УДК 514.76

В. М. Кузаконь[1], И. С. Стрельцова[2]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ РАССЛОЕНИЙ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО

Приводится полное описание алгебры дифференциальных инвариантов расслоений кривых на плоскости Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ относительно группы движений. Доказывается, что дифференциальные инварианты любого порядка получаются из дифференциальных инвариантов второго порядка при помощи инвариантного дифференцирования.

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^{1,1}$ – плоскость Минковского с координатами x_1, x_2 и с метрикой $ds^2 = dx_2^2 - dx_1^2$. Рассмотрим расслоение кривых $\varphi : \mathbb{R}^{1,1} \to \mathbb{R}$ на этой плоскости. В координатах такое расслоение можно задать с помощью некоторой гладкой (класса C^∞) функции двух переменных $u = f(x_1, x_2)$ такой, что ее дифференциал $df \neq 0$. Линии уровня этой функции совпадают с кривыми расслоения.

Функция f определена с точностью до калибровочного преобразования $f \to F(f)$, где F – произвольная гладкая функция, $F' \neq 0$.

В предлагаемой работе найдем алгебру скалярных дифференциальных инвариантов этого расслоения относительно группы движений.

Движения плоскости плоскости Минковского вместе с калибровочным преобразованием порождают псевдогруппу Ли G пространства $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{R}$ с координатами x_1, x_2, u.

Базис алгебры Ли этой псевдогруппы состоит из следующих векторных полей на пространстве $\mathbb{R}^3$:

- параллельных переносов в плоскости $\mathbb{R}^{1,1}$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \frac{\partial}{\partial x_2}; \tag{1}$$
- гиперболических поворотов в плоскости $\mathbb{R}^{1,1}$ относительно начала координат
$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}; \tag{2}$$
- калибровочного преобразования $\mathbb{R}$
$$h(u) \frac{\partial}{\partial u}, \tag{3}$$

здесь $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

2. Алгебра скалярных дифференциальных инвариантов. Скалярные дифференциальные инварианты, то есть инварианты, принимающие числовые значения, – единственный тип инвариантов, компоненты которых не меняются при замене координат. По этой причине скалярные дифференциальные инварианты эффективно используются при решении проблем эквивалентности геометрических объектов. Саму же проблему эквивалентности можно рассматривать как проблему построения полной системы скалярных дифференциальных инвариантов.

Напомним определение скалярных дифференциальных инвариантов. Пусть M – гладкое многообразие, на котором действует псевдогруппа Ли G. Пусть $J^k M$ – пространство k-джетов гладких функций на M и $G^{(k)}$ – продолжение псевдогруппы Ли G на $J^k M$.

Функция $I \in C^\infty(J^k M)$ называется *скалярным дифференциальным инвариантом порядка* $\leq k$ *псевдогруппы Ли* G, если она сохраняется под действием k-го продолжения G, то есть $\left(\varphi^{(k)}\right)^*(I) = I$ для любого преобразования $\varphi^{(k)} \in G^{(k)}$.

Для вычисления дифференциальных инвариантов псевдогруппы G удобно использовать инфинитезимальный аналог этого определения. А именно, пусть $\mathfrak{I}$ – алгебра Ли векторных полей, отвечающая псевдогруппе Ли G. Функция $I \in C^\infty(J^k M)$ является скалярным дифференциальным инвариантом псевдогруппы Ли G тогда и только тогда, когда

$$X^{(k)}(I) = 0$$

для любого векторного поля $X \in \mathfrak{I}$. Здесь $X^{(k)}$ – поднятие векторного поля X в $J^k M$.

Как известно, скалярные дифференциальные инварианты порядка $\leq k$ образуют подалгебру в алгебре гладких функций на $J^k M$, а объединение дифференциальных инвариантов всех порядков – алгебру дифференциальных инвариантов (подалгебру в пространстве бесконечных джетов $J^\infty M$) [1].

