Inverse problem of coupled thermoelasticity for prediction of heat flux and thermal stresses in an annular cylinder // Int. Comm. Heat Mass Transfer. – 2001. – **28**, No. 5. – P. 661–670.

ОБРАТНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКЕ

Для осесимметрично деформируемого полупространства сформулирована и решена задача идентификации мощности внутренних тепловых источников, расположенных в плоскости, параллельной граничной поверхности, его теплового и термонапряженного состояний по температуре и радиальным перемещениям граничной поверхности. Исследована обратная задача термоупругости, к которой сведена исходная задача. С использованием решения прямой задачи термоупругости для полупространства проведена численная апробация методики решения задачи идентификации.

INVERSE AXIALLY SYMMETRIC THERMOELASTICITY PROBLEM FOR HALF-SPACE WITH INCOMPLETE INFORMATION ABOUT THERMAL LOADING

The problem on power identification of internal heat sources in the axially symmetric deformed half-space is formulated and solved. The heat sources are distributed in the plane parallel to the boundary surface. The heat sources, thermal and thermal stressed states of the half-space have been also determined using the known temperature and radial displacements on the boundary surface. The problem is reduced to the inverse thermoelasticity problem. The method of solution of the inverse problem is numetically verified by using the solution of the direct thermoelasticity problem.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.03.07