УДК 519.6

О. М. Литвин

ІНТЕРЛІНАЦІЯ ТА ІНТЕРФЛЕТАЦІЯ ФУНКЦІЙ І СТРУКТУРНИЙ МЕТОД В. Л. РВАЧОВА

Наведено аналіз задач, пов'язаних з побудовою повних систем координатних функцій, які не знайшли розв'язання (повного або часткового) в рамках структурного методу, що базується на використанні R -функцій В. Л. Рвачова: проблема кутових точок; проблема продовження слідів функцій і їх нормальних похідних з границі у внутрішні точки області інтегрування G зі збереженням класу диференційовності $C^r(G)$; проблема зміни типу граничних умов у деяких довільних точках границі; проблема побудови структур наближених розв'язків із заданими слідами на M лініях, якщо m, $m \ge 3$, з них перетинаються в одній точці. Наведено означення та основні властивості операторів інтерлінації та інтерфлетації функцій багатьох змінних. Викладено основні твердження про можливість розв'язування (повного або часткового) вказаних вище задач за допомогою інтерлінації або інтерфлетації функцій.

У цій роботі досліджується проблема побудови структур наближених розв'язків крайових задач математичної фізики, які точно задовольняють поставлені граничні умови (Діріхле, Неймана, мішані тощо) при розв'язуванні крайових задач для областей складної форми (границя яких складається з дуг відомих кривих – у плоскому випадку і з частин відомих поверхонь – у просторовому випадку). Ця проблема виникала, виникає і буде виникати при побудові повних систем координатних функцій, які точно задовольняють граничні умови в крайових задачах математичної фізики.

У працях В. Л. Рвачова [4, 7, 9] (див. також бібліографію у них) було запропоновано метод R-функцій, що дозволив створити загальний підхід до побудови повних систем координатних функцій, які точно задовольняють поставлені граничні умови. У працях автора [1–3, 5, 10–12] (див. також бібліографію в них) досліджуються оператори інтерлінації та інтерфлетації функцій багатьох змінних, а також можливі їх застосування (при розв'язуванні крайових задач тощо). Ця стаття є детальним викладом доповіді автора на міжнародній конференції, присвяченій 80-річчю В. Л. Рвачова, що відбулася у Харкові (жовтень 2006). Сформульовано основні положення структурного методу розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними у випадку областей складної форми. Проведено аналіз задач, які не були розв'язані в рамках структурного методу. Основна ідея цього методу викладена в статті В. Л. Рвачова [8] і потім розвивалась у працях Володимира Логвиновича і його учнів, головним чином, у напрямку побудови структур наближених розв'язків крайових задач для різних областей і різних типів граничних умов.

Крім того, викладемо основні означення і твердження теорії інтерлінації та інтерфлетації функцій. Ця теорія істотно використовує ідеї структурного методу та узагальнює їх у кількох напрямках. Як випливає з основних тверджень теорії інтерлінації та інтерфлетації функцій, з допомогою операторів інтерлінації та інтерфлетації функцій можна будувати структури наближених розв'язків крайових задач для областей складної форми, які дозволяють точно задовольняти граничні умови різних типів без використання R-функцій. Ці структури приводять до нових методів розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними – методів зведення до систем звичайних лінійних (ЛІДР) і нелінійних (НІДР) інтегро-диференціальних рівнянь. Вони є узагальненнями методу Л. В. Канторовича.

Сформулюємо **деякі задачі, які не можна розв'язати, залишаючись лише в рамках структурного методу та методу R-функцій.**

Задача 1. Проблема кутових точок.

Припустимо, що розв'язуємо крайову задачу

$$Lu(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in G, \tag{1}$$

$$Lu := -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + cu(x,y),$$

$$u(x,y) = \varphi_i(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma_i, \qquad i = 1,\dots,M, \tag{2}$$

де $\partial G = \bigcup_{i=1}^{M} \Gamma_i$, Γ_i − відрізки дуг відомих кривих $\Gamma_i : \omega_i(x,y) = 0$.

Введемо позначення $A_{i,i+1} = \Gamma_i \bigcap \Gamma_{i+1}$, $i = 1,\dots,M-1$, $A_{M,1} = \Gamma_M \bigcap \Gamma_1$. Якщо $\varphi_i(A_{i,i+1}) = \varphi_{i+1}(A_{i,i+1})$, $i = 1,\dots,M-1$, $\varphi_M(A_{M,1}) = \varphi_1(A_{M,1})$, то існує неперервна функція $\varphi(x,y) \in C(\bar{G})$, яка задовольняє граничні умови (2), якщо $\varphi_i(x,y)\big|_{\Gamma_i} \in C(\Gamma_i)$, $i = 1,\dots,M$. Цей факт випливає з відомих статей С. М. Нікольського [6]. У той же час, найпоширеніший метод побудови функції $\varphi(x,y)$ (див., наприклад, монографії і статті В. Л. Рвачова [7, 9]) використовує таку формулу для її побудови (стосовно формули (4) для h_i див. [3, с. 49]):

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{M} h_i(x,y)\varphi_i(x,y), \tag{3}$$

$$h_i(x,y) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{M} \Omega_j(x,y)}\Omega_i(x,y), \tag{4}$$

$$\Omega_i(x,y) = \prod_{k=1,k\neq i}^{M} \omega_k(x,y)^{2r}, \qquad r \geq 1,$$

$$\varphi(x,y)\big|_{\Gamma_i} = \varphi_i(x,y)\big|_{\Gamma_i}, \qquad i = 1,\dots,M. \tag{5}$$

Проаналізуємо поведінку функцій $h_i(x,y)$ в околах кутових точок $A_{p,p+1}$, $p \in \{1,\dots,M-1\}$, для найпростішого випадку, коли G − опукла плоска область, що є перетином областей $G_i : \omega_i(x,y) \geq 0,\ i = 1,\dots,M$. Легко бачити, що в кутових точках ці функції $h_i(x,y)$ можуть бути невизначеними. Наприклад, якщо $M = 2$, $\omega_1(x,y) = x$, $\omega_2(x,y) = y$, то функції

$$h_1(x,y) = \frac{y^{2r}}{x^{2r} + y^{2r}}, \qquad h_2(x,y) = \frac{x^{2r}}{x^{2r} + y^{2r}}, \qquad r = 1,2,\dots,$$

невизначені у точці $(0,0)$. Звертаємо увагу на те, що у цьому випадку формула (3) набуває вигляду

$$\varphi(x,y) = h_1(x,y)\varphi_1(y) + h_2(x,y)\varphi_2(x)$$

і задовольняє умови

$$\varphi(0,y) = \varphi_1(y) = u(0,y), \quad y \neq 0, \qquad \varphi(x,0) = \varphi_2(x) = u(x,0), \quad x \neq 0,$$

тобто є невизначеною у єдиній кутовій точці (0,0) навіть тоді, коли $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Аналогічно, якщо $M = 3$, $\omega_1 = x$, $\omega_2 := y$, $\omega_3 = 1 - x - y$, то функції

$$h_1 = \frac{y^{2r}(1-x-y)^{2r}}{\Omega}, \qquad h_2 = \frac{x^{2r}(1-x-y)^{2r}}{\Omega}, \qquad h_3 = \frac{x^{2r}y^{2r}}{\Omega},$$

$$\Omega = x^{2r}y^{2r} + x^{2r}(1-x-y)^{2r} + y^{2r}(1-x-y)^{2r},$$

невизначені в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Тобто, якщо точний розв'язок

$u(x,y)$ крайової задачі (1), (2) не має ніяких особливостей у кутових точках, то формули (3), (4) такі особливості можуть мати.

Крім того, додаткові особливості виникають у цих формулах при диференціюванні, якщо для їх побудови використовують R-функції вигляду $(-1 < \alpha \le 1)$

$$u \wedge_\alpha v = \frac{1}{1+\alpha}\left(u + v - \sqrt{u^2 - 2\alpha uv + v^2}\right),$$

$$u \wedge_\alpha v = 0 \quad (u \ge 0, v = 0) \vee (u = 0, v \ge 0), \qquad u \wedge_\alpha v > 0, \qquad u > 0 \wedge v > 0,$$

$$u \wedge_\alpha v < 0 \qquad (u < 0) \vee (v < 0),$$

$$u \vee_\alpha v = \frac{1}{1+\alpha}\left(u + v + \sqrt{u^2 - 2\alpha uv + v^2}\right),$$

$$u \vee_\alpha v = 0 \quad (u = 0, v \le 0) \vee (u \le 0, v = 0), \qquad u \wedge_\alpha v < 0, \qquad u < 0 \wedge v < 0,$$

$$u \wedge_\alpha v > 0 \qquad (u > 0) \vee (v > 0).$$

Щоб пояснити цю фразу, напишемо рівняння границі прямокутника $\Gamma : x = \pm a, \ -b \le y \le b; \ y = \pm b, \ -a < x < a$ у вигляді $\omega(x,y) = 0$, $\omega(x,y) = (a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2)$. Безпосередньою перевіркою з використанням виразу $\sqrt{u^2} = |u| = \begin{cases} u, & u \ge 0, \\ -u, & u < 0, \end{cases}$ можна впевнитись у тому, що $\omega(x,y) = 0$, $(x,y) \in \Gamma$; $\omega(x,y) > 0$, $(x,y) \in G = \{|x| < a, \ |y| < b\}$; $\omega(x,y) < 0$, $(x,y) \notin \bar{G} = G \cup \Gamma$. Тобто рівняння $\omega(x,y) = 0$ є рівнянням границі прямокутника Γ, причому у всіх чотирьох вершинах $(\pm a, b)$, $(\pm a, -b)$ прямокутника Γ функція $\omega(x,y)$ має невизначені похідні $\dfrac{\partial \omega(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \omega(x,y)}{\partial y}$. Тому при розв'язуванні крайових задач варіаційними методами з використанням таких функцій застосовують спеціальні методи інтегрування (наприклад, область інтегрування G замінюють іншою областю G_ε, яка повністю належить до області G і границя Γ_ε якої не має кутових точок, а $\rho(\Gamma, \Gamma_\varepsilon) \le \varepsilon$). Таким чином, першу проблему можна сформулювати так: як побудувати структуру наближеного розв'язку задачі (1), (2) без особливостей, якщо точний розв'язок задачі (1), (2) не має особливостей? У більш загальному формулюванні цієї проблеми потрібно вміти будувати такі структури наближених розв'язків, які би мали потрібні особливості в околах кутових точок.