Размерность пространства дифференциальных инвариантов – это коразмерность орбит общего положения продолжения псевдогруппы Ли G в расслоение $J^k M$.

Вернемся теперь к расслоению кривых на плоскости Минковского. Пусть теперь $J^k = J^k(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R})$ – пространство k-джетов гладких функций $\mathbb{R}^{1,1} \to \mathbb{R}$.

Заметим, что векторные поля (1)–(3) – контактные векторные поля с производящими функциями p_1, p_2, $x_1 p_2 + x_2 p_1$ и $h(u)$ соответственно [2, 6]. Поэтому алгебру Ли $\mathfrak{I}$ можно отождествить с алгеброй Ли контактных векторных полей с производящими функциями вида

$$f(x,u,p) = h(u) + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3(x_1 p_2 + x_2 p_1), \tag{4}$$

где a_1, a_2, a_3 – константы.

Как известно, контактное векторное поле с производящей функцией f в координатах Дарбу имеет вид

$$X_f = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(f - \sum_{i=1}^{2} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Формула поднятия контактного векторного поля в пространство джетов высоких порядков приведена в [2].

Функция $g \in C^\infty(J^k)$ является дифференциальным инвариантом псевдогруппы Ли G тогда и только тогда, когда она является первым интегралом векторного поля $X_f^{(k)}$ с производящей функцией (4) [1].

Очевидно, что у расслоения кривых на плоскости Минковского не существует дифференциальных инвариантов первого порядка. В самом деле, размерность пространства 1-джетов J^1 равна 5, и размерность орбиты общего положения тоже равна 5.

Однако, как нетрудно убедиться, у такого расслоения существует ровно два независимых скалярных дифференциальных инварианта второго порядка, которые будут указаны ниже.

Покажем теперь, как можно вычислить число функционально независимых дифференциальных инвариантов k-го порядка в нашем случае.

Размерность орбиты общего положения в $J^k(\mathbb{R}^{1,1},\mathbb{R})$ равна $k+4$, а размерность пространства J^k равна $2 + C_{k+2}^k$. Поэтому коразмерность орбиты общего положения равна

$$\nu(k) = C_{k+2}^k - k - 2. \tag{5}$$

Это число совпадает с числом функционально независимых дифференциальных инвариантов, порядок которых не выше k.

Таким образом, число $\mu(k)$ дифференциальных инвариантов k-го порядка можно вычислить по формуле

$$\mu(k) = \nu(k) - \nu(k-1) = k. \tag{6}$$

Аналогичные оценки для расслоений евклидовых пространств были получены в [3].

3. Структура алгебры дифференциальных инвариантов. С расслоением φ, заданным функцией $f = f(x_1, x_2)$, связаны два векторных поля на плоскости [7]:

$$A_f = \frac{1}{\sqrt{f_{x_2}^2 - f_{x_1}^2}}\left(f_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - f_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

и

$$B_f = \frac{1}{\sqrt{f_{x_2}^2 - f_{x_1}^2}}\left(-f_{x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + f_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

– поля единичных векторов, нормальных и касательных к кривым расслоения соответственно. Эти векторные поля инвариантны относительно движений плоскости Минковского и калибровочного преобразования.

Полные производные, отвечающие векторным полям A_f и B_f, имеют вид

$$A = \frac{1}{\sqrt{p_2^2 - p_1^2}}(p_1\Delta_1 - p_2\Delta_2)$$

и

$$B = \frac{1}{\sqrt{p_2^2 - p_1^2}}(-p_2\Delta_1 + p_1\Delta_2),$$

где Δ_1 и Δ_2 – операторы полного дифференцирования по переменным x_1 и x_2 соответственно.

