

ОДНОВИМІРНІ ЗАДАЧІ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ОРТОТРОПНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ

Розвинуто метод безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги й сумісності в напруженнях одновимірних задач пружності та термопружності для випадку неоднорідних ортотропних порожнистих циліндрів. Вихідні задачі зведено до інтегральних рівнянь, які розв'язуються методом послідовних наближень. Проаналізовано вплив ступеня анізотропії і початкового наближення на швидкість збіжності ітераційного методу розрахунку.

1. Вступ. Жорсткі умови експлуатації елементів конструкцій сучасної техніки та високі вимоги до надійності їх роботи викликають необхідність максимально точного врахування реальних властивостей матеріалів. Зокрема, суттєвим є вплив властивостей анізотропії і неоднорідності, які можуть бути наслідком специфічних особливостей технологічного процесу виготовлення та високих рівнів і градієнтів температурних і фізичних полів. Тому дослідження напруженого стану конструкцій з неоднорідними та анізотропними властивостями є актуальною проблемою.

Аналітичні розв'язки статичних задач пружності для неоднорідних анізотропних циліндричних тіл з деякими заданими законами зміни пружних характеристик отримано в [11–16, 19, 21, 22, 25], термопружності – в [23]. Аналітико-числові підходи до розв'язування таких задач для анізотропних циліндрів з довільною неоднорідністю пружних властивостей викладено в [1, 2, 8], для температурно-залежних властивостей – в [7, 20, 24]. Для радіально неоднорідних анізотропних циліндрів у роботі [18] наведено підхід, який базується на розв'язуванні системи рівнянь для переміщень і функцій напружень.

Метод, запропонований в [5, 6, 9] для випадку ізотропних циліндричних тіл, що ґрунтується на прямому інтегруванні диференціальних рівнянь рівноваги та сумісності в напруженнях, дозволяє звести вихідну задачу пружності чи термопружності для неоднорідного тіла до системи інтегральних рівнянь, яка ефективно розв'язується ітераційним методом [3, 9, 17].

Слід зазначити, що перевагою такого підходу є можливість отримати розв'язки задач у вигляді функціональних залежностей від факторів навантаження, що є зручним при розв'язуванні задач оптимізації та обернених задач термомеханіки [4, 5].

У пропонованій роботі цей підхід узагальнюється на випадок ортотропного тіла. Ефективність підходу проілюстровано на прикладі розв'язування тестової задачі Ляме для порожнистого ортотропного циліндра з коефіцієнтами деформації, які змінюються за степеневою залежністю уздовж радіальної координати. При цьому проаналізовано вплив початкового наближення на швидкість збіжності ітераційного процесу розв'язування інтегральних рівнянь.

2. Постановка задачі. Розглянемо довгий порожнистий круговий циліндр ($R_1 \leq r \leq R_2$) у циліндричних координатах (r, θ, z) . Вважатимемо, що циліндр є ортотропний і неперервно неоднорідний за радіальною координатою. За умови осесиметричної плоскої деформації зсувні деформації і напруження відсутні, два з трьох рівнянь рівноваги тотожно задовольняються, а третє за наявності масових сил F_* має такий вигляд:

$$\rho \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = -\rho F, \quad \rho \in (k, 1). \quad (1)$$

Тут $\rho = r/R_2$, $k = R_1/R_2$; σ_r та σ_θ – радіальна та колова компоненти нормальних напружень у циліндрі; $F = R_2 F_*$.

Фізичні співвідношення термопружності мають такий вигляд (вважаємо заданою зміну температури $t(\rho)$):

$$\begin{aligned} e_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z + \alpha_r t, \\ e_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\theta + a_{23}\sigma_z + \alpha_\theta t, \\ e_z &= a_{13}\sigma_r + a_{23}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_z + \alpha_z t, \end{aligned} \quad (2)$$

де σ_z – осьові напруження; e_ℓ – діагональні компоненти тензора деформацій; α_ℓ – коефіцієнти температурного розширення ($\ell = r, \theta, z$); a_{ij} – коефіцієнти деформації, які можуть бути записані через інженерні сталі так:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_r}, & a_{22} &= \frac{1}{E_\theta}, & a_{33} &= \frac{1}{E_z}, \\ a_{12} &= -\frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta}, & a_{13} &= -\frac{\nu_{rz}}{E_z}, & a_{23} &= -\frac{\nu_{\theta z}}{E_z}, \end{aligned}$$

де E_z , E_r та E_θ – модулі Юнга вздовж осьового, радіального та колового напрямків відповідно; ν_{ij} – коефіцієнт Пуассона, що характеризує стискання у напрямку i -ої координати при розтягуванні в напрямку j -ої координати.

