

**ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА  $R$ -ФУНКЦИЙ И СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ**

*Рассматривается задача о собственных колебаниях пологих изотропных оболочек заданной формы в плане с разными видами граничных условий. Математическая постановка выполнена в рамках классической теории. Для решения задачи использован вариационно-структурный метод, базирующийся на использовании теории  $R$ -функций и сплайн-аппроксимации неопределенных компонент структуры решения. Сравнение полученных результатов с известными иллюстрирует эффективность предложенного метода и созданного программного обеспечения. Представлены численные результаты для собственных частот и форм колебаний оболочек различной кривизны с отверстиями.*

Исследование динамического поведения пологих оболочек является одной из актуальных проблем механики, в силу широкого их применения в качестве элементов многих тонкостенных конструкций. Этой проблеме посвящены многочисленные исследования, обзоры которых выполнены в работах [2, 3, 13] и др. Анализ имеющихся исследований позволяет сделать вывод о том, что проблема нахождения собственных частот и форм колебаний остается актуальной для оболочек, опирающихся на план сложной формы и имеющих различные виды граничных условий. Это относится к изотропным и ортотропным оболочкам, оболочкам переменной толщины, многослойным и т. д.

К числу наиболее известных универсальных методов, применяемых для решения этого класса задач, относится МКЭ [6, 9, 12]. Менее известным, но достаточно универсальным есть метод  $R$ -функций ( $RFM$ ) [5, 8, 11]. Согласно этому методу искомое решение представляется в аналитической форме с помощью структурных формул, точно удовлетворяющих заданным граничным условиям и содержащих неопределенные компоненты. Обычно неопределенные компоненты раскладываются в ряды по некоторым полным системам функций. К числу наиболее простых и легко реализуемых алгоритмически относится система степенных полиномов. Однако использование этой системы приводит к необходимости решения СЛАУ с плотно заполненными матрицами, что ведет к неустойчивости вычислительных процессов и плохой сходимости получаемых результатов при увеличении количества координатных функций.

В настоящей работе метод  $R$ -функций применяется совместно со сплайн-аппроксимацией неопределенных компонент, содержащихся в структурах решения краевой задачи. Использование сплайнов приводит к ленточным матрицам и, как результат, к лучшей устойчивости решения. С помощью предложенного подхода выполнен расчет собственных частот и форм колебаний пологих оболочек заданной формы в плане, в том числе с отверстиями, для различных видов граничных условий и значений кривизны. Представлено сравнение результатов, полученных при аппроксимации неопределенных компонент сплайнами и степенными полиномами, а также с известными в литературе.

**1. Математическая постановка задачи.** Рассмотрим задачу о колебаниях пологой изотропной оболочки, опирающейся на заданный план, с постоянными кривизнами в направлениях осей  $Ox$  и  $Oy$ . Будем считать, что колебания оболочки являются гармоническими во времени, т. е. перемещения в плоскости пластины  $u, v$  в направлениях осей  $Ox$  и  $Oy$ , а также поперечные перемещения  $w$  в направлении оси  $Oz$  (прогиб оболочки) могут

быть представлены в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(x, y) \sin \lambda t, \\ v(x, y, t) &= V(x, y) \sin \lambda t, \\ w(x, y, t) &= W(x, y) \sin \lambda t. \end{aligned} \quad (1)$$

На основе вариационного принципа Лагранжа проблема свободных колебаний тонкостенных пологих оболочек сводится к нахождению минимума функционала

$$J = V_{\max} - T_{\max}, \quad (2)$$

где  $V$  и  $T$  – соответственно потенциальная и кинетическая энергии оболочки.

В рамках классической теории, базирующейся на гипотезах Кирхгофа – Лява, функционал (2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} J(U, V, W) &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R_x} + \frac{W}{R_y} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{W}{R_x} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R_y} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \partial\Omega + \\ &\quad + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \partial\Omega - \frac{\lambda^2 \rho h}{2} \iint_{\Omega} (U^2 + V^2 + W^2) \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $E$ ,  $h$  и  $\nu$  – модуль упругости, толщина оболочки и коэффициент Пуассона, а  $\mathbf{V} = (U, V, W)$  – вектор перемещений.

**2. Метод решения.** Согласно методу *RFM* вначале строится структура решения краевой задачи [8]. Вид этой структуры зависит от вида граничных условий. Ниже представлены структуры решения для некоторых видов граничных условий, моделирующих соответствующие способы опирания оболочки.

1°. *Край оболочки неподвижен (жесткое защемление).* Граничные условия имеют вид

$$U|_{\partial\Omega} = 0, \quad V|_{\partial\Omega} = 0, \quad W|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к границе области.