Задача 2. Проблема продовження слідів нормальних похідних з границі у внутрішні точки області інтегрування G зі збереженням класу диференційовності $C^r(G)$. Нижче будемо використовувати нормалізоване рівняння границі Γ області G, тобто рівняння $\omega(x) = 0$, $x = (x_1, x_2)$, у якому функція $\omega(x)$ має властивості

$$\left.\frac{\partial^k \omega(x)}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = \delta_{k,1}, \qquad k = 0, \ldots, m, \tag{6}$$

де $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера; ν – нормаль до Γ.

Загальна формула, що використовується у структурному методі для побудови структур наближених розв'язків,

$$\tilde{u} = \sum_{s=0}^{m} F_s\left(x - \omega(x)\nabla\omega(x)\right)\frac{\omega^s(x)}{s!} \tag{7}$$

має такі властивості:

$$\left.\frac{\partial^p \tilde{u}}{\partial v^p}\right|_{\omega(x)=0} = F_p(x)\Big|_{\omega(x)=0}, \qquad p = 0, \ldots, m,$$

і такий недолік:

$$\tilde{u} \in C^{q}(G), \qquad q = \min\{q_0, \dots, q_m\},$$

де числа $q_0, \dots, q_m$ зв'язані з граничними функціями таким чином:

$$F_s \in C^{q_s}(\partial G), \qquad s = 0, \dots, m. \tag{8}$$

Тобто у формулі (7) клас диференційовності граничних функцій привноситься всередину області G.

Нагадаємо, що у класичному методі потенціалів граничні функції продовжуються усередину області з підвищенням класу диференційовності. Зокрема, у деяких випадках неперервні на границі функції після їх продовження належать до класу нескінченно диференційовних функцій усередині області. Наприклад, формула Пуассона, яка дає розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа у півплощині, продовжує граничну функцію так, що продовжена функція належить до класу нескінченне число разів диференційовних функцій. Формула Даламбера, яка дає розв'язок задачі Коші для рівняння коливання нескінченної струни, продовжує похідну $u^{(0,1)}(x,t)$ з лінії $t = 0$ у півплощину $t > 0$ так, що результуюча функція має неперервні другі частинні похідні.

Проблема продовження слідів з границі області усередину цієї області яскраво демонструється таким прикладом В. Л. Рвачова: написати структуру наближеного розв'язку задачі (див. рис. 1)

$$\Delta u(x,y) = 0, \qquad |x| < 1, \qquad |y| < 1, \tag{9}$$

$$u(x,y) = -a, \qquad (x,y) \in \Gamma_1, \tag{10}$$

$$u(x,y) = +a, \qquad (x,y) \in \Gamma_2, \qquad a > 0, \tag{11}$$

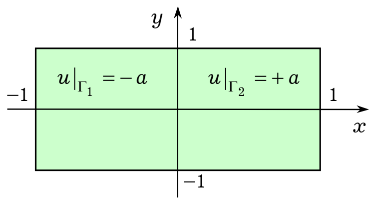

Рис. 1

$$\Gamma_1 = \{(x,y) : -1 \le x < 0,\ y = \pm 1; \quad x = -1, \quad -1 < y < 1\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) : 0 < x \le 1, \quad y = \pm 1; \quad x = 1, \quad -1 < y < 1\}.$$

У цьому прикладі треба розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа при умові, що на границі області у точках $(0, \pm 1)$ слід точного розв'язку має розриви першого роду. Якщо використовувати для цього формулу (7), то ці розриви з границі області перемістяться у внутрішні точки області. Це означає, що структура наближеного розв'язку цієї задачі, яка використовує формулу (7), не буде диференційовною у внутрішніх точках області інтегрування (у наведеному прикладі задачі (9)–(11) вона буде розривною на лінії $x = 0$).

Таким чином, другу проблему можна сформулювати так: як побудувати структуру наближеного розв'язку задачі (1), (2) без особливостей усередині області інтегрування, якщо точний розв'язок задачі (1), (2) або його похідна деякого порядку мають розрив першого роду у деяких точках границі області інтегрування?

Задача 3. Проблема зміни типу граничних умов у деяких довільних точках границі. Типовим прикладом задачі, у якій виникає зміна граничних умов, є задача теплопровідності, яка зводиться до рівняння Пуассона (див. рис. 2):

$$\Delta u(x,y) = f(x,y),$$

$$x \in (-a, a), \quad -b < y < b, \tag{12}$$

$$u(x,-b) = \varphi_1^{-}(x), \qquad -a \le x \le 0, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=-b} = \varphi_2^{+}(x), \qquad 0 < x < +a, \tag{14}$$

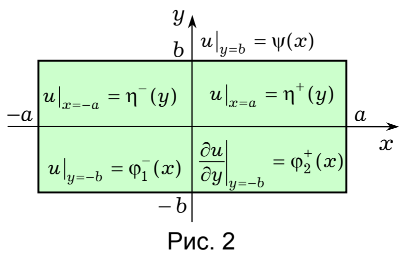

Рис. 2

$$u(-a,y)=\eta^{-}(y), \qquad -b \le y \le b\,, \tag{15}$$

$$u(+a,y)=\eta^{+}(y), \qquad -b \le y \le b\,, \tag{16}$$

$$u(x,b)=\psi(x), \qquad -a < x < a\,. \tag{17}$$

Ця проблема вирішується за допомогою R-функцій [7, с. 79] шляхом побудови рівнянь додатної

$$\Gamma_2 : \omega_2(x,y) > 0, \quad y > -\,b; \quad \omega_2(x,-\,b) = 0, \quad 0 < x < a\,,$$

у вигляді

$$\omega_2(x,y) = \left(-|y+b|\right) \wedge_\alpha \left[\frac{a^2}{4} - (y+b)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]$$

та від'ємної

$$\Gamma_1 : \omega_1(x,y) > 0, \quad y > -\,b; \quad \omega_1(x,-\,b) = 0, \quad -\,a \le x \le 0\,,$$

у вигляді

$$\omega_1(x,y) = \left(-|y+b|\right) \wedge_\alpha \left[\frac{a^2}{4} - (y+b)^2 - \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right]$$

частин границі $\gamma = \{-\,a \le x \le a,\ y = -\,b\}$, що автоматично (при $-1 < \alpha \le 1$) приводить до особливості у структурі наближеного розв'язку у точці $(0,-\,b)$, навіть у тому випадку, коли точний розв'язок не має особливості у вказаній точці.

Отже, третю проблему можна сформулювати так: як побудувати структуру наближеного розв'язку задач, аналогічних задачі (12)–(17), без особливостей усередині області інтегрування, якщо точний розв'язок задачі не має особливостей усередині області інтегрування, але у деяких точках границі змінюється тип граничних умов (Діріхле, Неймана тощо)?

Метою цієї роботи є аналіз деяких задач, які не були розв'язані (повністю або частково) в рамках структурного методу з використанням R-функцій В. Л. Рвачова і які можуть бути розв'язані (повністю або частково) за допомогою інтерлінації та інтерфлетації функцій багатьох змінних. Маються на увазі описані вище три проблемні задачі.

Основні положення структурного методу розв'язування задач математичної фізики. Будемо досліджувати методи побудови структур наближених розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними

$$Au \equiv \sum_{|s|=0}^{m} (-1)^{|s|} D^s\left(a_s(x) D^s u\right) = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G \subset \mathbb{R}^n\,, \tag{18}$$

$$B_j u(x) = \varphi_j(x), \qquad x \in \partial G, \quad j = 0,1,\ldots,n-1\,, \tag{19}$$

де m, n – задані натуральні числа; $a_s(x)$, $0 \le |s| \le m$; $f(x)$ – задані функції; $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $|s| = \sum_{k=1}^{n} s_k$; $D^s = \dfrac{\partial^{|s|}}{\partial x_{x_1}^{s_1} \ldots \partial x_{x_n}^{s_n}}$; $B_j u = \sum_{|s|=0}^{m_j} b_{j,s}(x) D^s u(x)$ – задані диференціальні оператори порядку m_j; G – задана область. Широко використовуваними методами розв'язування стаціонарних крайових задач (18), (19) і нестаціонарних крайових задач

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Au(x,t) = f(x,t), \qquad x \in G, \qquad 0 < t < T\,, \tag{20}$$

у яких шукана функція $u(x,t)$ задовольняє граничні умови

$$B_j u(x,t) = \varphi_j(x,t), \qquad x \in \partial D, \qquad j = 0,\ldots,n-1\,, \tag{21}$$

та початкову умову

$$u(x,0) = \psi(x), \qquad x \in G\,, \tag{22}$$

є варіаційні та проекційні методи.

Згідно з теорією структурного методу В. Л. Рвачова для знаходження наближеного розв'язку вказаних вище задач необхідно виконати такі кроки:

– побудувати структуру наближеного розв'язку задач (18), (19) або (20)–(22);

– знайти невідомі компоненти структури наближеного розв'язку (параметри, невідомі функції однієї змінної t тощо) шляхом розв'язання відповідних систем рівнянь (лінійних або нелінійних, алгебраїчних або трансцендентних), які можуть бути також системами диференціальних рівнянь, що повинні розв'язуватись сумісно з відповідними початковими умовами – умовами Коші.

Найбільш поширеним при побудові структур наближених розв'язків є метод, згідно з яким спочатку будують функцію $\Phi_0(x)$, яка точно задовольняє неоднорідні граничні умови (19) або (21) (див. формули (3) і (7)), і структуру наближеного розв'язку шукають у вигляді

$$u = \Phi_0 + B(\Phi),$$

де B – деякий оператор, який залежить від форми області G, диференціальних операторів $B_j u$, заданих у точках границі ∂G, функцій φ_j; функція Φ може бути довільною скалярною функцією $\Phi = \Phi(x)$ або вектором з довільними компонентами $\Phi = \Phi(x) = \left(\Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x)\right)$ у стаціонарному випадку і $\Phi = \left(\Phi_1(t), \dots, \Phi_N(t)\right)$ у нестаціонарному випадку. При цьому функція $B(\Phi)$ задовольняє однорідні граничні умови $B_j\left[B(\Phi)\right] = 0,\ x \in \partial D$. Важливою є вимога (яку важко задовольнити на практиці), щоб структура включала в себе точний розв'язок крайової задачі.

Метод R-функцій і структурний метод. Метод R-функцій В. Л. Рвачова спочатку створювався для розв'язання оберненої задачі аналітичної геометрії – за допомогою відомих рівнянь частин деякої лінії або поверхні побудувати рівняння цієї лінії або поверхні відповідно. Таке вміння будувати рівняння складних геометричних об'єктів за допомогою відомих рівнянь його частин знайшло своє застосування у багатьох розділах науки. Зокрема, одним із найважливіших його застосувань є загальний метод побудови структур наближених розв'язків крайових задач для випадку областей складної форми, границя яких складається з дуг відомих кривих (у двовимірному випадку) або з кусків відомих поверхонь (у тривимірному випадку).