Рівняння сумісності є

$$\rho \frac{de_\theta}{d\rho} - e_r + e_\theta = 0. \quad (3)$$

Припускаємо, що на внутрішній поверхні $\rho = k$ і на зовнішній $\rho = 1$ задані рівномірно розподілені нормальні напруження:

$$\sigma_r(k) = -p_1, \quad \sigma_r(1) = -p_2. \quad (4)$$

Будемо розглядати два випадки плоско-деформованого стану:

(i) задані зусилля на кінцях циліндра

$$\int_k^1 \rho \sigma_z d\rho = p, \quad (5_1)$$

(ii) кінці циліндра фіксовані від осьових переміщень

$$e_z \equiv 0. \quad (5_2)$$

3. Зведення до системи інтегральних рівнянь. Використовуючи підхід, запропонований у [5, 6, 9], зведемо вихідну систему рівнянь до системи інтегральних рівнянь для радіальної компоненти тензора напружень σ_r і нової ключової функції – сумарного напруження σ :

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta. \quad (6)$$

Використовуючи співвідношення (2) і рівняння (1), подамо рівняння сумісності (3) в напруженнях σ і σ_r :

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\beta_1 \sigma + \frac{a_{23}}{a_{33}} e_z + \chi_1 t \right) = \sigma_r \left(\beta_3 + \rho \frac{d\beta_2}{d\rho} \right) + \beta_4 e_z + \chi_2 t - \rho \beta_2 F, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a_{22} - \frac{a_{23}^2}{a_{33}}, & \beta_2 &= a_{22} - a_{12} + \frac{a_{23}(a_{13} - a_{23})}{a_{33}}, & \beta_3 &= a_{11} - a_{22} - \frac{a_{13}^2 - a_{23}^2}{a_{33}}, \\ \beta_4 &= \frac{a_{13} - a_{23}}{a_{33}}, & \chi_1 &= \alpha_\theta - \frac{a_{23}}{a_{33}} \alpha_z, & \chi_2 &= \alpha_r - \alpha_\theta - \frac{a_{13} - a_{23}}{a_{33}} \alpha_z. \end{aligned}$$

Інтегруючи (7), отримаємо вираз для сумарних напружень σ через радіальні напруження σ_r :

$$\sigma = \frac{1}{\beta_1} \left(A + \xi e_z - \chi_1 t + \alpha + \int_k^\rho \left[\sigma_r \left(\beta_3 \frac{1}{\eta} + \frac{d\beta_2}{d\eta} \right) - \beta_2 F \right] d\eta \right), \quad (8)$$

$$\text{де} \quad \xi = \int_k^\rho \beta_4 \frac{1}{\eta} d\eta - \frac{a_{23}}{a_{33}}, \quad \alpha = \int_k^\rho \chi_2 t \frac{1}{\eta} d\eta.$$

Перепишемо рівняння рівноваги (1), враховуючи (6), у вигляді

$$\frac{d(\rho^2 \sigma_r)}{d\rho} = \rho \sigma - \rho^2 F. \quad (9)$$

Інтегрування (9) з урахуванням першої з граничних умов (4) дає

$$\rho^2 \sigma_r(\rho) = -k^2 p_1 + \int_k^\rho \eta(\sigma - \eta F) d\eta, \quad (10)$$

звідки при $\rho = 1$ з урахуванням другої з граничних умов (4) отримуємо інтегральну умову рівноваги

$$\int_k^1 \sigma \rho d\rho = k^2 p_1 - p_2 + \int_k^1 F \rho^2 d\rho. \quad (11)$$

Таким чином, визначення ключових функцій σ , σ_r і константи A зведено до розв'язування системи інтегральних рівнянь (8), (10) та (11).