Структура решения может быть представлена как

$$U = \omega\Phi_1, \quad V = \omega\Phi_2, \quad W = \omega^2\Phi_3. \quad (5)$$

Здесь функция  $\omega(x, y)$  является известной функцией, которая в общем случае строится с помощью теории  $R$ -функций таким образом, что она удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega(x, y)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}|_{\partial\Omega} = -1, \quad \omega(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (6)$$

а  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  – неопределенные компоненты структуры решения, при любом выборе которых будут точно удовлетворены граничные условия.

2°. *Край оболочки свободен.* Соответствующие граничные условия представляются как

$$M_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad Q_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad N_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad S_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7)$$

где  $M_n$  – изгибающий момент;  $Q_n$  – перерезывающая сила;  $N_n$  и  $S_n$  – нормальные и сдвиговые усилия в срединной плоскости оболочки. Условия

(7) являются статическими и при использовании вариационного метода Ритца удовлетворяются естественным образом. Поэтому соответствующая структура решения может быть выбрана в виде

$$U = \Phi_1, \quad V = \Phi_2, \quad W = \Phi_3. \quad (8)$$

3°. *Неподвижный шарнир:*

$$U|_{\partial\Omega} = 0, \quad V|_{\partial\Omega} = 0, \quad W|_{\partial\Omega} = 0, \quad M_n|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9)$$

Структура решения, удовлетворяющая кинематическим (главным) условиям, может быть выбрана в виде

$$U = \omega\Phi_1, \quad V = \omega\Phi_2, \quad W = \omega\Phi_3. \quad (10)$$

4°. *Комбинация жесткой заделки и неподвижного шарнира* приводит к следующей структуре решения:

$$U = \omega\Phi_1, \quad V = \omega\Phi_2, \quad W = \omega_1\omega\Phi_3, \quad (11)$$

где  $\omega_1 = 0$  – уравнение жестко заземленного участка границы, а  $\omega = 0$  – уравнение всей границы области. Неопределенные компоненты  $\Phi_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , в структурных формулах выбираются так, чтобы наилучшим образом удовлетворить исходные дифференциальные уравнения.

В настоящей работе неопределенные компоненты  $\Phi_k(x, y)$  будем аппроксимировать кубическими сплайнами Шенберга  $B_3(t)$  [1], т.е. представим их в виде

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, y) &= \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} c_{ij}^{(k)} B_3\left(\frac{N(x-a)}{b-a} - i\right) B_3\left(\frac{M(y-c)}{d-c} - j\right) = \\ &= \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} c_{ij}^{(k)} \Psi_{ij}(x, y). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $a, b, c, d$  – координаты вершин прямоугольника  $P = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , в который погружена заданная область. Предполагается, что в прямоугольнике задана равномерная сетка. Координаты узлов этой сетки определяются как

$$(x_i, y_j) = \left( a + \frac{b-a}{N} i, c + \frac{d-c}{M} j \right).$$

Кубический сплайн Шенберга  $B_3(t)$  представим в виде

$$\begin{aligned} B_3(t) &= \frac{1}{4} \left( (t+2)^3 \eta(t+2) - 4(t+1)^3 \eta(t+1) + 6t^3 \eta(t) - \right. \\ &\quad \left. - 4(t-1)^3 \eta(t-1) + (t-2)^3 \eta(t-2) \right), \end{aligned}$$

где  $\eta(u)$  – функция Хевисайда, которая определяется как

$$\eta(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

Подставляя (12) в структуру решения, например для жесткой заделки (5), получим

$$\begin{aligned} U &= \omega \cdot \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} c_{ij}^{(1)} B_3\left(\frac{N(x-a)}{b-a} - i\right) B_3\left(\frac{M(y-c)}{d-c} - j\right) = \\ &= \omega \cdot \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} c_{ij}^{(1)} \Psi_{ij}(x, y), \\ V &= \omega \cdot \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} c_{ij}^{(2)} B_3\left(\frac{N(x-a)}{b-a} - i\right) B_3\left(\frac{M(y-c)}{d-c} - j\right) = \\ &= \omega \cdot \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} c_{ij}^{(2)} \Psi_{ij}(x, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W &= \omega^2 \cdot \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} c_{ij}^{(3)} B_3 \left( \frac{N(x-a)}{b-a} - i \right) B_3 \left( \frac{M(y-c)}{d-c} - j \right) = \\
&= \omega^2 \cdot \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} c_{ij}^{(3)} \Psi_{ij}(x, y).
\end{aligned}$$