Не зупиняючись детально на методі R-функцій, відмітимо лише, що у структурному методі він використовується в основному на стадії побудови рівнянь $\omega_i(x) = 0$ кусків ліній або поверхонь, з яких складається границя області G, а також на стадії побудови рівняння $\omega(x) = 0$ всієї границі області G.

Зауважимо, що в структурному методі неявно використовується таке припущення: в одній точці на границі плоскої області можуть перетинатись лише дві лінії – частини границі, або дві лінії, що належать області інтегрування. Про це ніде явно не написано, але аналіз публікацій свідчить власне про це. У наведеній вище задачі 3 потрібно забезпечувати відповідні співвідношення на кількох лініях, що мають спільні точки перетину у середині області або на границі. Класична схема В. Л. Рвачова побудови структур наближених розв'язків не створила загального підходу до розв'язування такого роду задач.

Інтерлінація та інтерфлетація і мішана апроксимація функцій створювалися як апарат наближення функцій багатьох змінних за допомогою інформації про них у вигляді слідів та слідів їх похідних (до заданого порядку) на фіксованій системі ліній або поверхонь. Пізніше стало зрозумілим, що цей апарат може бути ефективно використаний для побудови структур наближених розв'язків крайових задач у випадку областей складної форми і різних типів граничних умов.

Дамо означення структури наближеного розв'язку еліптичних крайових задач з двома змінними, яке включає означення структури у структурному методі В. Л. Рвачова як частковий випадок:

$$Lu(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

$$B_j u(x,y) = \varphi_j(x,y), \qquad (x,y) \in \partial D. \tag{23}$$

Означення 1. Структурою наближеного розв'язку крайової задачі (23) будемо вважати довільну функцію $F\left(x, y, \{C_k\}, \{F_{1,i}(x)\}, \{F_{2,j}(y)\}, \{\Phi_p(x,y)\}\right)$, яка задовольняє вказані граничні умови і залежить також від деякої системи невідомих сталих C_k, $k = 1,\dots,N$, невідомих функцій $F_{1,i}(x)$, $i = 1,\dots,M$, $F_{2,j}(y)$, $j = 1,\dots,N$, однієї змінної (x або y) та (або) невідомих функцій $\Phi_p(x,y)$, $p = 1,\dots,P$, двох змінних.

Узагальнення цього означення на випадок крайових задач більшої розмірності або на випадок початково-крайових задач для диференціальних рівнянь параболічного типу тощо є, на наш погляд, досить прозорим.

Фактично тепер є очевидним те, що структурний метод наближеного розв'язування крайових задач, який використовує R-функції В. Л. Рвачова, є частковим випадком структурного методу, що використовує поліноміальну, раціональну, тригонометричну інтерлінацію та інтерфлетацію, сплайн- інтерлінацію або сплайн-інтерфлетацію, інтерлінацію з використанням R-функцій, мішану апроксимацію функцій двох і більше змінних операторами, що діють на одну змінну або більше змінних (у випадку просторових задач), тощо. Адже інтерлінація та інтерфлетація функцій дозволяють точно задовольняти граничні умови (Діріхле, Неймана, мішані тощо) без використання R-функцій.

Наведемо деякі твердження теорії інтерлінації та інтерфлетації функцій багатьох змінних і проаналізуємо методи, що дозволяють розв'язати повністю або частково вказані вище три задачі, які в рамках структурного методу не знайшли свого загального розв'язання.

Означення інтерлінації та інтерфлетації функцій. У теорії наближення функцій двох і більше змінних $f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$, $n \ge 2$, в останні десятиліття інтенсивно розвивається розділ, присвячений побудові, дослідженню і деяким застосуванням операторів, які відновлюють (можливо, наближено) функції $f(x)$ за відомими їх слідами та слідами їх частинних похідних до фіксованого порядку N на M, де $M \ge 2$, m-вимірних $(0 \le m < n)$ поверхнях в $\mathbb{R}^n$ (з метою уніфікації тверджень будемо вважати точки нуль-вимірними поверхнями, а лінії − одновимірними поверхнями). У випадку $m = 0$, $n \ge 1$ інформація про функцію $f(x)$ задається в M точках (полюсах) і такі оператори наближення називаються операторами *інтерполяції* (*inter* − між, *pol* − полюс, точка). У випадку $m = 1$, $n \ge 2$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами $f(x)$ та слідами її частинних похідних $\dfrac{\partial^{|s|} f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}$, $|s| = s_1 + \dots + s_n$, $1 \le |s| \le N$, на M лініях і такі оператори будемо називати *операторами інтерлінації* (*inter* − між, *line* − лінія).

У випадку $2 \le m \le n-1$, $n \ge 3$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами $f(x)$ і слідами її похідних $\dfrac{\partial^{|s|} f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}$, $|s| = s_1 + \dots + s_n$, $1 \le |s| \le N$, на M поверхнях в $\mathbb{R}^n$, і такі оператори наближення будемо називати *операторами інтерфлетації* (*inter* − між, *flat* − поверхня плоска).

У зарубіжній літературі для операторів інтерлінації та інтерфлетації використовується декілька назв. Найпоширенішою є назва «blending function interpolation» − «мішана інтерполяція функцій».

Враховуючи, що інтерлінація та інтерфлетація є природними узагальненнями інтерполяції, в теорії інтерлінації, інтерфлетації використовуємо термінологію з теорії інтерполяції (інтерполююча функція − інтерлінуюча функція − інтерфлетуюча функція, вузли інтерполяції − лінії інтерлінації − поверхні інтерфлетації тощо).

Дамо означення інтерфлетації функцій у загальному випадку операторів $B_\alpha f(x)$, $\alpha = 0,\dots,m-1$.

Нехай Γ_k, $k = 1,\dots,M$, − система ν-вимірних поверхонь, $0 \le \nu \le n-1$, в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$. Функцію $f(x)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, будемо вважати визначеною разом із системою операторів (диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних) $B_{k,\alpha} f(x)$, $\alpha = 0,\dots,m-1$, у точках Γ_k, $k = 1,\dots,M$.

Означення 2. Оператор $L_{n,\nu,M}(f;\{\Gamma_q\};x)$ з властивостями

$$B_{k,\alpha} L_{n,\nu,M}(f;\{\Gamma_q\};x)\Big|_{\Gamma_k} = B_{k,\alpha} f(x)\Big|_{\Gamma_k} = g_{k,\alpha}(x)\Big|_{\Gamma_k},$$
$$k = 1,\dots,M, \qquad \alpha = 0,\dots,m-1, \tag{24}$$

будемо називати оператором інтерфлетації (інтерполяції − при $\nu = 0$, інтерлінації − при $\nu = 1$) функції f зі слідами операторів $B_{k,\alpha} f(x)$, $\alpha = 0,\dots,m-1$, на системі ν-вимірних поверхонь Γ_k, $k = 1,\dots,M$.

Нехай $B_{k,\alpha} f(x)\Big|_{\Gamma_q} = g_{k,\alpha}(x)\Big|_{\Gamma_k}$, $k = 1,\dots,M$, $\alpha = 0,\dots,m-1$, і оператор інтерфлетації має вигляд

$$L\big(f;\{\Gamma_k\};\{B_{k,\alpha}\};\{g_{k,\alpha}\};x\big) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{\beta=0}^{m-1} P_{i,\beta}\big(f;\{\Gamma_k\};\{B_{k,\alpha}\};\{g_{k,\alpha}\};x\big)\psi_{i,\beta}(x),$$

де $\psi_{i,\beta}(x)$ − деяка система допоміжних функцій, побудова котрих залежить від параметрів поверхонь $\{\Gamma_k\}$ і операторів $B_{k,\alpha}$ і не залежить від функції $f(x)$, а $P_{i,\beta}\big(f;\{\Gamma_k\};\{B_{k,\alpha}\};\{g_{k,\,\alpha}\};x\big)$ − деяка система лінійних операторів (диференціальних, інтегральних або інтегрально-диференціальних тощо).

Означення 3. Оператор інтерфлетації $L\big(f;\{\Gamma_k\};\{B_{k,\alpha}\};\{g_{k,\alpha}\};x\big)$ з властивостями (24) будемо називати лінійним оператором поліноміальної інтерфлетації, сплайн-інтерфлетації, тригонометричної інтерфлетації, раціональної інтерфлетації, інтерфлетації за допомогою R-функцій тощо, якщо допоміжні функції $\psi_{i,\beta}(x)$ (незалежні від f) є відповідно алгебраїчними поліномами, сплайнами, тригонометричними поліномами, раціональними функціями, функціями, побудованими за допомогою R-функцій тощо.

Це означення повністю поширюється на випадок довільної системи поверхонь в $\mathbb{R}^n$ різної розмірності ν.

Приклади інженерних задач, які приводять до інтерлінації функцій.

1°. *Картографія дна океану за даними гідролокації.* Задача побудови поверхні дна океану за даними гідролокації, що одержані на різних лініях − курсах корабля з гідролокатором, − є типовою задачею інтерлінації функцій двох змінних за даними її слідами на декількох лініях. Для того щоб побудувати рівняння $z = f(x,y)$ рельєфу дна океану (тут x, y − координати змінної точки на поверхні океану (поточні координати) в деякій системі координат, вибраній дослідником; z − віддаль від поверхні океану в точці з координатами (x,y) до дна), використовуються сліди $\varphi_k(x,y)\big|_{\Gamma_k} =$

$= f(x,y)|_{\Gamma_k}$ функції f (дані гідролокації) на M, $M \geq 2$, лініях Γ_k, $k = 1,\ldots,M$, − курсах корабля.

За вказаними лініями і функціями $\varphi_k(x,y)$ (або їх значеннями в деяких точках ліній Γ_k) можна побудувати функцію $f(x,y)$ на основі однієї з формул інтерлінації. Тому побудову функції $f(x,y)$ та її ліній рівня можна доручити бортовій ПЕОМ. Вибір курсів корабля визначається дослідником.