Якщо в рівнянні (8) замінити радіальні напруження σ_r на сумарні σ за допомогою формули (10) і використати умову (11), то отримаємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду тільки для ключової функції σ :

$$\sigma - \frac{1}{\beta_1} \int_k^\rho \mathcal{K}(\rho, \eta) \sigma d\eta = \frac{1}{\beta_1} (A + \xi e_z + f), \quad (12)$$

$$\text{де} \quad \mathcal{K}(\rho, \eta) = \eta(\varphi(\rho) - \varphi(\eta)), \quad \varphi(\rho) = \int_k^\rho \frac{1}{\eta^2} \left(\beta_3 \frac{1}{\eta} + \frac{d\beta_2}{d\eta} \right) d\eta,$$

$$f = -\chi_1 t + \alpha - k^2 p_1 \varphi(\rho) - \int_k^\rho [\beta_2 F + \eta^2 (\varphi(\rho) - \varphi(\eta)) F] d\eta.$$

Слід зазначити, що рівняння (10) не залежить від фізичних співвідношень моделі, а рівняння (12) збігається з відповідним інтегральним рівнянням для ключової функції σ , наведеним у [9] для часткового випадку ізотропного матеріалу циліндра.

Сталу інтегрування A та осьову деформацію e_z у випадку (i) визначаємо підстановкою (8), (10) в умову рівноваги (11) і співвідношення

$$e_z \int_k^1 \frac{1}{a_{33}} \rho d\rho + \int_k^1 \frac{1}{a_{33}} ((a_{13} - a_{23}) \sigma_r - a_{23} \sigma - \alpha_z t) \rho d\rho = p, \quad (13)$$

яке отримуємо з умови (5₁) і третього зі співвідношень (2). Отже,

$$A = \frac{1}{\delta} (G_{22} b_1 - G_{12} b_2), \quad e_z = \frac{1}{\delta} (G_{11} b_2 - G_{21} b_1), \quad (14)$$

$$\text{де} \quad \delta = 2(G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21}), \quad G_{11} = \frac{1}{2} \int_k^1 \frac{1}{\beta_1} \rho d\rho, \quad G_{12} = \frac{1}{2} \int_k^1 \frac{1}{\beta_1} \xi \rho d\rho,$$

$$G_{21} = \frac{1}{2} \int_k^1 \frac{1}{\beta_5} \rho d\rho, \quad G_{22} = \frac{1}{2} \int_k^1 \frac{1}{a_{33}} \left(1 - a_{23} \frac{1}{\beta_1} \xi \right) \rho d\rho,$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \tilde{b}_1 - \int_k^1 \frac{1}{\beta_1} \rho \int_k^\rho \mathcal{K}(\rho, \eta) \sigma \, d\eta \, d\rho, & \tilde{b}_1 &= k^2 p_1 - p_2 - \int_k^1 \frac{1}{\beta_1} \rho f \, d\rho + \int_k^1 \rho^2 F \, d\rho, \\
b_2 &= \tilde{b}_2 - \int_k^1 \beta_4 \frac{1}{\rho} \int_k^\rho \eta \sigma \, d\eta \, d\rho - \int_k^1 \frac{1}{\beta_5} \rho \int_k^\rho \mathcal{K}(\rho, \eta) \sigma \, d\eta \, d\rho, & \beta_5 &= a_{23} - \frac{a_{22} a_{33}}{a_{23}}, \\
\tilde{b}_2 &= p + k^2 p_1 \int_k^1 \beta_4 \frac{1}{\rho} \, d\rho + \int_k^1 \beta_4 \frac{1}{\rho} \int_k^\rho \eta^2 F \, d\eta \, d\rho - \int_k^1 \frac{1}{\beta_5} \rho f \, d\rho + \int_k^1 \rho \frac{1}{a_{33}} \alpha_z t \, d\rho.
\end{aligned}$$

Для випадку (*ii*) константу A визначаємо підстановкою (8) і (10) в умову (11):

$$A = \frac{b_1}{2G_{11}}. \quad (15)$$

4. Алгоритм розв'язування. Для розв'язування інтегрального рівняння (12) застосовуємо метод простих ітерацій [3], побудований на використанні рекурентних співвідношень

$$\sigma_n = \frac{1}{\beta_1} \left(A_n + \xi e_z^n + f + \int_k^\rho \mathcal{K}(\rho, \eta) \sigma_{n-1} \, d\eta \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

з відповідним початковим наближенням.