Полученные выражения для  $U, V, W$  подставляем в функционал (3). Неизвестные коэффициенты  $c_{ij}^{(k)}$  находим из условия стационарности этого функционала, т. е. из условия  $\partial J / \partial c_{ij}^{(k)} = 0$ . В матричном виде это условие можно записать как  $AC = \lambda BC$ . Здесь  $C$  – вектор, компоненты которого есть неизвестные коэффициенты  $c_{ij}^{(k)}$ , а элементы матриц  $A$  и  $B$  представляют собой двойные интегралы от известных функций с финитными носителями в области плана оболочки  $\Omega$ . Этим объясняется разреженность профилей получаемых матриц. Для вычисления элементов получаемых матриц в настоящей работе использовано численное интегрирование с применением метода Гаусса [4], а обобщенная проблема на собственные значения решается с использованием метода Ланцоша [7].

**3. Численные результаты.** Для проверки достоверности разработанного программного обеспечения, реализующего указанный выше алгоритм, были проведены расчеты собственных частот сферических, цилиндрических и двоякой кривизны оболочек для разных значений кривизн  $K_x = a/R_x$ ,  $K_y = a/R_y$ .

Таблица 1. Значения параметра  $\Omega_i$  квадратной в плане жестко защемленной оболочки при сплайн-аппроксимации ( $h = 0.005a$ )

Кривизны оболочки	Сетка сплайнов	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
$K_x = 0.5,$ $K_y = 0.5$	10×10	349.80	355.59	355.59	367.16	369.19	388.94
	15×15	349.79	355.58	355.58	367.12	369.18	388.88
	20×20	349.79	355.58	355.58	367.17	369.18	388.87
	[10]	349.79	355.58	355.58	367.13	369.18	388.88
$K_x = 0.3,$ $K_y = 0.3$	10×10	225.35	225.35	227.34	241.36	244.79	269.71
	15×15	225.35	225.35	227.33	241.36	244.77	269.68
	20×20	225.35	225.35	227.33	241.36	244.77	269.68
	[10]	225.4	225.4	227.3	241.4	244.8	269.7
$K_x = 0.1,$ $K_y = 0.1$	10×10	96.74	102.82	102.82	130.35	148.56	154.12
	15×15	96.74	102.82	102.82	130.35	148.54	154.10
	20×20	96.74	102.81	102.81	130.35	148.54	154.09
	[10]	96.75	102.8	102.8	130.4	148.6	-
$K_x = 0.5,$ $K_y = 0$	10×10	141.29	146.00	208.72	218.89	228.53	281.26
	15×15	141.26	145.98	208.68	218.83	228.23	280.70
	20×20	141.25	145.97	208.68	218.83	228.20	280.64
	[10]	141.3	146.0	208.7	218.8	228.2	280.6
$K_x = 0.5,$ $K_y = -0.5$	10×10	243.93	243.93	244.38	247.98	325.95	325.95
	15×15	243.91	243.91	244.36	247.95	352.87	352.87
	20×20	243.91	243.91	244.36	247.95	325.86	325.86
	[10]	243.9	243.9	244.4	248.0	325.9	325.9

Безразмерный частотный параметр  $\Omega_i$  определяется как  $\Omega_i = a^2 \omega_i \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}}$ , где  $\omega_i$  – собственные частоты колебаний оболочки.

**Задача 1.** Пусть оболочка опирается на квадратный план и жестко закреплена на всем контуре. Исследуем практическую сходимость собственных частот оболочек для различных значений их кривизн при изменении сетки сплайнов. В табл. 1 представлены результаты, полученные с помощью сплайн-аппроксимации неопределенных компонент для различного числа разбиений области на конечные носители.

Как видно из табл. 1, значения частотных параметров стабилизируются в 4-м знаке, начиная с сетки сплайнов  $15 \times 15$ . Сравнение полученных результатов с известными [10] свидетельствует о достоверности разработанного программного обеспечения.

**Задача 2.** Рассмотрим сферическую пологую изотропную оболочку с квадратным планом, толщиной  $h = 0.005a$  и кривизнами поверхности  $\frac{a}{R_x} = \frac{a}{R_y} = 0.5$ . Форма плана оболочки изображена на рис. 1. Предполагаем,

что края оболочки жестко закреплены, а участок границы  $AB$  является свободным. Будем считать, что длина отрезка  $AB$  остается постоянной и равной  $a/2$ , а положение его на стороне квадрата определяется координатой его центра, т. е. точкой  $C(c, a/2)$ .