2°. *Побудова поверхні космічного тіла за даними радіолокації на системі ліній.* Нехай промінь радіолокатора рухається вздовж деякої наперед вибраної дослідником системи ліній Γ_k, $k = 1,\ldots,M$, на космічному об'єкті, що вивчається (або просто на достатньо віддаленому об'єкті). Промінь відбивається від об'єкта, що дозволяє одержувати віддаль до точки відбиття, тобто значення функції $z = f(x,y)$ у системі координат $Oxyz$, вибраній відповідним чином; z − віддаль від точки з координатами (x, y) на об'єкті до радіолокатора (на вказаних лініях-курсах променя локатора). Обробка такої інформації часто повинна проходити досить швидко і, значить, тут треба застосувати математичний апарат, що найбільш природно використовує одержувані дані, тобто інтерлінацію. Такий підхід можна використати, зокрема, для опису поверхні Венери, яку не видно в оптичний телескоп. Задача у описаній постановці є деякою ідеалізацією реальної ситуації (див. приклад ***6°***).

3°. *Проектування корпусів літаків, суден, автомобілів.* Інтерлінація функцій у багатьох випадках може бути застосована для опису поверхонь корпусів літаків, суден, автомобілів (див. [1, 2]). У сучасній техніці, особливо в авіа- та суднобудуванні, в космічній техніці, широко використовують конструкції складної форми, які розраховуються і проектуються як оболонки. У методах апроксимації і задання серединних поверхонь цих оболонок зручно використовувати математичний апарат теорії сплайн-інтерполяції, сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерфлетації функцій тощо.

Рівняння $z = f_i(u,v)$, $i = 1,2,\ldots$, i-ї частини (у відповідній параметричній формі задання) такої поверхні повинно забезпечувати неперервність поверхні між різними частинами та необхідні аеродинамічні властивості і технологічні вимоги.

4°. *Планування експерименту для відновлення функцій двох змінних.* На практиці, при плануванні і проведенні експериментів, широко використовується наступний підхід. Нехай потрібно знайти формулу $z = f(x,y)$, що описує деяку характеристику процесу, яка залежить від двох змінних (параметрів) x та y. Для цього звичайно фіксують значення $x_1,\ldots,x_m$ параметра x і для цих значень $x = x_k$ знаходять функції $\psi_k(y) = f(x_k,y)$, $k = 1,\ldots,m$, (функції $\psi_k(y)$ можуть бути подані у вигляді графіків, накреслених самописом або наближено їх значеннями в декількох точках $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$). Звичайно змінні x та y можна поміняти місцями: фіксуємо значення $y_1,\ldots,y_n$ параметра y і для цих значень $y = y_\ell$ знаходимо функції $\varphi_\ell(x) = f(x,y_\ell)$, $\ell = 1,\ldots,n$. Отриману інформацію використовуємо для побудови шуканої функції $f(x,y)$ у вигляді полінома Лаґранжа від змінних x та y або у вигляді деякої кусково-поліноміальної функції (сплайна), яка інтерполює дані на вибраній множині вузлів (x_k, y_ℓ), або у вигляді згладжуваного сплайна, коефіцієнти якого знаходимо методом найменших квадратів і т. п.

Важливо те, що на практиці часто використовують або тільки функції $\psi_k(y)$, або тільки функції $\varphi_\ell(x)$. Використання інтерлінації дозволяє врахувати і функції $\psi_k(y)$, і функції $\varphi_\ell(x)$ одночасно, що, природно, дає більш точні наближення до функції $f(x,y)$. Легко зауважити, що для випадку, коли наближувана функція має вигляд

$$f(x,y) = g_1(a_1x + b_1y + c_1) + g_2(a_2x + b_2y + c_2), \qquad \Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

раціональніше було би здійснювати вибір вузлів $(x_k,\, y_\ell)$ так, щоб вони лежали на перетині прямих

$$a_1x + b_1y = \xi_k - c_1,$$

$$a_2x + b_2y = \eta_\ell - c_2,$$

наприклад, $\xi_1 < \ldots < \xi_m$, $\eta_1 < \ldots < \eta_n$:

$$x_{k,\ell} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\xi_k - c_1 & b_1\\ \eta_\ell - c_2 & b_2\end{vmatrix}, \quad y_{k,\ell} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}a_1 & \xi_k - c_1\\ a_2 & \eta_\ell - c_2\end{vmatrix}, \quad k = 1,\ldots,m, \quad \ell = 1,\ldots,n.$$

Тобто треба проводити експеримент так, щоб знаходити значення функції $f(x,y)$ (або її сліди) не на серії прямих, паралельних осям координат, а на серії прямих (або кривих) більш загального положення. Для обробки такої інформації треба мати математичний апарат, який дозволив би будувати відповідні наближення за допомогою цієї інформації. Таким апаратом є інтерлінація функцій.

Приклади інженерних задач, які приводять до інтерфлетації.

5°. *Наближення функцій трьох змінних за допомогою томограм, що надходять з комп'ютерного томографа.* Припустимо, що при дослідженні внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою томографа (медичного томографа при дослідженні тіла пацієнта або технічного томографа при дослідженні об'єктів на митниці тощо) отримано томограми T_i, $i = 1,\ldots,M$, які є слідами деякої функції $f(x,y,z)$ на відповідній системі площин Π_i, $i = 1,\ldots,M$, що перерізають даний об'єкт. Задача полягає у відновленні (можливо, наближеному) внутрішньої структури тіла в інших точках досліджуваної області (наприклад, у точках іншої площини Π, що перерізає об'єкт, але не збігається ні з однією із заданих площин). Функція $f(x,y,z)$ може характеризувати поглинання проникаючого опромінення при його проходженні через об'єкт дослідження. При невеликих інтенсивностях опромінення $f(x,y,z)$ може вважатися густиною (щільністю) тіла в точці (x,y,z).

Зауважимо, що на сьогодні існує потужна система комп'ютерної графіки 3D Max, яка дозволяє відновлювати внутрішню структуру тривимірного тіла лише за відомими його перерізами на системі площин, паралельних одній площині. Всі сучасні комп'ютерні томографи мають цей недолік. Але використання одночасно даних про перерізи тіла на кількох системах паралельних площин вимагає застосування операторів інтерфлетації або мішаної апроксимації функцій трьох змінних.

6°. *Картографія поверхні планети за даними радіолокації на системі смуг.* Припустимо, що штучний супутник планети рухається навколо планети на різних траєкторіях (орбітах). Отримувані від супутника дані надають інформацію про досліджувану поверхню планети (наприклад, фотографії поверхні планети вздовж орбіти) не на лініях, а на смугах вздовж ліній, які є проекціями орбіти супутника на поверхню планети. У припущенні достатньо великої висоти польоту супутника можна вважати, що всі точки даної смуги знаходяться в однакових умовах відносно променя локатора (або відносно осі об'єктиву фотоапарата). Задача полягає у відновленні (можливо, наближеному) рельєфу поверхні між заданими смугами за відомими рельєфами поверхні на цих смугах (див. [3]).

Побудова операторів інтерлінації на системі ліній. ***Побудова операторів інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих.*** Нехай задано дві множини взаємно перпендикулярних прямих, які, не зменшуючи загальності, вважаємо паралельними відповідним осям координат:

$$\Gamma_{1i} : x_1 = x_{1i}, \qquad i = 1,\dots,M,$$

$$\Gamma_{2j} : x_2 = x_{2j}, \qquad j = 1,\dots,N.$$

Нехай функція $f(x) = f(x_1, x_2) \in C^r(\mathbb{R}^2)$, $r \ge 1$, задана своїми слідами на цих прямих:

$$f\big|_{x_1 = x_{1i}} = f(x_{1i}, x_2) = \varphi_{0i}(x_2), \qquad i = 1,\dots,M,$$

$$f\big|_{x_2 = x_{2j}} = f(x_1, x_{2j}) = \psi_{0j}(x_1), \qquad j = 1,\dots,N, \tag{25}$$

і $f(x_{1i}, x_{2j}) = f_{ij}$. Тоді, враховуючи, що $f \in C^r(\mathbb{R}^2)$, можна довести, що справджуються рівності (див [6])

$$\varphi_{0i}(x_{2j}) = \psi_{0j}(x_{1i}) = f_{ij}, \qquad i = 1,\dots,M, \quad j = 1,\dots,N. \tag{26}$$

Введемо до розгляду інтерполяційні оператори Лаґранжа $E_M^{(1)}(f;x)$ та $E_N^{(2)}(f;x)$ за змінними x_1 та x_2 відповідно:

$$E_M^{(1)}(f;x) = \sum_{i=1}^{M} f(x_{1i}, x_2) e_{1Mi}(x_1),$$

$$E_N^{(2)}(f;x) = \sum_{j=1}^{N} f(x_1, x_{2j}) e_{2Nj}(x_2),$$

де $e_{1Mi}(x_1)$, $i = 1,\dots,M$, $e_{2Nj}(x_2)$, $j = 1,\dots,N$, – базисні поліноми Лаґранжа степенів $M-1$, $N-1$ відповідно з такими властивостями:

$$e_{1Mi}(x_{1k}) = \delta_{ki}, \quad k, i \in \{1,2,\dots,M\}, \qquad e_{2Nj}(x_{2\ell}) = \delta_{j\ell}, \quad j, \ell \in \{1,2,\dots,N\}.$$

Для цих базисних поліномів можна написати явні формули:

$$e_{1Mi}(x_1) = \frac{\prod\limits_{k=1,\ k\ne i}^{M} (x_1 - x_{1k})}{\prod\limits_{k=1,\ k\ne i}^{M} (x_{1i} - x_{1k})}, \qquad e_{2Nj}(x_2) = \frac{\prod\limits_{\ell=1,\ \ell\ne j}^{N} (x_2 - x_{2\ell})}{\prod\limits_{\ell=1,\ \ell\ne j}^{N} (x_{2j} - x_{2\ell})}.$$

Оператори $E_M^{(1)}, E_N^{(2)}$ мають такі властивості ($\varphi_{0,k}, \psi_{0,\ell}$ – задані функції):

$$E_M^{(1)}(f;x)\big|_{x_1 = x_{1k}} = f(x_{1k}, x_2) = \varphi_{0k}(x_2), \qquad k = 1,\dots,M,$$

$$E_N^{(2)}(f;x)\big|_{x_2 = x_{2\ell}} = f(x_1, x_{2\ell}) = \psi_{0\ell}(x_1), \qquad \ell = 1,\dots,N. \tag{27}$$

Очевидно, що

$$E_M^{(1)}\big(E_N^{(2)}(f;x);x\big) = E_N^{(2)}\big(E_M^{(1)}(f;x);x\big) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} f_{ij} e_{1Mi}(x_1) e_{2Nj}(x_2). \tag{28}$$