У випадку (*i*) сталі A_n та e_z^n визначаються формулами

$$A_n = \frac{1}{\delta} (G_{22} b_1^n - G_{12} b_2^n), \quad e_z^n = \frac{1}{\delta} (G_{11} b_2^n - G_{21} b_1^n),$$

де
$$b_1^n = \tilde{b}_1 - \int_k^1 \frac{1}{\beta_1} \rho \int_k^\rho \mathcal{K}(\rho, \eta) \sigma_{n-1} \, d\eta \, d\rho,$$

$$b_2^n = \tilde{b}_2 - \int_k^1 \beta_4 \frac{1}{\rho} \int_k^\rho \eta \sigma_{n-1} \, d\eta \, d\rho - \int_k^1 \frac{1}{\beta_5} \rho \int_k^\rho \mathcal{K}(\rho, \eta) \sigma_{n-1} \, d\eta \, d\rho.$$

Для випадку (*ii*) зафіксованих кінців циліндра $A_n = \frac{b_1^n}{2G_{11}}, e_z^n = 0$.

Після визначення напружень σ радіальні напруження σ_r знаходимо за співвідношенням (10), колові σ_θ – з формул (6), а осьові σ_z – з третього зі співвідношень (2).

Для ізотропного циліндра [6, 9] за нульове наближення при розв'язуванні інтегрального рівняння (12) використовують значення σ при $\varphi(\rho) \equiv 0$. З цього нульового наближення випливають точні аналітичні розв'язки задач пружності та термопружності для відповідних однорідних ізотропних і трансверсально ізотропних циліндричних тіл з площиною ізоотропії, що співпадає з поперечним перерізом циліндра. На відміну від цих випадків, для однорідного ортотропного циліндра $\varphi(\rho) \neq 0$. Тому вираз для σ , який випливає з (12) при $\varphi(\rho) \equiv 0$, не буде розв'язком відповідних задач для випадку однорідних властивостей матеріалу.

Для побудови альтернативного початкового наближення використаємо розв'язок відповідних задач пружності та термопружності для однорідного ортотропного циліндра.

Цей розв'язок можна отримати з використанням узагальнення подань [2, 10] розв'язку рівнянь рівноваги для цього випадку у вигляді (тут для спрощення запису позначимо напрямки r, θ, z відповідно індексами «(1)», «(2)», «(3)»)

$$\sigma_{(j)}(\rho) = (C_1 + d_1 \psi_1(\rho)) \lambda_{1j} \rho^{g-1} + (C_2 + d_2 \psi_2(\rho)) \lambda_{2j} \rho^{-g-1} + \left(\Lambda_1 \frac{B_{1j}}{B_{11}} - \Lambda_j \right) t + \zeta_j e_z^0 + \tilde{F}_j, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{де } g &= \sqrt{\frac{B_{22}}{B_{11}}}, & \psi_1(\rho) &= \int_k^\rho t \frac{1}{\eta^g} d\eta, & \psi_2(\rho) &= \int_k^\rho t \eta^g d\eta, & d_1 &= \frac{\Lambda_1 g - \Lambda_2}{2B_{11}g}, \\ d_2 &= \frac{\Lambda_1 g + \Lambda_2}{2B_{11}g}, & \Lambda_j &= B_{j1} \alpha_r + B_{j2} \alpha_\varphi + B_{j3} \alpha_z, & \lambda_{1j} &= B_{1j} g + B_{2j}, \\ \lambda_{2j} &= -B_{1j} g + B_{2j}, & \zeta_j &= \begin{cases} m_j, & g \neq 1, \\ s_j \ln \rho + s_{j+3}, & g = 1, \end{cases} & m_j &= B_{13} - \frac{\mu_{1j} B}{1-g^2}, \\ s_j &= -\frac{B \mu_{1j}}{2}, & s_{j+3} &= \frac{\mu_{2j} B}{4} + B_{3j}, & \mu_{1j} &= B_{1j} + B_{2j}, & \mu_{2j} &= -B_{1j} + B_{2j}, \\ B &= \frac{B_{13} - B_{23}}{B_{11}}, & \tilde{F}_j &= \begin{cases} \frac{2F\rho\mu_{1j}}{B_{11}(g^2 - 4)}, & g \neq 2, \\ \frac{F\rho}{B_{11}} \left(-\frac{(B_{2j} + 2B_{1j}) \ln \rho}{4} + \frac{B_{2j} - 2B_{1j}}{16} \right), & g = 2, \end{cases} & j &= 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$B_{k\ell}$ – модулі пружності для ортотропного тіла [1]:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{\Omega} E_r (1 - \nu_{0z} \nu_{z0}), & B_{12} &= B_{21} = \frac{1}{\Omega} E_r (\nu_{r0} + \nu_{z0} \nu_{rz}), \\ B_{13} &= B_{31} = \frac{1}{\Omega} E_r (\nu_{rz} + \nu_{r0} \nu_{0z}), & B_{23} &= B_{32} = \frac{1}{\Omega} E_0 (\nu_{0z} + \nu_{0r} \nu_{rz}), \\ B_{22} &= \frac{1}{\Omega} E_0 (1 - \nu_{rz} \nu_{zr}), & B_{33} &= \frac{1}{\Omega} E_z (1 - \nu_{r0} \nu_{0r}), \\ \Omega &= 1 - 2\nu_{r0} \nu_{0z} \nu_{zr} - \nu_{rz} \nu_{zr} - \nu_{z0} \nu_{0z} - \nu_{r0} \nu_{0r}. \end{aligned}$$