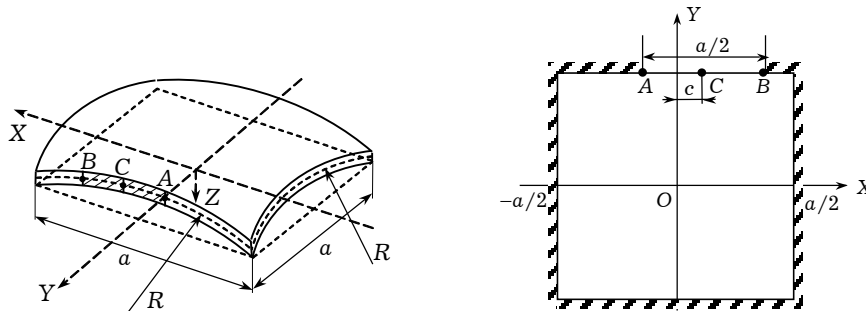


Рис. 1

Структуру решения задачи строим в соответствии с формулой (5), в которой функция  $\omega(x, y)$  описывает уравнения жестко закрепленного участка. Заметим, что в данном случае только с помощью  $R$ -функций можно построить эту функцию в аналитическом виде. Например, она может быть представлена с помощью формулы  $\omega = f_3 \vee_0 (f_2 \wedge_0 f_1)$ , где

$$f_1 = \frac{1}{a} \left( \left( \frac{a}{2} \right)^2 - y^2 \right), \quad f_2 = \frac{1}{a} \left( \left( \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right), \quad f_3 = \frac{2}{a} \left( \left( \frac{a}{4} \right)^2 - (x - c)^2 - \left( y - \left( \frac{a}{2} \right) \right)^2 \right),$$

а символы  $\wedge_0$ ,  $\vee_0$  являются символами  $R$ -операций  $R$ -конъюнкции и  $R$ -дизъюнкции соответственно [8], которые определяются формулами

$$X \wedge_0 Y = X + Y - \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad X \vee_0 Y = X + Y + \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Результаты расчетов для безразмерных частотных параметров  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , в случае симметричного расположения отрезка  $AB$  ( $c = 0$ ) представлены в табл. 2. Расчеты выполнены при аппроксимации неопределенных компонент как сплайнами, так и степенными полиномами. В табл. 2 показана практическая сходимость первых 6-ти собственных частот оболочки в зависимости от сетки сплайнов и степени аппроксимирующих полиномов.

Заметим, что степени полиномов 9, 10 и 11 соответствуют 45, 55 и 66 координатным функциям для каждого из перемещений  $u, v, w$  соответственно.

В процессе проведения вычислительного эксперимента было установлено, что в случае жесткого закрепления оболочек по всему контуру наблюдалась хорошая сходимость как при сплайн-аппроксимации, так и при полиномиальной. В данном случае, т. е. при смешанных граничных условиях,

сходимость собственных частот при сплайн-аппроксимации существенно лучше, чем при полиномиальной. Особенно это наблюдается для первых двух частот. Сравнение полученных результатов с ранее опубликованными в работе [10] свидетельствуют об их достоверности. Как видно из табл. 2, использование полиномиального базиса приводит к медленной сходимости результатов. Важным также является тот факт, что при использовании полиномиального базиса выше 11-й степени в силу плохой обусловленности плотно заполненных матриц не работают стандартные программы линейной алгебры.

Таблица 2. Значения безразмерного параметра  $\Omega_i$  для оболочки (рис. 1) при  $c = 0$

Аппроксимация неопределенных компонент		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
Сетка сплайнов	10×10	260.02	263.84	347.00	352.88	354.63	366.31
	20×20	253.85	256.10	346.71	352.36	354.22	365.75
	30×30	253.12	254.71	346.69	352.31	354.12	365.69
	40×40	251.68	254.43	346.66	352.26	354.08	365.65
Степень полиномов	9	268.14	283.95	347.85	353.96	364.40	368.55
	10	263.63	274.05	347.42	353.70	355.65	367.18
	11	261.53	267.68	347.19	353.23	355.17	366.88
	[10]	256.7	261.2	346.9	352.3	354.5	365.7

В табл. 3 представлены аналогичные результаты для сферической оболочки в случае, если свободный отрезок  $AB$  смещен, а именно, центр его находится в точке  $C(0.25a, 0.5a)$ .