Теорема 1 [2]. *Оператор*

$$E_{MN}(f;x) = E_M(f;x) + E_N(f;x) - E_M\big(E_N(f;x);x\big) \tag{29}$$

інтерлінує функцію $f(x)$ *на прямих* Γ_{1i} *та на прямих* Γ_{2j}:

$$E_{MN}(f;x)\big|_{\Gamma_{1i}} = \varphi_{0i}(x_2), \qquad i = 1,\dots,M,$$

$$E_{MN}(f;x)\big|_{\Gamma_{2j}} = \psi_{0j}(x_1), \qquad j = 1,\dots,N. \tag{30}$$

Для практики може бути корисним також детальний запис оператора E_{MN}:

$$E_{MN}(f;x) = \sum_{i=1}^{M} f(x_{1i},x_2)e_{1Mi}(x_1) + \sum_{j=1}^{N} f(x_1,x_{2j})e_{2Nj}(x_2) -$$

$$-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} f(x_{1i},x_{2j})e_{1Mi}(x_1)e_{2Nj}(x_2). \tag{31}$$

Позначимо залишкові члени наближення функції $f(x)$ операторами $E_M^{(1)}(f;x)$, $E_N^{(2)}(f;x)$, $E_{MN}(f;x)$ так:

$$R_M^{(1)}(f;x) = f(x) - E_M^{(1)}(f;x),$$

$$R_N^{(2)}(f;x) = f(x) - E_N^{(2)}(f;x),$$

$$R_{MN}(f;x) = f(x) - E_{MN}(f;x).$$

Тоді виконується така

Теорема 2 [**2**]. *Для залишку* $R_{MN}(f;x)$ *справджується формула*

$$R_{MN}(f;x) = R_M^{(1)}\big(R_N^{(2)}(f;x);x\big). \tag{32}$$

Наслідок 1. *Якщо* $f(x) \in C^{M,M}(\mathbb{R}^2)$, *то*

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \qquad \exists\, \eta(x) = (\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$R_{MN}(f;x) = \frac{f^{(M,N)}(\eta)}{(M)!(N)!}\prod_{i=1}^{M}(x_1 - x_{1i})\prod_{j=1}^{N}(x_2 - x_{2j}). \tag{33}$$

Наслідок 2. *З формул* (32), (33) *безпосередньо випливає, що оператори* E_{MN} *є точними на поліномах від двох змінних степеня* $M-1$ *за* x_1 *та* $N-1$ *за* x_2 ($x^\alpha =: x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$):

$$E_{MN}(x^\alpha;x) \equiv x^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2), \quad 0 \le \alpha_1 \le M-1, \quad 0 \le \alpha_2 \le N-1. \tag{34}$$

Висновок 1. З формули (34) випливає, що оператор інтерлінації (31) може дати малу похибку наближення до $f(x)$ при збільшенні M, $M \to \infty$, і при сталому N, $N = \text{const}$, або при $M = \text{const}$ і $N \to \infty$.

Приклад 1. Оператор

$$O_2 f(x) = f(0,x_2) + f(x_1,0) - f(0,0), \qquad x = (x_1,x_2),$$

має такі властивості:

$$O_2 f(0,x_2) = f(0,x_2), \qquad O_2 f(x_1,0) = f(x_1,0),$$

тобто цей оператор інтерлінує функцію $f(x)$ на двох прямих − осях координат.

При цьому для залишку $R_2 f(x) = (I - O_2) f(x)$ справджується рівність

$$R_2 f(x) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f^{(1,1)}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 .$$

Приклад 2. Оператор

$$O_3 f(x,t) = f(x,0) - \sum_{i=1}^{2} h_{Ni}(x) f(x_i, 0) + \sum_{i=1}^{2} h_{Ni}(x) f(x_i, t),$$

$$x \in \mathbb{R}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad h_{Nis}(x_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2,$$

має такі властивості: $f(x,t) \in C^r(\mathbb{R}^2) \Rightarrow O_3 f(x) \in C^r(\mathbb{R}^2)$, $r \geq 2$,

$$f\Big|_{t=0} = f(x,0), \qquad f\Big|_{x=x_i} = f(x_i, t), \qquad i = 1, 2 .$$

При цьому для залишку $R_3 f(x) = (I - O_3) f(x)$ справджується рівність

$$R_3 f(x,t) = \sum_{i=1}^{2} h_{Ni}(x) \int_{x_i}^{x} \int_0^{t} f^{(2,1)}(\xi, \tau)(x_i - \xi)\, d\xi\, d\tau .$$

Цей оператор інтерлінує функцію $f(x)$ на трьох прямих: $x = x_i$, $i = 1, 2$, $t = 0$.

Приклад 3. Оператор

$$O_{40} f(x) = \sum_{k=1}^{2} h_k \left(\frac{x_1 - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} \right) f(x_{1k}, x_2) + \sum_{\ell=1}^{2} h_\ell \left(\frac{x_2 - x_{21}}{x_{22} - x_{21}} \right) f(x_1, x_{2\ell}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{2} \sum_{\ell=1}^{2} h_k \left(\frac{x_1 - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} \right) h_\ell \left(\frac{x_2 - x_{21}}{x_{22} - x_{21}} \right) f(x_{1k}, x_{2\ell}),$$

$$x = (x_1, x_2), \qquad h_1(t) = 1 - t, \qquad h_2(t) = t,$$

інтерлінує функцію $f(x)$ на чотирьох прямих: $x_1 = x_{1k}$, $k = 1, 2$, $x_2 = x_{2\ell}$, $\ell = 1, 2$, тобто має властивості:

$$O_{40} f\Big|_{x_1 = x_{1k}} = f(x_{1k}, x_2), \qquad k = 1, 2,$$

$$O_{40} f\Big|_{x_2 = x_{2\ell}} = f(x_1, x_{2\ell}), \qquad \ell = 1, 2 .$$

При цьому для залишку $R_{40} f(x) = (I - O_{40}) f(x)$ справджується рівність

$$R_{40} f(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \sum_{\ell=1}^{2} h_k \left(\frac{x_1 - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} \right) h_\ell \left(\frac{x_2 - x_{21}}{x_{22} - x_{21}} \right) \int_{x_{1k}}^{x_1} \int_{x_{2\ell}}^{x_2} f^{(2,2)}(\xi, \eta) \frac{(x_{1k} - \xi)(x_{2\ell} - \eta)}{1!\,1!}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_{x_{11}}^{x_{12}} \int_{x_{21}}^{x_{22}} f^{(2,2)}(\xi, \eta) G_1(x_1, \xi) G_2(x_2, \eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Явний вигляд для функцій $G_1(x_1, \xi)$ та $G_2(x_2, \eta)$ можна знайти в [2].

Зауважимо (див. [1, 2]), що аналогічні оператори можна побудувати для поліноміальної інтерлінації на M, $M \geq 2$, довільних перетинних прямих, не обов'язково перпендикулярних чи паралельних:

$$\Gamma_k : \omega_k(x) =: x_1 a_k + x_2 b_k - c_k = 0, \qquad a_k^2 + b_k^2 = 1, \qquad k = 1, \ldots, M .$$

Оператори поліноміальної інтерлінації істотно використовуються при побудові сплайн-інтерлінантів.

Побудова операторів інтерфлетації. Побудуємо оператор інтерфлетації $P_{m,n}f(x),\ x=(x_1,x_2,x_3)$, сліди $D_{x_\mu}^p P_{m,n} f\big|_{x_\mu=\alpha_\mu}$ якого на фіксованій системі площин $x_i=\alpha_i,\ i=1,\dots,n,\ n\ge 3$, паралельних координатним, збігаються зі слідами $D_{x_\mu}^p f\big|_{x_\mu=\alpha_\mu}$, $\mu=1,\dots,n$, функції $f(x)$, що описує внутрішню структуру тривимірного тіла (щільність тіла в точці, коефіцієнт поглинання рентгенівських променів тощо), на цих площинах. Нехай $i=1,\dots,n,\ k=(k_1,\dots,k_i),\ a_i^k=(a_{k_1},\dots,a_{k_i})$; запис $x=a_k^i$ означає, що у векторі $x=(x_1,\dots,x_n)$ треба взяти $x_{k_j}=a_{k_j},\ j=1,\dots,i,\ 1\le k_1<\ldots<k_i\le n$.

Теорема 3 [2]. *Нехай* $f(x)\in C^r(\mathbb{R}^n),\ r\ge n(m-1)$. *Тоді оператор*

$$L_{m,n}f(x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{1\le k_1<\ldots<k_i\le n}\ \sum_{s_{k_1},\dots,s_{k_i}=0}^{m-1}\prod_{j=1}^{i}\frac{(x_{k_j}-a_{k_j})^{s_{k_j}}}{s_{k_j}!}D_{x_{k_1},\dots,x_{k_i}}^{s_{k_1},\dots,s_{k_i}}f(x)\Big|_{x=a_k^i}\qquad(35)$$

задовольняє умови

$$D_{x_\mu}^p P_{m,n} f\big|_{x_\mu=\alpha_\mu}=D_{x_\mu}^p f\big|_{x_\mu=\alpha_\mu},\qquad \mu=1,\dots,n,\qquad p=0,1,\dots,m-1.$$

Теорема 4 [2]. *Нехай* $f(x)\in C^{m,\dots,m}(\mathbb{R}^n)$. *Тоді для залишку* $r_{m,n}f(x)=$ $=(I-P_{m,n})f(x)$ *виконується рівність*

$$r_{m,n}f(x)=\int_{a_1}^{x_1}\dots\int_{a_n}^{x_n}D_{t_1,\dots,t_n}^{m,\dots,m}f(t_1,\dots,t_n)\prod_{j=1}^{n}\frac{(x_j-t_j)^{m-1}}{(m-1)!}\,dt_1\dots dt_n.$$

Зауваження 1. Хоч у формулі (35) для оператора $L_{m,n}f(x)$ використовуються частинні похідні різних порядків у точках перерізу різних площин $x_j=a_j,\ j\in\{1,\dots,n\}$, або в кутовій точці $(a_1,\dots,a_n)$:

$$D_{x_{k_1}\dots,\ x_{k_1}}^{s_{k_1},\dots,s_{k_1}}f(x)\Big|_{x=a_k^i},$$

$$g_{j,p}(x)=D_{x_j}^p f(x)\Big|_{x_j=a_j},\qquad j=1,\dots,n,\qquad p=0,1,\dots,m-1,$$

але насправді всі ці дані можна отримати з $m\times n$ слідів. Наприклад,

$$D_{x_1,x_2}^{s_1,s_2}f(x)\Big|_{\substack{x_1=a_1,\\ x_2=a_2}}=D_{x_2}^{s_2}g_{1,s_1}(a_1,x_2,x_3,\dots,x_n)\Big|_{x_2=a_2}=$$

$$=D_{x_1}^{s_1}g_{2,s_2}(x_1,a_2,x_3,\dots,x_n)\Big|_{x_1=a_1},\qquad s_1,s_2=0,1,\dots,m-1.$$

Це зауваження справджується для всіх формул інтерфлетації, що аналізуються нижче.