Невідомі сталі C_1 , C_2 та e_z^0 визначаємо з граничних умов (4) та (5):

$$C_1 = \frac{k^{g+1} \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 - \Gamma_1 e_z^0}{\lambda_{11} (1 - k^{2g})}, \quad (18)$$

$$C_2 = \frac{k^{g+1} (-\tilde{p}_1 + k^{g-1} \tilde{p}_2 - \Gamma_2 e_z^0)}{\lambda_{21} (1 - k^{2g})}, \quad (19)$$

$$e_z^0 = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_3} \left(-\varepsilon_1 \tilde{p}_1 + \varepsilon_2 \tilde{p}_2 + \frac{1 - k^{2g}}{1 - k^{g+1}} \tilde{p} \right) & \text{для випадку (i),} \\ 0, & \text{для випадку (ii),} \end{cases} \quad (20)$$

$$\text{де } \tilde{p}_1 = p_1 + \tilde{F}_1(k), \quad \tilde{p}_2 = p_2 + d_1 \lambda_{11} \psi_1(1) + d_2 \lambda_{21} \psi_2(1) + \tilde{F}_1(1),$$

$$\tilde{p} = p - d_1 \lambda_{13} \int_k^1 \psi_1(\rho) \rho^g d\rho - d_2 \lambda_{23} \int_k^1 \psi_2(\rho) \frac{1}{\rho^g} d\rho -$$

$$- \left(\Lambda_1 \frac{B_{13}}{B_{11}} - \Lambda_3 \right) \int_k^1 t \rho d\rho - \int_k^1 \tilde{F}_3 \rho d\rho,$$

$$\varepsilon_1 = Z_{1g} k^{g+1} - Z_2 \Gamma_3, \quad \varepsilon_2 = Z_{1g} - Z_2 \Gamma_3 k^{g-1},$$

$$\varepsilon_3 = -Z_{1g} \Gamma_1 - Z_2 \Gamma_2 \Gamma_3 + \frac{(1 - k^2)(1 - k^{2g})}{2(1 - k^{g+1})} \Gamma_4,$$

$$\Gamma_1 = \begin{cases} \zeta_1(1 - k^{g+1}), & g \neq 1, \\ (1 - k^2)(s_4 - s_1\omega), & g = 1, \end{cases} \quad \Gamma_2 = \begin{cases} -\zeta_1(1 - k^{g-1}), & g \neq 1, \\ s_1 \ln k, & g = 1, \end{cases}$$

$$\Gamma_3 = \begin{cases} \frac{1 - k^{-g+1}}{(g-1)(1 - k^{-g-1})}, & g \neq 1, \\ -\omega, & g = 1, \end{cases} \quad \Gamma_4 = \begin{cases} \zeta_3, & g \neq 1, \\ s_6 - s_3 \left(\omega + \frac{1}{2} \right), & g = 1, \end{cases}$$

$$Z_j = \frac{\lambda_{j3}}{\lambda_{j1}}, \quad j = 1, 2, \quad Z_{1g} = \frac{Z_1}{1+g}, \quad \omega = \frac{k^2 \ln k}{1 - k^2}.$$

Таким чином, як початкове наближення використовуємо розв'язок

$$\sigma_0 = (C_1 + d_1\psi_1)(\lambda_{11} + \lambda_{12})\rho^{g-1} + (C_2 + d_2\psi_2)(\lambda_{21} + \lambda_{22})\rho^{-g-1} + \left(\Lambda_1 \frac{B_{12}}{B_{11}} - \Lambda_2 \right) t + (\zeta_1 + \zeta_2)e_z^0 + \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2, \quad (21)$$

де деформація e_z^0 та величини C_1, C_2 визначаються формулами (18)–(20), в яких механічні та теплові характеристики матеріалу приймаються залежними від радіальної координати.