Таблица 3. Значения безразмерного параметра  $\Omega_i$  для оболочки (рис. 1) при  $c = 0.25a$

Аппроксимация неопределенных компонент		$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
Сетка сплайнов	10×10	269.92	291.56	349.54	353.21	356.19	366.34
	20×20	265.02	283.89	349.43	352.85	355.89	365.83
	30×30	264.13	282.38	349.41	352.81	355.84	365.79
	40×40	263.77	281.77	349.41	352.79	355.83	365.77
Степень полиномов	9	277.81	313.64	350.57	354.98	357.97	371.09
	10	273.32	304.05	350.03	354.30	356.82	368.27
	11	270.77	297.49	349.85	353.72	356.41	367.40
	[10]	266.4	285.8	349.5	352.9	355.9	365.9

Анализ табл. 3 свидетельствует, что и в этом случае сходимость значений безразмерного частотного параметра  $\Omega_i$  лучше в случае сплайн-аппроксимации неопределенных компонент и ближе к результатам, полученным в работе [10].

Как показывает практика, в качестве конструктивных элементов часто используются пологие оболочки с отверстиями. Тем не менее в литературе практически отсутствуют численные результаты для собственных частот пологих оболочек с подкрепленными отверстиями. Применение метода  $R$ -функций позволяет без существенных изменений алгоритмов и программ исследовать такие оболочки. Ниже представлены некоторые из полученных результатов.

**Задача 3.** Исследуем влияние на собственные частоты и формы колебаний квадратного отверстия на поверхности оболочки (рис. 2, 3) в зависимости от кривизны оболочки и способов ее опирания по внутреннему и внешнему контурам. Предполагаем, что отношение толщины к длине стороны оболочки принято равным 0.005, т.е.  $h/a = 0.005$ , а значения кривизн  $K_x = a/R_x$ ,  $K_y = a/R_y$  варьируются.

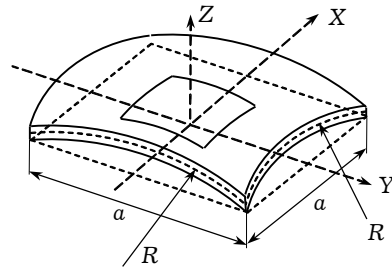


Рис. 2

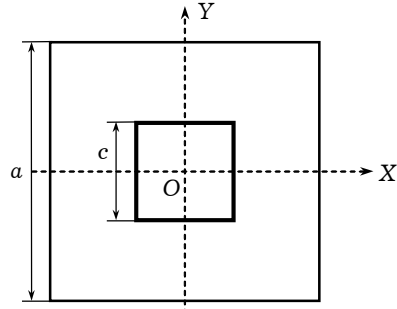


Рис. 3

Случай I. Пусть оболочка жестко закреплена по всей границе, включая отверстие. Как было показано ранее, структура решения в этом случае определяется формулой (5). Функция  $\omega(x, y)$ , удовлетворяющая условиям (6), может быть построена с помощью  $R$ -функций следующим образом:

$$\omega = ((f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 (f_1 \wedge_0 f_2)), \quad (13)$$

где функции  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , описывают множество точек следующих подобластей:  $f_1 = \frac{1}{a} \left( \left( \frac{a}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0$  и  $f_2 = \frac{1}{a} \left( \left( \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0$  – множество точек, находящихся внутри горизонтальной и вертикальной полос, ограниченных прямыми  $y = \pm \frac{a}{2}$  и  $x = \pm \frac{a}{2}$  соответственно;  $f_3 = \frac{1}{c} \left( y^2 - \left( \frac{c}{2} \right)^2 \right) \geq 0$  и  $f_4 = \frac{1}{c} \left( x^2 - \left( \frac{c}{2} \right)^2 \right) \geq 0$  – множество точек, лежащих вне полос, ограниченных прямыми  $y = \pm \frac{c}{2}$  и  $x = \pm \frac{c}{2}$  соответственно.

Исследование практической сходимости  $\Omega_i$  первых 6-ти собственных частот оболочки при изменении сетки сплайнов для различных значений ее кривизны и отношения  $c/a = 0.2$  представлено в табл. 4. Здесь же приведены результаты, полученные при полиномиальной аппроксимации со значениями степеней 13, 13, 15 для функций  $u, v, w$  соответственно.