Для практики важливим є випадок $m=1$. У цьому випадку маємо

$$P_{1,2}f(x_1,x_2)=f(a_1,x_2)+f(x_1,a_2)-f(a_1,a_2),$$

$$P_{1,2}f(x_1,x_2)\big|_{x_j=a_j}=f(x_1,x_2)\big|_{x_j=a_j},\qquad j=1,2,$$

$$P_{1,3}f(x_1,x_2,x_3)=f(a_1,x_2,x_3)+f(x_1,a_2,x_3)+f(x_1,x_2,a_3)-$$

$$-f(x_1,a_2,a_3)-f(a_1,x_2,a_3)-f(a_1,a_2,x_3)+f(a_1,a_2,a_3),$$

$$P_{1,3}f(x_1,x_2,x_3)\big|_{x_j=a_j}=f(x_1,x_2,x_3)\big|_{x_j=a_j},\qquad j=1,2,3.$$

Сформулюємо метод розв'язування *задачі 1.*

Інтерлінація на прямих, паралельних координатним осям, і на границі довільної області $G \subset \mathbb{R}^2$**.**

З практичної точки зору важливою є побудова операторів інтерлінації на лініях ректангуляції та тріангуляції в областях складної форми, обмежених дугами відомих кривих. Нижче будемо вважати, що $G \subset \mathbb{R}^2$ − область на площині, границя якої ∂G є об'єднанням дуг відомих кривих. Для спрощення викладу матеріалу припустимо, що область G повністю розміщена в прямокутнику $[a,b]\times[c,d]$. Розіб'ємо G на підобласті прямими

$$x = x_k, \quad k = 0,\dots,M_1, \qquad y = y_\ell, \quad \ell = 0,\dots,M_2,$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_1} = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{M_2} = d.$$

В результаті область G розіб'ється на підобласті, які можуть бути прямокутниками $R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}] \subset G$ або чотирикутниками:

$$R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}(x)] \subset G, \quad R_{i,j}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_j(x), y_{j+1}] \subset G,$$

$$R_{i,j}^{(3)} = [x_i(y), x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}] \subset G, \quad R_{i,j}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}(y)]\times[y_j, y_{j+1}] \subset G,$$

у яких три прямі паралельні осям координат, а одна − криволінійна сторона є частиною границі області ∂G.

Крім того, підобласті, на які розбивається область G, можуть бути трикутниками:

$$T_{i,j}^{(1)} = \{(x,y) \mid x \ge x_i,\ y \ge y_j,\ y \le \eta_{j+1}(x),\ \eta'_{j+1}(x) < 0,\ x_i < x < x_{i+1}\},$$

$$T_{i,j}^{(2)} = \{(x,y) \mid x \ge x_i,\ y \le y_j,\ y \ge \eta_{j-1}(x),\ \eta'_{j-1}(x) > 0,\ x_i < x < x_{i+1}\},$$

$$T_{i,j}^{(3)} = \{(x,y) \mid x \le x_i,\ y \ge y_j,\ y \le \eta_{j+1}(x),\ \eta'_{j+1}(x) > 0,\ x_{i-1} < x < x_i\},$$

$$T_{i,j}^{(4)} = \{(x,y) \mid x \le x_i,\ y \le y_j,\ y \ge \eta_{j-1}(x),\ \eta'_{j-1}(x) < 0,\ x_{i-1} < x < x_i\},$$

у яких одна зі сторін є криволінійною (взагалі кажучи) частиною границі ∂G області G.

Запишемо формулу для інтерлінації на чотирикутнику $R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}]\times$ $\times[y_j, y_{j+1}(x)] \subset G$, одна зі сторін якого є криволінійною частиною границі ∂G області G:

$$O_{i,j}^{(1)} f(x,y) = (F_1 + F_2 - F_1F_2) f(x,y),$$

$$F_1 f(x,y) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} f(x, y_{j+1}(x)),$$

$$F_2 f(x,y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}, y),$$

$$F_1F_2(x,y) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} F_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} F_2 f(x, y_{j+1}(x)).$$

Твердженння 1. *Оператор* $O_{i,j}^{(1)} f(x,y)$ *інтерлінує функцію* $f(x,y) \in$ $\in C(R_{i,j}^{(1)})$ *на границі чотирикутника* $R_{i,j}^{(1)}$ *з криволінійною стороною*: $O_{i,j}^{(1)} f(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \partial R_{i,j}^{(1)}$, *тобто*

$$O_{i,j}^{(1)} f(x_q, y) = f(x_q, y), \qquad q = i, i+1,$$

$$O_{i,j}^{(1)} f(x, y_j) = f(x, y_j), \qquad O_{i,j}^{(1)} f(x, y_{j+1}(x)) = f(x, y_{j+1}(x)).$$

Аналогічно будуються інтерлінанти, що інтерлінують функцію $f(x,y)$ на сторонах чотирикуників $R_{i,j}^{(2)}$, $R_{i,j}^{(3)}$, $R_{i,j}^{(4)}$ з криволінійними сторонами.

Теорема 5. *Нехай оператори* $OR_{i,j}^{(q)}f(x,y)$, $q = 0,1,\ldots,4$, *інтерлінують функцію* $f(x,y)$ *на сторонах чотирикутників* $R_{i,j}^{(q)}$, $q = 0,1,\ldots,4$, *де* $R_{i,j}^{(0)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G \subseteq [a,b] \times [c,d]$, *а інші типи чотирикутників з однією криволінійною стороною означені вище. Нехай оператори* $OT_{i,j}^{(q)}f(x,y)$, $q = 1,\ldots,4$, *інтерлінують функцію* $f(x,y)$ *на сторонах відповідних трикутників* $T_{i,j}^{(q)} \subset G$ *з криволінійною (взагалі кажучи) гіпотенузою. Тоді оператор*

$$O_G f(x,y) = \begin{cases} OR_{i,j}^{(q)}f(x,y), & (x,y) \in \partial R_{i,j}^{(q)}, \quad q = 0 \vee 1 \vee \ldots \vee 4, \\ OT_{i,j}^{(q)}f(x,y), & (x,y) \in \partial T_{i,j}^{(q)}, \quad q = 1 \vee \ldots \vee 4, \end{cases}$$

інтерлінує функцію $f(x,y)$ *на прямих* $x = x_k \in [a,b]$, $y = y_i \in [c,d]$, *а також на границі* ∂G *довільної області* G *незалежно від вибору вказаних вище параметрів.*

Такого типу функції можна використовувати для наближення функції $f(x,y)$, виходячи з тих або інших вимог. Наведемо два важливих приклади.

Приклад 1′. У методі скінченних елементів при розв'язуванні крайових задач важливою є задача задовільнення крайових умов (особливо неоднорідних). У таких задачах використання операторів інтерлінації функцій є необхідним.

Приклад 2′. Використання операторів інтерлінації функцій є корисним також у методі найменших квадратів при наближенні функції за допомогою скінченної кількості її значень у внутрішніх точках області G і відомими її слідами на дугах відомих кривих всередині області G або таких кривих, що їхнє об'єднання є границею області G, тощо. Слід підкреслити, що класичний варіант методу найменших квадратів для наближення функцій двох змінних використовує лише значення функції у деякій системі точок (або деяку іншу систему функціоналів від наближуваної функції) і не використовує сліди наближуваної функції на деяких лініях. Очевидно, така інформація, як сліди наближувальної функції на деякій системі ліній, є значно більш інформативною, але до появи інтерлінації функції дослідники не знали, що з нею робити.

Інтерфлетація на системі площин, паралельних координатним, і на границі довільної області $G \subset \mathbb{R}^3$. Опишемо алгоритм, який дає змогу задовольняти граничні умови Діріхле на границі тривимірної області $G \subset \mathbb{R}^3$, обмеженої частинами відомих поверхонь. Алгоритм зручно розбити на кроки. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $G \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Крок 1. Розіб'ємо область G на підобласті площинами $x = x_i$, $i = 0,\ldots,m_1$, $y = y_j = 0,\ldots,m_2$, $z = z_k$, $k = 0,\ldots,m_3$, паралельними координатним, $a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m_1} = b_1$, $a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m_2} = b_2$, $a_3 = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_{m_3} = b_3$.

Ці підобласті будуть трьох типів:

– паралелепіпеди $\Pi_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$;

– паралелепіпеди $\tilde{\Pi}_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}(x,y)]$ з однією криволінійною (взагалі кажучи) гранню, яка є частиною границі ∂G області G. Таких паралелепіпедів для кожної точки $A_{i,j,k}(x_i, y_j, z_k)$ може бути шість, залежно від того, як розміщена криволінійна грань:

$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}(x,y)],$$
$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k(x,y), z_{k+1}],$$
$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(3)} = [x_i, x_{i+1}(y,z)] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}],$$
$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(4)} = [x_i(y,z), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}],$$
$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(5)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x,z)] \times [z_k, z_{k+1}],$$
$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(6)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x,z), y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}];$$

– піраміди (симплекси) T_{ijk} з однією криволінійною (взагалі кажучи) гранню, яка є частиною границі ∂G області G. Таких пірамід для кожної приграничної точки $A_{i,j,k}(x_i, y_j, z_k)$ може бути вісім, залежно від того, як розміщена криволінійна грань:

$$T_{ijk}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \times [z_k, z_{k+1}(x,y)],$$
$$T_{ijk}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}(x), y_j] \times [z_k, z_{k+1}(x,y)],$$
$$T_{ijk}^{(3)} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \times [z_k, z_{k+1}(x,y)],$$
$$T_{ijk}^{(4)} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}(x), y_j] \times [z_k, z_{k+1}(x,y)],$$
$$T_{ijk}^{(5)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \times [z_{k-1}(x,y), z_k],$$
$$T_{ijk}^{(6)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}(x), y_j] \times [z_{k-1}(x,y), z_k],$$
$$T_{ijk}^{(7)} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \times [z_{k-1}(x,y), z_k],$$
$$T_{ijk}^{(8)} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}(x), y_j] \times [z_{k-1}(x,y), z_k].$$