Используя эти операторы инвариантного дифференцирования, определим скалярные дифференциальные инварианты 2-го порядка I_1 и I_2 следующей формулой:

$$[A, B] = I_2 A - I_1 B. \tag{7}$$

Несложно подсчитать координатные представления этих инвариантов:

$$I_1 = \frac{p_2^2 p_{11} + 2p_1p_2p_{12} + p_1^2 p_{22}}{(p_2^2 - p_1^2)^{3/2}}$$

и

$$I_2 = \frac{(p_1^2 + p_2^2)p_{12} - p_1p_2(p_{11} + p_{22})}{(p_2^2 - p_1^2)^{3/2}}.$$

Инвариант I_1 представляет собой кривизну кривой семейства, а инвариант I_2 – кривизну ортогональных траекторий семейства кривых.

Покажем, что алгебра дифференциальных инвариантов порождается этими инвариантами второго порядка.

Заметим, что диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
C^\infty(J^{k-1}) \arrow[r, "A \quad (B)"] \arrow[d, "X_f^{(k-1)}"'] & C^\infty(J^k) \arrow[d, "X_f^{(k)}"] \\
C^\infty(J^{k-1}) \arrow[r, "A \quad (B)"] & C^\infty(J^k)
\end{tikzcd}
$$

коммутативны для векторных полей X_f с производящей функцией (4). Поэтому, если функция $g \in J^{k-1}$ является инвариантом порядка $k-1$, то функции $A(g)$ и $B(g)$ представляют собой дифференциальные инварианты порядка k.

Таким образом, применяя операторы A и B к инвариантам I_1 и I_2, получим следующий набор дифференциальных инвариантов третьего порядка:

$$I_{11} = A(I_1), \qquad I_{21} = B(I_1), \qquad I_{12} = A(I_2), \qquad I_{22} = B(I_2). \tag{8}$$

Укажем их координатные представления:

$$
\begin{aligned}
I_{11} = \frac{1}{(p_2^2 - p_1^2)^3}\big[&- p_2^5 p_{112} + p_1^4(2p_{12}^2 + p_{11}p_{22} - p_1 p_{122}) + \\
&+ p_1^2 p_2^2(3p_{11}^2 + 8p_{12}^2 + 4p_{11}p_{22} + 3p_{22}^2 - p_1 p_{111} - p_1 p_{122}) + \\
&+ p_2^4(2p_{12}^2 + p_{11}p_{22} + p_1(p_{111} + 2p_{122})) - \\
&- p_1 p_2^3(6p_{11}p_{12} + 6p_{12}p_{22} + p_1 p_{112} + p_1 p_{222}) + \\
&+ p_1^3 p_2(-6p_{11}p_{12} - 6p_{12}p_{22} + 2p_1 p_{112} + p_1 p_{222})\big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{21} = \frac{1}{(p_2^2 - p_1^2)^3}\big[&- p_2^5 p_{111} + 3p_2^4(p_{11}p_{12} + p_1 p_{112}) - \\
&- 3p_1^3 p_2(2p_{12}^2 + p_{11}p_{22} + p_{22}^2 - p_1 p_{122}) - \\
&- p_1 p_2^3(6p_{12}^2 + 3p_{11}(p_{11} + p_{22}) + p_1(-p_{111} + 3p_{122})) + \\
&+ p_1^4(3p_{12}p_{22} - p_1 p_{222}) + \\
&+ p_1^2 p_2^2(9p_{11}p_{12} + 9p_{12}p_{22} - 3p_1 p_{112} + p_1 p_{222})\big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{12} = -\frac{1}{(p_2^2 - p_1^2)^3}\big[&p_1^4(-2p_{11}p_{12} - p_{12}p_{22} + p_1 p_{112}) + p_2^5 p_{122} + \\
&+ p_1^3 p_2(2p_{11}^2 + 6p_{12}^2 + 3p_{11}p_{22} + p_{22}^2 - p_1 p_{111} - 2p_1 p_{122}) + \\
&+ p_1 p_2^3(p_{11}^2 + 6p_{12}^2 + 3p_{11}p_{22} + 2p_{22}^2 + p_1 p_{111} + p_1 p_{122}) + \\
&+ p_1^2 p_2^2(-9p_{11}p_{12} - 9p_{12}p_{22} + p_1 p_{112} + p_1 p_{222}) - \\
&- p_2^4(p_{11}p_{12} + 2p_{12}p_{22} + 2p_1 p_{112} + p_1 p_{222})\big],
\end{aligned}
$$