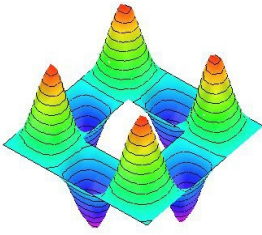
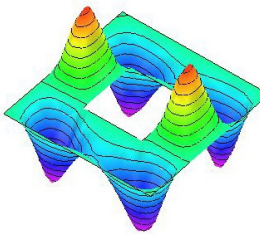
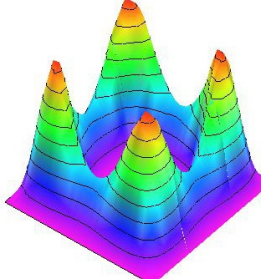
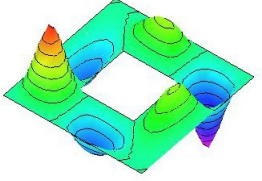
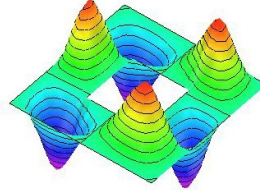
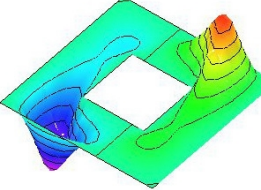
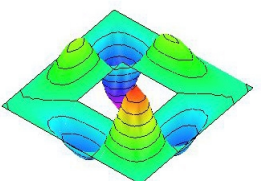
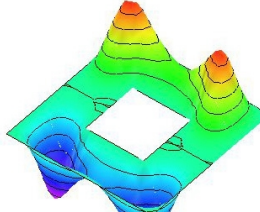
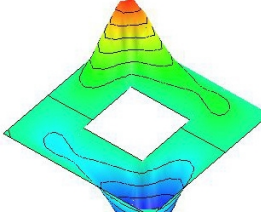
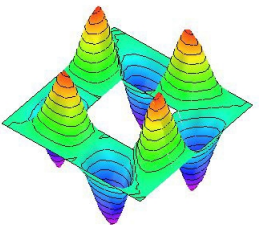
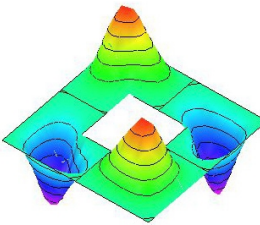
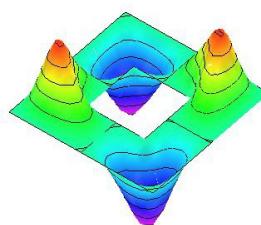
Таблица 4. Значения параметра  $\Omega_i$  для жестко закрепленных оболочек с квадратным отверстием при  $c = 0.2a$

Кривизны оболочки	Сетка сплайнов	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
$K_x = 0.5,$ $K_y = 0.5$	10×10	404.9	404.9	413.5	417.0	417.4	425.0
	20×20	403.4	403.4	412.3	415.8	416.1	423.7
	30×30	403.1	403.1	411.9	415.4	415.9	423.3
	Полиномы	405.9	405.9	414.8	418.2	418.3	425.9
$K_x = 0.5,$ $K_y = 0$	10×10	256.6	258.9	266.9	267.0	298.1	307.6
	20×20	254.9	256.6	265.4	265.4	296.8	306.1
	30×30	254.6	256.3	265.1	265.1	296.5	305.8
	Полиномы	258.1	260.2	267.5	267.6	298.7	308.3
$K_x = 0,$ $K_y = 0$	10×10	124.6	129.3	129.3	136.4	164.4	187.5
	20×20	124.3	127.9	127.9	135.4	161.5	185.5
	30×30	124.1	127.7	127.7	135.2	160.8	185.0
	Полиномы	125.5	129.7	129.7	136.7	165.7	188.9

Как видно из табл. 4, при полиномиальной аппроксимации неопределенных компонент получены несколько завышенные результаты, чем при сплайн-аппроксимации.

В табл. 5 приведены формы колебаний и соответствующие частоты для оболочек с различными значениями кривизн. Результаты расчетов были получены при сплайн-аппроксимации неопределенных компонент с сеткой  $20 \times 20$ , для отверстия со стороной  $c = 0.4a$ .

Таблица 5. Собственные частоты  $\Omega_i$  и формы колебаний жестко защемленных по внутреннему и внешнему контуру оболочек при  $c = 0.4a$

Сферическая оболочка ( $K_x = 0.5, K_y = 0.5$ )	Цилиндрическая панель ( $K_x = 0.5, K_y = 0$ )	Пластина ( $K_x = 0, K_y = 0$ )
		
471.98	343.56	225.72
		
477.36	343.88	227.07
		
477.36	355.70	227.07
		
486.06	356.31	228.79

*Случай II.* Пусть оболочка шарнирно оперта по всему контуру, что соответствует условиям (9). Размер отверстия принимается равным  $c = 0.2a$ . Решение этой задачи в рамках разработанного программного обеспечения отличается от предыдущей только структурой решения. А именно, в структурной формуле следует взять функцию  $\omega(x, y)$  в первой степени (формула (10)). Вид функции  $\omega(x, y)$  определяется формулой (13). Заметим, что при этом точно будут удовлетворены только главные граничные условия.