Крок 2. Будуємо інтерфлетанти трьох типів $O\Pi_{ijk}(x,y,z)$, $O\tilde{\Pi}_{ijk}(x,y,z)$, $OT_{ijk}(x,y,z)$ з такими інтерфлетаційними властивостями:

$$O\Pi_{ijk}(x,y,z) = u(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \partial\Pi_{ijk},$$
$$O\tilde{\Pi}_{ijk}(x,y,z) = u(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \partial\tilde{\Pi}_{ijk},$$
$$OT_{ijk}(x,y,z) = u(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \partial T_{ijk}.$$

Крок 3. Будуємо оператор Ou з властивостями:

$$Ou(x,y,z) = \begin{cases} O\Pi_{ijk}(x,y,z), & (x,y,z) \in \Pi_{ijk}, \\ O\tilde{\Pi}_{ijk}(x,y,z), & (x,y,z) \in \tilde{\Pi}_{ijk}, \\ OT_{ijk}(x,y,z), & (x,y,z) \in T_{ijk}. \end{cases}$$

Теорема 6. *Для кожної неперервної в області G функції $u(x,y,z) \in \in C(G)$ оператор $Ou(x,y,z)$ має властивості*:

$$Ou(x,y,z) \in C(G) \qquad \forall u(x,y,z) \in C(G),$$
$$Ou(x,y,z) = u(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \partial G,$$
$$Ou(x,y,z) = u(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in GXYZ,$$

де

$$GXYZ = \{(x,y,z) : x = x_i,\ \ i = 0,\dots,m_1, \quad y = y_j,\ \ j = 0,\dots,m_2,$$
$$z = z_k,\ \ k = 0,\dots,m_3\}.$$

Зауваження 2. Таким чином, ця теорема стверджує, що оператор $Ou(x,y,z)$ точно задовольняє умови Діріхле на границі довільної тривимірної області G й інтерфлетує $u(x,y,z)$ на множині площин $GXYZ$.

Зауваження 3. При розв'язанні крайової задачі з граничними умовами Діріхле вважаються заданими сліди розв'язку диференціального рівняння лише на границі ∂G. У цьому разі вибором слідів на множині площин $GXYZ$ (з умови мінімуму відповідного функціонала) можна добитись наближення до точного розв'язку з високою точністю. Ця ідея знайшла втілення при розв'язанні крайових задач методами зведення до систем звичайних лінійних (ЛІДР) і нелінійних (НІДР) інтегро-диференціальних рівнянь.

Сформулюємо метод розв'язування *задачі 2.* Загальний метод побудови структур наближених розв'язків, що зберігають клас диференційовності $C^m(G)$, якому належить точний розв'язок крайової задачі, надають оператори інтерлінації та інтерфлетації функцій зі збереженням класу диференційовності, до якого належить наближувана функція [3, 5, 10−12].

Наведемо формули для побудови операторів раціональної інтерлінації функції двох змінних на системі прямих зі збереженням класу $C^r(\mathbb{R}^2)$. Дослідимо інтерлінацію функцій двох змінних $f(x,y)\in C^r(\mathbb{R}^2)$, $r\ge 1$ на M, $M\ge 2$, прямих Γ_k, $k=1,\dots,M$:

$$\Gamma_k:\omega_k(x,y):=xa_k+yb_k-\gamma_k=0,\quad a_k^2+b_k^2=1,\quad \nu_k=(a_k,b_k)=\nabla\omega_k,$$

довільним чином розміщених на площині.

Нехай (t_k,ω_k) − ортогональна система координат, пов'язана з Γ_k, $t_k = t_k(x,y):=b_kx-a_ky$, $\omega_k=\omega_k(x,y)$. Для функції $f(x,y)\in C^r(\mathbb{R}^2)$, $r>N\ge 0$, уведемо позначення

$$\Phi_k(t_k,\omega_k):=f(t_kb_k+\omega_ka_k+\gamma_ka_k,\,-t_ka_k+\omega_kb_k+\gamma_kb_k)\equiv f(x,y),$$

$$\Phi_k^{(0,s)}(t_k,\omega_k)\Big|_{\omega_k=0}:=\varphi_{ks}(t_k),\quad k=1,\dots,M,\quad s=0,\dots,N,\quad \Phi_k^{(0,s)}:=\frac{\partial^s\Phi_k}{\partial\omega_k^s},$$

$$\frac{\partial^s f(x,y)}{\partial\nu_k^s}=\left(a_k\frac{\partial}{\partial x}+b_k\frac{\partial}{\partial y}\right)^s f(x,y).$$

Уведемо оператори

$$\tilde D_{Nk}f(x,y)=D_N\Phi_k(t_k,\omega_k)=\sum_{i=0}^{N}\lambda_{N0i}\varphi_{k0}(t_k+\beta_i\omega_k)+$$
$$+\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int\limits_0^{t_k+\beta_i\omega_k}\varphi_{ks}(\xi)\frac{(t_k+\beta_i\omega_k-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}d\xi,$$

які мають властивості

$$\tilde D_{Nk}f(x,y)\in C^r(\mathbb{R}^2),$$
$$\frac{\partial^s\tilde D_{Nk}f(x,y)}{\partial\omega_k^s}\bigg|_{\omega_k=0}=\varphi_{ks}(t_k)=\frac{\partial^s f(x,y)}{\partial\nu_k^s}\bigg|_{\Gamma_k},\quad k=1,\dots,M,\quad s=0,\dots,N.$$

Лема. *Система раціональних функцій* (*при* $m\in\mathbb{N}$)

$$H_{Nk}(x,y)=\frac{1}{\sum\limits_{\mu=1}^{M}\prod\limits_{i=1,i\ne\mu}^{M}\omega_i^{\tilde N}(x,y)}\prod_{i=1,i\ne k}^{M}\omega_i^{\tilde N}(x,y),\qquad \tilde N=\begin{cases}N+1, & N=2m+1,\\ N+2, & N=2m,\end{cases}$$

є розкладом одиниці, $\sum\limits_{k=1}^{M}H_{Nk}(x,y)\equiv 1$, *і в усіх точках* (*за винятком точок* $A_{ik}=\Gamma_i\bigcap\Gamma_k$)

$$\frac{\partial^p H_{Nk}}{\partial\nu_q^p}\bigg|_{\Gamma_q}=\delta_{kq}\delta_{0p},\qquad 1\le k,\,q\le M,\qquad 0\le p\le N.$$

Теорема 7. *Оператор*

$$O_{MN}(f;x,y) = \sum_{k=1}^{M} H_{Nk}(x,y)\tilde{D}_{Nk}f(x,y)$$

в усіх точках (за винятком множини точок $G = \{A_{ik}\}$ *) має властивості*

$$O_{MN}(f;x,y) \in C^r(\mathbb{R}^2 \setminus G),$$

$$\left.\frac{\partial^p O_{MN}(f;x,y)}{\partial \nu_q^p}\right|_{\Gamma_q} = \left.\frac{\partial^p f}{\partial \nu_q^p}\right|_{\Gamma_q} = \varphi_{qp}(t_q), \qquad q = 1,\dots,M, \qquad p = 0,\dots,N.$$

При цьому, якщо $r_{Nk}f = (I - \tilde{D}_{Nk})f(x,y)$, *то*

$$f - O_{MN}(f;x,y) = \sum_{k=1}^{M} H_{Nk}(x,y) r_{Nk} f(x,y).$$

Якщо частинні похідні $\frac{\partial^{p+s}}{\partial x^p \partial y^s} O_{MN}(f;x,y)$, $0 \le p+s \le N$, *у точках* $A_{k,i} = \Gamma_i \bigcap \Gamma_k$ *доозначити значеннями* $f^{(p,s)}(A_{k,i})$, *то таким чином доповнена функція* $O_{MN}(f;x,y)$ *належатиме до класу* $C^N(\mathbb{R}^2) \bigcap C^r(\mathbb{R}^2 \setminus G)$.

Зауваження 4. Оператори $O_{MN}(f;x,y)$ використовують оператори $D_N f(x,y)$, що входять в узагальнену формулу Даламбера. З таким же успіхом можна використати інтегральні аналоги узагальненої формули Даламбера [2, п. 2.1.2].

Зауваження 5. У випадку, коли запропоновані формули інтерлінації використовуються при розв'язанні крайових задач в областях G багатокутної форми, обмежених відрізками Γ_k^1 ліній Γ_k, виникає задача продовження слідів $\varphi_{ks}(t_k)$ з Γ_k^1 на Γ_k. Це продовження має зберігати клас диференційовності $\varphi_{ks}(t_k) \in C^{r-s}(\mathbb{R})$, що фігурував у всіх попередніх твердженнях.

Зауваження 6. Можна замість оператора $\sum_{k=1}^{M} H_{N,k}(x,y)\tilde{D}_{N,k}f(x,y)$ використовувати оператори

$$O_{MN}f(x,y) = \sum_{k=1}^{M} \Bigg[H_{n,k,0}(x,y) \sum_{i=0}^{N} \lambda_{N0i}\varphi_{k0}(t_k + \beta_i\omega_k) + \\ + \sum_{s=1}^{N} H_{Nks}(x,y) \sum_{i=1}^{M}\sum_{i=0}^{N} \lambda_{Nsi} \int_0^{t_k+\beta_i\omega_k} \varphi_{ks}(\xi) \frac{(t_k + \beta_i\omega_k - \xi)^{s-1}}{(s-1)!}\, d\xi \Bigg],$$

де $\{H_{Nks}\}$ − система допоміжних функцій з властивостями

$$\left.\frac{\partial^p H_{Nks}}{\partial \nu_k^p}\right|_{\omega_k=0} = \delta_{p,0}, \qquad p = 0,\dots,N-s.$$

Сформулюємо метод розв'язування *задачі 3.*

Методи ЛІДР та НІДР допускають таку структуру наближеного розв'язку, яку, зокрема у вказаній крайовій задачі (12)−(17) при граничних умовах

$$\left.\frac{\partial^s \tilde{u}}{\partial x^s}\right|_{x=x_k} = \varphi_{k,s}(y), \qquad \left.\frac{\partial^p \tilde{u}}{\partial y^p}\right|_{y=y_\ell} = \psi_{\ell,p}(x), \qquad k,\ell = 1,2, \quad s,p = 0,1,$$

можна записати у вигляді

$$\tilde{u}(x,y) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{s=0}^{1} h_{k,s}(x)\varphi_{k,s}(y) + \sum_{\ell=1}^{2}\sum_{p=0}^{1} H_{\ell,p}(y)\psi_{\ell,p}(x) -$$
$$- \sum_{k=1}^{2}\sum_{s=0}^{1}\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{p=0}^{1} h_{k,s}(x)H_{\ell,p}(y)\varphi_{k,s}^{(p)}(y_\ell) +$$
$$+ (x^2 - a^2)^2 y^2 (y-b)^2 F(x,y),$$