5. Тестова задача. Як тестовий приклад розглянемо задачу Ляме для циліндра з фіксованими кінцями під дією внутрішнього тиску p_1 ($p_2 = 0$, $t = 0$, $F_* = 0$), коефіцієнти деформації матеріалу якого змінюються за степеневим законом пропорційно деякому степеню віддалі ρ : $a_{ij} = a_{ij}^0 \rho^{-m}$, а модулі пружності відповідно пропорційні ρ^m , де a_{ij}^0 – задані сталі, а m – довільне дійсне число. Точний розв'язок задачі з такими коефіцієнтами деформації наведено у [12, 13]:

$$\sigma_r = -p_1 k \frac{\rho^{y_1-1} - \rho^{y_2-1}}{k^{y_1} - k^{y_2}}, \quad \sigma_\theta = -p_1 k \frac{y_1 \rho^{y_1-1} - y_2 \rho^{y_2-1}}{k^{y_1} - k^{y_2}},$$

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta = -p_1 k \frac{(y_1 + 1)\rho^{y_1-1} - (y_2 + 1)\rho^{y_2-1}}{k^{y_1} - k^{y_2}}, \quad (22)$$

$$\text{де} \quad y_{1,2} = 0.5 \left(m \pm \sqrt{m^2 + 4\gamma_m} \right), \quad \gamma_m = \frac{\gamma_{11} + m\gamma_{12}}{\gamma_{22}},$$

$$\gamma_{ij} = a_{ij}^0 - \frac{a_{i3}^0 a_{j3}^0}{a_{33}^0}, \quad i, j = 1, 2.$$

Числові розрахунки виконано для випадку $v_{r0} = v_{\theta z} = v_{rz} = 0.1$, коли $E_r = E_{r0}\rho^m$, $E_\theta = E_z = E_{\theta z}\rho^m$, для значень $E_\theta/E_r = 1.0, 0.1, 10$ і $m = 0, 0.1, 0.5, 1.0, 4.0$. У табл. 1, 2 наведено результати обчислень значень безрозмірних напружень $\tilde{\sigma}_j(\rho) = \sigma_j(\rho)/(p_1 k^2)$, $j = 0, 1, 2$, – нульового, першого та другого наближень за рекурентними формулами (16) – на поверхнях циліндра $\rho = k$ (для випадку $k = 0.5$ – табл. 1) і $\rho = 1$ (табл. 2) для початкових наближень за формулою (21) і за формулою

$$\sigma_0 = \frac{k^2 p_1}{2G_{11}\beta_1}, \quad (23)$$

яка впливає з (16) при $\varphi(\rho) \equiv 0$.

Таблиця 1

m	E_0/E_r	$\tilde{\sigma}(0.5)$ за формулою (22) – точний розв'язок	$\tilde{\sigma}_0(0.5)$ за формулою (21)			$\tilde{\sigma}_0(0.5)$ за формулою (23)		
			$\tilde{\sigma}_0(0.5)$	$\tilde{\sigma}_1(0.5)$	$\tilde{\sigma}_2(0.5)$	$\tilde{\sigma}_0(0.5)$	$\tilde{\sigma}_1(0.5)$	$\tilde{\sigma}_2(0.5)$
0	1.0	2.667	2.667			2.667		
	0.1	1.864	1.864			2.667	1.886	1.865
	10	8.435	8.435			2.667	9.696	7.999
0.1	1.0	2.459	2.667	2.460	2.459	2.555	2.460	2.459
	0.1	1.665	1.864	1.673	1.665	2.555	1.691	1.666
	10	8.170	8.435	8.116	8.188	2.555	9.359	7.772
0.5	1.0	1.673	2.667	1.692	1.673	2.147	1.680	1.673
	0.1	0.916	1.864	0.964	0.919	2.147	0.967	0.919
	10	7.139	8.435	6.910	7.204	2.147	8.062	6.869
1.0	1.0	0.787	2.667	0.855	0.790	1.714	0.816	0.788
	0.1	0.082	1.864	0.198	0.091	1.714	0.169	0.088
	10	5.913	8.435	5.555	5.998	1.714	6.552	5.760
4.0	1.0	-2.582	2.667	-2.039	-2.461	0.381	-2.279	-2.495
	0.1	-2.892	1.864	-2.368	-2.810	0.381	-2.577	-2.845
	10	0.168	8.435	0.215	0.169	0.381	0.169	0.168