В табл. 6 представлены значения безразмерного частотного параметра, полученные как при сплайн-аппроксимации неопределенных компонент, так и при полиномиальной аппроксимации со значениями степеней 13, 13, 15 для функций  $u, v, w$  соответственно.

Следует обратить внимание на существенное увеличение частотного параметра при варьировании кривизны. Как видно из табл. 4 и 6, в случае шарнирного закрепления частотный параметр для сферической оболочки увеличивается более чем в 4 раза по сравнению с пластинкой, в то время как для случая жесткой заделки это увеличение было немногим более чем в 2 раза.

Таблица 6. Значения параметра  $\Omega_i$  для шарнирно опертых оболочек при  $c = 0.2a$

Кривизны оболочки	Сетка сплайнов	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
$K_x = 0.5,$ $K_y = 0.5$	10×10	394.5	394.5	403.1	405.6	406.0	410.1
	20×20	393.3	393.3	402.2	404.7	404.9	409.1
	30×30	393.0	393.0	402.0	404.5	404.7	408.9
	Полиномы	396.0	396.0	406.9	407.4	407.5	412.4
$K_x = 0.5,$ $K_y = 0$	10×10	220.3	227.3	234.5	239.5	273.4	281.7
	20×20	219.1	224.1	233.5	239.0	272.3	278.6
	30×30	218.9	223.5	233.7	239.1	272.1	278.0
	Полиномы	223.8	228.9	234.6	240.1	274.9	282.8
$K_x = 0,$ $K_y = 0$	10×10	76.2	82.9	82.9	94.0	112.6	139.1
	20×20	76.8	81.5	81.5	94.1	108.0	136.8
	30×30	77.1	81.5	81.5	94.2	106.6	136.1
	Полиномы	78.0	83.1	83.1	93.7	113.9	140.2

*Случай III.* Пусть оболочка жестко закреплена на внутренней границе и шарнирно оперта на внешней. Решение задачи в случае смешанных граничных условий выполняется с помощью структуры решения (11), где функция  $\omega(x, y)$  соответствует уравнению границы всей области и была построена (случаи I и II), а функция  $\omega_1$  соответствует жестко заземленному участку границы, в данном случае – внутреннему контуру. Функция  $\omega_1(x, y)$  может быть представлена в виде  $\omega_1 = -(f_4 \wedge_0 f_3)$ . Результаты расчетов для  $c = 0.2a$  и различных значений кривизн оболочки приведены в табл. 7.

Таблица 7. Значения параметра  $\Omega_i$  для шарнирно опертых по внешнему контуру и жестко заземленных по внутреннему контуру оболочек при  $c = 0.2a$

Кривизны оболочки	Сетка сплайнов	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
$K_x = 0.5,$ $K_y = 0.5$	10×10	395.9	395.9	406.2	407.6	407.7	411.8
	20×20	394.2	394.2	404.8	405.5	406.6	410.2
	30×30	393.9	393.9	404.5	405.3	406.4	409.9
	Полиномы	403.1	403.1	408.3	412.2	416.7	416.8
$K_x = 0.5,$ $K_y = 0$	10×10	229.8	234.7	241.6	244.9	274.7	282.8
	20×20	228.4	232.4	239.0	242.2	273.7	281.4
	30×30	228.1	232.0	238.6	241.8	273.5	281.2
	Полиномы	233.3	242.2	250.1	255.5	277.5	288.7
$K_x = 0,$ $K_y = 0$	10×10	83.7	88.7	88.7	97.5	121.6	145.3
	20×20	83.1	87.3	87.3	96.2	118.6	142.9
	30×30	83.0	87.1	87.1	96.0	118.0	142.5
	Полиномы	85.4	91.0	91.0	101.5	128.9	156.5

*Случай IV.* Пусть оболочка жестко закреплена на внешней границе и шарнирно оперта на внутренней. Как и в *случае III*, будем использовать структурную формулу (11), однако в качестве функции  $\omega_1$ , соответствующей жестко закрепленному контуру, возьмем функцию  $\omega_1 = (f_1 \wedge_0 f_2)$ .

Результаты расчетов для рассмотренного способа опирания оболочек и отверстия при  $c = 0.2a$  приведены в табл. 8.