де $F(x,y)$ – довільна функція, $\varphi_{k,s}(y)$ та $\psi_{\ell,p}(x)$ – функції однієї змінної що задовольняють умови С. М. Нікольського $\psi_{\ell,p}^{(s)}(x_k) = \varphi_{k,s}^{(p)}(y_\ell)$, $0 \le s, p \le 1$, $k, \ell = 1,2$, $x_1 = -a$, $x_2 = a$, $y_1 = -b$, $y_2 = b$. При цьому функції $\psi_{1,0}(x)$ та $\psi_{1,1}(x)$ визначаються так:

$$\tilde{u}(x,0) = \psi_{1,0}(x) = \begin{cases} \varphi_1^-(x), & -a < x \le 0, \\ \varphi_1^+(x), & 0 < x < a, \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi_{1,1}(x) = \begin{cases} \varphi_2^-(x), & -a < x \le 0, \\ \varphi_2^+(x), & 0 < x < +a, \end{cases}$$

де $\varphi_1^+(x)$, $\varphi_2^-(x)$ – невідомі функції однієї змінної, які задовольняють умови $\varphi_1^+(0+0) = \varphi_1^-(0-0)$, $\varphi_2^-(0-0) = \varphi_2^+(0+0)$ (якщо граничні умови дозволяють, то можна вимагати також неперервність похідних до деякого порядку $r \ge 1$). Функції $\varphi_{k,0}(y)$, $k = 1,2$, та $\psi_{2,0}(x)$ можна замінити відповідними граничними функціями з граничних умов; $\varphi_{k,1}(y)$, $k = 1,2$, у $\psi_{2,1}(x)$ в інших точках границі можна вибрати довільно. Згідно з методами ЛІДР та НІДР ці невідомі функції однієї змінної та функція $F(x,y)$ можуть бути знайдені з умови мінімуму відповідного функціонала.

Зауваження 7. З проблемою 1 побудови структур наближених розв'язків без особливостей у кутових точках, якщо точний розв'язок не має цих особливостей, тісно пов'язана також проблема побудови структур наближених розв'язків з відомими слідами на M, $M \ge 3$, внутрішніх лініях, якщо m, $3 \le m \le M$, з них перетинаються в одній точці.

Наведемо приклад задачі теплопровідності, у якій може виникнути написана вище ситуація. Припустимо, що треба знайти температуру $u(x,y)$ плоского тіла, що має форму області $G \subset \mathbb{R}^2$, якщо

$$\Delta u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in G \setminus \bigcup_{i=1}^{M} \Gamma_i \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j,$$

$$u(x,y) = \varphi_i(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma_i, \quad i = 1,\ldots,M, \qquad \partial G = \bigcup_{i=1}^{M} \Gamma_i, \tag{36}$$

$$u(x,y) = \psi_j(x,y), \qquad (x,y) \in \gamma_j \subset G, \quad j = 1,\ldots,N. \tag{37}$$

Тут вважаємо, що границя області G складається з об'єднання ліній Γ_i, $i = 1,\ldots,M$, а на системі ліній γ_j, $j = 1,\ldots,N$, усередині області G температура цього плоского тіла задана (аналог багатоточкової задачі). Легко бачити (див. проблему 1): якщо всі криві γ_j, $j = 1,\ldots,N$, перетинаються в одній точці, то формула (3) не може бути використана для побудови структури наближеного розв'язку крайової задачі, що задовольняє відповідні умови (36) на границі області та умови (37) на лініях усередині цієї області. Очевидно, сказане стосується також того випадку, коли у заданій точці P_q перетинаються більше ніж дві криві γ_j, тобто для $N \geq 3$. Адже у цьому випадку у формулі (3) буде обов'язково хоча би один множник, який дорівнює нулеві у цій внутрішній точці (тобто вся формула у цій точці дорівнює нулеві).

Слід зазначити, що автору невідомі інші методи, які би давали розв'язок поставлених проблем.

Тобто у вказаних трьох випадках виникає необхідність узагальнити ідеї В. Л. Рвачова на більш складні конструкції.

Висновки. Таким чином, використання операторів інтерлінації та інтерфлетації функцій дозволяє розширити рамки структурного методу В. Л. Рвачова, не заперечуючи вже створеного. Рекомендуємо ознайомитись також з публікаціями [5, 10–12] і бібліографією в них.

Крім того, наведемо деякі твердження щодо розв'язування інших задач, не пов'язаних безпосередньо з розв'язуванням крайових задач. Зокрема, це стосується комп'ютерної томографії – одного з видатних досягнень людства. Остання чверть 20-го століття ознаменувалася появою, інтенсивним розвитком і широким запровадженням комп'ютерної томографії у теорію та практику. В основі комп'ютерної томографії лежать теоретичні результати німецького вченого Й. Радона, який на початку 20-го століття розвинув теорію перетворення функцій багатьох змінних (це перетворення тепер називається перетворенням Радона). Згідно з цим перетворенням функцію багатьох змінних можна охарактеризувати не тільки її значеннями у точках багатовимірного простору, але також лінійними інтегралами від цієї функції, взятими по нескінченній сукупності ліній або площин (якщо кількість змінних більша двох). На практиці, в радонівській комп'ютерній томографії, інформація про функцію може бути отримана тільки у вигляді фіксованого числа вказаних лінійних інтегралів, отриманих по деякій скінченній множині ліній або поверхонь. Тому практична реалізація ідей Й. Радона у вигляді комп'ютерних томографів, що використовують опромінення об'єкта рентгенівськими променями, з'явилася лише в кінці 20-го століття. За останні три десятиліття комп'ютерна томографія зробила потужні кроки у напрямку удосконалення алгоритмів, програмних засобів та апаратної реалізації. Значно зросла швидкість, точність і якість візуалізації перетинів досліджуваного тіла на екранах моніторів комп'ютерних томографів. Розвиваються нові напрямки комп'ютерної томографії, в основі яких лежать дещо інші підходи, ніж ті, що випливають безпосередньо з праць Й. Радона – емісійна, магнітно-резонансна томографія та інші види томографічного відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла, які можуть не використовувати опромінення об'єкта рентгенівськими променями (див. [3, 5, 12]). Автор цієї публікації вважає, що методи комп'ютерної томографії можуть знайти своє застосування і при розв'язуванні крайових задач математичної фізики (прямих і обернених). Зокрема, це стосується тих задач, у яких в граничні умови, в умови спряження тощо входять явно інтеграли від невідомого розв'язку вздовж деяких ліній області інтегрування. І у цьому випадку інтерлінація та інтерфлетація функцій можуть знайти ще одне застосування.

1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій. – Харків: Основа, 1992. – 235 с.
2. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
3. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посібн. – Київ: Наук. думка, 2005. – 331 с.
4. *Литвин О. М., Рвачов В. Л.* Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. – Київ: Наук. думка, 1973. – 122 с.
5. *Литвин О. Н., Сергиенко И. В.* Методы аппроксимации функций и современные компьютерные технологии. Обзор // Кибернетика и системный анализ. – 2007. № 1. – С. 64–81.

6. *Никольский С. М.* Граничные свойства функций на областях с угловыми точками // Мат. сб., 1956–1958: I – 1956. – **40(82)**, № 3. – С. 303–318; II – 1957. – **44(86)**, № 1. – С. 127–144; III – 1958. – **45(87)**, № 2. – С. 181–194.
7. *Рвачев В. Л.* Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техніка, 1967. – 212 с.
8. *Рвачев В. Л.* К вопросу о построении координатних последовательностей // Дифференц. уравнения. – 1970. – № 6. – С. 1034–1047.
9. *Рвачев В. Л.* Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 566 с.
10. *Lytvyn O.* Methods of a solution of a boundary-value problems of continuum mechanics, reducing to the system of the ordinary linear (LIDE) or nonlinear (NIDE) integro-differential equations // Numerical modelling in continuum mechanics. Theory, Algorithms, Applications: Proc. 4th Summer Conf. (Yuly 31 – August 4, 2000, Praque, Czech Republic). – P. 240–249.
11. *Lytvyn O. M.* Interlineation and interflation function of many variables (blending function interpolation) and economical algorithms in the approximation theory // Computat. methods / Eds G. R. Liu, V. B. C. Tan, X. Han: In 2th parts. – Springer, 2006. – P. 1105–1110.
12. *Lytvyn O. M.* Interlineation and interflatation functions of many variables (the blending function interpolation) and multidimensional signal processing // Proc. 2nd IASTED Int. Multi-Conf. on Autom., Control, and Inform. Technol: ACIT'2005 «Signal and Image Processing» (Novosibirsk, June 20–24, 2005). – P. 280–285.

ИНТЕРЛИНАЦИЯ И ИНТЕРФЛЕТАЦИЯ ФУНКЦИЙ И СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД В. Л. РВАЧОВА

Приведен анализ задач, связанных с построением полных систем координатных функций, которые не нашли решения (полного или частичного) в рамках структурного метода, основанного на использования R-функций В. Л. Рвачова: проблема угловых точек; проблема продолжения следов функций и их нормальных производных из границы во внутренние точки области интегрирования G с сохранением класса дифференцируемости $C^r(G)$; проблема изменения типа граничных условий в некоторых произвольных точках границы; проблема построения структур приближенных решений с заданными следами на M линиях, когда m, $m \ge 3$, из них пересекаются в одной точке. Приведены определение и основные свойства операторов интерлинации и интерфлетации функций многих переменных. Изложены основные утверждения о возможности решения (полного или частичного) указанных выше задач с помощью интерлинации или интерфлетации функций.

INTERLINEATION AND INTERFLATATION OF FUNCTIONS AND RVACHOV STRUCTURAL METHOD

The analysis is presented for the problems concerned with construction of complete systems of coordinate functions not solved (completely or partially) within the structural method based on using the Rvachov R-functions: the problem of corner points; the problem of continuation of function traces and their normal derivatives from the boundary into the interior points of the integration domain G remaining the differentiation class $C^r(G)$; the problem of changing the boundary condition type at some arbitrary points of the boundary; the problem of constructing the structures of approximate solutions with given traces on M lines when m $(m \ge 3)$, from them cross at one point. The definition and basic properties of interlination operators and interflatation of functions of many variables are presented. The basic statements about the possibility of solution (complete or partial) of the above problems using the interlination or interflatation of functions are stated.

Укр. інж.-пед. акад., Харків

Одержано
23.03.07