Таблиця 2

m	E_0/E_r	$\tilde{\sigma}(1)$ за формулою (22) – точний розв'язок	$\tilde{\sigma}_0(1)$ за формулою (21)			$\tilde{\sigma}_0(1)$ за формулою (23)		
			$\tilde{\sigma}_0(1)$	$\tilde{\sigma}_1(1)$	$\tilde{\sigma}_2(1)$	$\tilde{\sigma}_0(1)$	$\tilde{\sigma}_1(1)$	$\tilde{\sigma}_2(1)$
0	1.0	2.667	2.667			2.667		
	0.1	2.863	2.863			2.667	2.853	2.862
	10	1.515	1.515			2.667	0.992	1.723
0.1	1.0	2.763	2.667	2.762	2.763	2.739	2.762	2.763
	0.1	2.963	2.862	2.959	2.963	2.739	2.951	2.963
	10	1.579	1.515	1.603	1.571	2.739	1.069	1.776
0.5	1.0	3.170	2.667	3.159	3.169	3.037	3.166	3.169
	0.1	3.388	2.862	3.360	3.387	3.037	3.363	3.387
	10	1.859	1.515	1.973	1.822	3.037	1.406	2.012
1.0	1.0	3.731	2.667	3.685	3.729	3.429	3.714	3.730
	0.1	3.972	2.862	3.891	3.965	3.429	3.919	3.968
	10	2.264	1.515	2.472	2.207	3.429	1.894	2.367
4.0	1.0	8.204	2.667	7.376	8.075	6.095	7.819	8.142
	0.1	8.499	2.862	7.587	8.342	6.095	8.013	8.412
	10	6.234	1.515	6.167	6.234	6.095	6.232	6.234

На рис. 1 наведено залежність відносної похибки обчислень для другого наближення $\Delta_2 = (\sigma_2(1) - \sigma(1))/\sigma(1) \cdot 100\%$ від показника степеня m для нульових наближень за формулою (21) (суцільна крива) та за формулою (23) (штрихова крива) у випадку $E_0/E_r = 10$.

Аналіз отриманих результатів показує, що у випадку ізотропії ($E_0 = E_r$) нульове наближення (23) завжди є кращим, ніж наближення

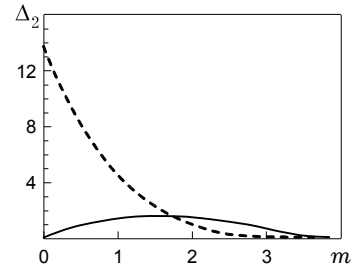


Рис. 1

(21). Причому при $0 < m \leq 0.5$ другі наближення практично співпадають з точним розв'язком для обох випадків, а при $m > 0.5$ різниця в ефективності стає більш істотною.

Для випадку $E_0 < E_r$ при малих $m < 0.5$ збіжність є дещо кращою при використанні нульового наближення (21), а при $m > 0.5$ – при використанні нульового наближення (23), хоча в цілому вони показують приблизно однакову швидкість збіжності.

Для випадку $E_0 > E_r$ (див. рис. 1) при $m < 1.65$ збіжність є кращою при використанні формули (21) як нульового наближення, а при $m > 1.65$ – при використанні нульового наближення (23). Причому зі зменшенням m різниця в ефективності істотно зростає.

Таким чином, за нульове наближення для слабо неоднорідного матеріалу циліндра слід використовувати формулу (21), а для слабо анізотропного ефективнішим є застосування формули (23).

6. Висновки. Узагальнено методика розв'язування одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних порожнистих циліндрів на випадок ортотропних властивостей матеріалу циліндра. Ця методика ґрунтується на безпосередньому інтегруванні вихідних диференціальних рівнянь задачі та відповідному зведенні до інтегральних рівнянь, які розв'язуються методом простої ітерації. Ефективність підходу показано на прикладі розв'язання тестової задачі. Встановлено вплив степеня неоднорідності та анізотропії на швидкість збіжності ітераційного процесу для різних варіантів початкового наближення.