Таблица 8. Значения параметра  $\Omega_i$  для жестко заземленных по внешнему и шарнирно опертых по внутреннему контуру оболочек при  $c = 0.2a$

Кривизны оболочек	Сетка сплайнов	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$
$K_x = 0.5,$ $K_y = 0.5$	10×10	403.2	403.2	412.2	412.3	416.5	423.6
	20×20	401.3	401.3	411.0	411.3	414.5	422.7
	30×30	400.8	400.8	410.8	411.2	413.9	422.4
	Полиномы	404.8	404.8	414.2	417.6	417.7	427.5
$K_x = 0.5,$ $K_y = 0$	10×10	246.9	250.3	262.7	263.2	296.0	305.4
	20×20	244.3	246.1	261.8	262.5	295.1	304.4
	30×30	243.6	245.2	261.9	262.5	295.0	304.2
	Полиномы	251.1	252.5	262.8	263.6	297.3	307.4
$K_x = 0,$ $K_y = 0$	10×10	114.1	121.6	121.6	132.2	152.8	179.7
	20×20	115.1	119.8	119.8	132.2	146.2	176.4
	30×30	115.4	119.7	119.7	132.5	144.2	175.4
	Полиномы	115.9	121.9	121.9	131.5	154.8	181.4

Из анализа табл. 7 и 8 следует, что для случая смешанных граничных условий полиномиальная аппроксимация также дает несколько завышенные результаты собственных частот, чем при сплайн-аппроксимации.

**Заключение.** В работе предложен эффективный метод расчета собственных частот и форм колебаний пологих оболочек заданной формы в плане, в том числе оболочек с отверстиями при различных граничных условиях и для различных значений кривизн срединной поверхности. В основу метода положена теория  $R$ -функций со сплайн-аппроксимацией неопределенных компонент и вариационный метод Ритца. Получен ряд новых численных результатов с использованием как полиномиальной, так и сплайн-аппроксимации. Сравнение полученных результатов с известными свидетельствует об эффективности предложенного метода и реализованного программного обеспечения.

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – Москва: Мир, 1972. – 316 с.
2. Григоренко А. Я. Численное исследование стационарных динамических процессов в анизотропных неоднородных цилиндрах // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 8. – С. 3–40.
3. Григоренко А. Я., Савула Я. Г., Муха И. С. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного решения // Прикл. механика. – 2000. – **49**, № 8. – С. 3–27.
4. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
5. Курта Л. В., Чистилина А. В. Исследование собственных колебаний многослойных пологих оболочек и пластин сложной формы в плане // Проблемы прочности. – 2003. – № 2. – С. 112–123.
6. Марчук М. В., Хом'як М. М. Змішана схема методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композиційних оболонок і пластин. – Львів: ІППММ НАНУ ім. Я. С. Підстригача, 2003. – 216 с.
7. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – Москва: Мир, 1983. – 382 с.
8. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 551 с.

9. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells // Archives Comput. Meth. in Eng. – 2002. – **9**. – P. 1–60.
10. Crossland J. A., Dickinson S. M. The free vibration of thin rectangular planform shallow shells with slits // J. Sound and Vibr. – 1997. – **199**, No. 3. – P. 513–521.
11. Kurpa L. V., Shmatko A. V. A note on analysis of natural vibrations of shallow shells with cuts on surface // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, No. 8.
12. Lee S. J., Han S. E. Free-vibration analysis of plates and shells with nine-node assumed natural degenerated shell element // J. Sound and Vibr. – 2001. – **241**, No. 4. – P. 601–633.
13. Qatu M. S. Review of shallow shell vibration research // The Shock and Vibr. Digest. – 1992. – **24**, No. 9. – P. 3–15.

**ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ R -ФУНКЦІЙ І СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЇ**

*Розглядається задача на власні коливання пологих ізотропних оболонок заданої форми в плані з різними видами граничних умов. Математична постановка задачі виконана згідно з класичною теорією оболонок. Розв'язок поставленої задачі виконується варіаційно-структурним методом з використанням методу R-функцій і сплайн-апроксимації невизначених компонент структури розв'язку. Порівняння отриманих чисельних результатів з відомими ілюструє ефективність запропонованого методу та створеного програмного забезпечення. Наведено чисельні результати для власних частот і форм коливань оболонок різної кривизни з отворами.*

**STUDY OF NATURAL VIBRATIONS OF SHALLOW SHELLS USING R -FUNCTIONS METHOD AND SPLINE-APPROXIMATION**

*Natural vibrations of isotropic shallow shells with given plan form and different boundary conditions are investigated. The mathematical statement is constructed according to the classical theory. The given problem is solved by a variation-structural method using spline-approximation of undefined components of the structure of solution. Comparison of obtained numerical results with that already known illustrates the effectiveness of the offered method and created software. Numerical results for eigenfrequencies and natural modes of shells of different curvature with holes are presented.*

Нац. техн. ун-т «Харьк. политех. ин-т», Харьков

Получено  
10.01.07