1. Биргер Б. И. Температурные напряжения в анизотропных телах // Прикл. механика. – 1971. – 7, № 3. – С. 71–76.
2. Биргер Б. И., Баранов В. П. Расчет температурных напряжений в ортотропном цилиндре // Механика полимеров. – 1972. – № 2. – С. 310–314.
3. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 543 с.
4. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
5. Вигак В. М. Розв'язки задач пружності та термопружності в напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – 1995. – Вип. 9. – С. 34–122.
6. Вигак В. М., Калиняк Б. М. Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних і термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 60–67.
7. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Визначення напружено-деформованого стану анізотропних термочутливих циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 1. – С. 73–77.
8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
9. Калиняк Б. М. Інтегрування рівнянь одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 2. – С. 124–131.
10. Колесов В. С., Федик И. И., Чуйко Е. Е. Температурные напряжения в составном анизотропном цилиндре // Прикл. механика – 1974. – 10, № 2. – С. 21–26.
11. Колчин Г. Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. – Кишинев: Картя Молдовеняскэ, 1971. – 172 с.
12. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
13. Лехницкий С. Г. Элементарные решения двух частных задач о равновесии анизотропного неоднородного цилиндра // Исследования по упругости и пластичности. – 1967. – № 6. – С. 3–9.
14. Плотников М. М. К расчету толстостенной неоднородной трубы // Изв. вузов. Машиностроение. – 1960. – № 12. – С. 104–109.
15. Плотников М. М. О напряжениях в одной задаче неоднородно-анизотропного цилиндра // Изв. вузов. Машиностроение. – 1967. – № 8. – С. 28–31.

16. Плотников М. М. Упругие свойства и напряженное состояние анизотропных неоднородных цилиндров // Изв. вузов. Машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 19–28.
17. Попович В. С., Калиняк Б. М. Термонапряжений стан термочутливого цилиндра при конвективному нагріванні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 2. – С. 126–136.
18. Alshits V. I., Kirchner H. O. K. Cylindrically anisotropic, radially inhomogeneous elastic materials // Proc. Roy. Soc. London. – 2001. – A457. – P. 671–693.
19. Fraldi M., Cowin S. C. Inhomogeneous elastostatic problem solutions constructed from stress-associated homogeneous solutions // J. Mech. and Phys. of Solids. – 2004. – 52. – P. 2207–2233.
20. Hata T., Atsumi A. Transient thermoelastic problem for a transversely anisotropic hollow cylinder with temperature-dependent properties // Bulletin of JSME (The Japan Society of Mechanical Engineers). – 1968. – 11, No. 45. – P. 404–412.
21. Maiti M. Stresses in anisotropic nonhomogeneous cylinders // AIAA Journal (Amer. Inst. Aeronautics and Astronautics). – 1973. – 11. – No. 9. – P. 1326–1328.
22. Oral A., Anlas G. Effects of radially varying moduli on stress distribution of nonhomogeneous anisotropic cylindrical bodies // Int. J. Solids Struct. – 2005. – 42. – P. 5568–5588.
23. Tarn J.-Q. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads // Int. J. Solids Struct. – 2001. – 38. – P. 8189–8206.
24. Tauchert T. R. Thermal stresses in an orthotropic cylinder with temperature-dependent elastic properties // Dev. Theor. and Appl. Mech. – 1977. – 8. – P. 201–212.
25. Verijenko V. E., Adali S., Tabakov P. Y. Stress distribution in continuously heterogeneous thick laminated pressure vessels // Composite Struct. – 2001. – 54. – P. 371–377.

ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ

Развит метод непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений равновесия и совместности в напряжениях одномерных задач упругости и термоупругости для случая неоднородных ортотропных полых цилиндров. Исходные задачи сведены к интегральным уравнениям, которые решаются методом последовательных приближений. Проанализировано влияние степени анизотропии и начального приближения на скорость сходимости итерационного метода расчета.

ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTICITY AND THERMOELASTICITY FOR NONHOMOGENEOUS ORTHOTROPIC HOLLOW CYLINDERS

A method of direct integration of differential equilibrium and compatibility equations in terms of stresses of one-dimensional elasticity and thermoelasticity problems for the case of nonhomogeneous orthotropic hollow cylinders is developed. Initial problems are reduced to the integral equations, which are solved by the direct iteration procedure. The influence of degree of anisotropy and initial approximation on the rate of convergence of iteration calculation method is analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.06.06