$$I_{22}=\frac{1}{(p_2^2-p_1^2)^3}\big[-p_2^5p_{112}+p_1^4(p_{12}^2+p_{11}p_{22}+p_{22}^2-p_1p_{122})+$$

$$+p_1^2p_2^2(2p_{11}^2+10p_{12}^2+4p_{11}p_{22}+2p_{22}^2-p_1p_{111}-p_1p_{122})+$$

$$+p_2^4(p_{12}^2+p_{11}(p_{11}+p_{22})+p_1(p_{111}+2p_{122}))-$$

$$-p_1p_2^3(8p_{11}p_{12}+4p_{12}p_{22}+p_1p_{112}+p_1p_{222})+$$

$$+p_1^3p_2(-4p_{11}p_{12}-8p_{12}p_{22}+2p_1p_{112}+p_1p_{222})\big].$$

Легко проверить, что $X_f^{(3)}(I_{ij})=0$ для производящей функции (4), так что эти функции действительно являются дифференциальными инвариантами псевдогруппы Ли G.

Построенные инварианты третьего порядка функционально зависимы, ибо согласно формуле (6) число инвариантов третьего порядка равно 3. Поэтому между инвариантами порядка не более третьего должно быть одно соотношение. Действительно, это соотношение имеет следующий вид:

$$I_{11}-I_{22}+I_1^2-I_2^2=0. \tag{9}$$

Обозначая операции дифференцирования вдоль траекторий векторных полей A и B через

$$\frac{d}{dn}=A$$

и

$$\frac{d}{ds}=B$$

соответственно, запишем соотношение (9) в виде дифференциального уравнения для инвариантов I_1 и I_2:

$$\frac{dI_1}{dn}-\frac{dI_2}{ds}+I_1^2-I_2^2=0.$$

Это уравнение назовем *уравнением Gala* для плоскости Минковского. Заметим, что для расслоения кривых на евклидовой плоскости уравнение Gala имеет сходную форму [4, 5].

Инварианты четвертого порядка можно получить из инвариантов третьего порядка (8), также применяя к ним операторы A и B. В силу формулы (7) композиции операторов AB и BA дают одни и те же инварианты по модулю инвариантов более низкого порядка. Получаем 6 инвариантов 4-го порядка. Всего же получено 12 инвариантов порядка, не менее 4. Применяя формулу (5), находим, что число функционально независимых инвариантов порядка, не менее 4, равно 9. Поэтому между построенными инвариантами должны существовать три соотношения. Одно из них − соотношение (9). Два других получаем, применяя к уравнению (9) операторы A и B.

Аналогично можем получить дифференциальные инварианты любого порядка. Соотношения между инвариантами получаются дифференцированием уравнения (9).

Итак, получаем следующую теорему, описывающую структуру дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости.

Теорема 1. *Все дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости Минковского относительно группы движений порождены дифференциальными инвариантами второго порядка* I_1 *и* I_2, *связанными уравнением* (9), *и их всевозможными производными по* A *и* B.

1. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы математики. Фундам. направления. – Москва: ВИНИТИ, 1988. – **28**. – 298 с.
2. *Виноградов А. В., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1986. – 336 с.
3. *Кузаконь В. М.* Диференціальні інваріанти субмерсій многовидів // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 295–298.
4. *Кузаконь В. М.* Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 4. – С. 95–99.
5. *Кузаконь В. М.* Уравнение Gala // Тези доп. Міжнар. конф. «Геометрія в Одесі-2007» (21–26 тр. 2007, Одеса). – Одеса: Благод. Фонд «Наука», 2007. – С. 69–70.
6. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact geometry and non-linear differential equations. – Cambridge Univ. Press, 2007. – 496 p.
7. *Streltsova I.* Invariants of curves bundles on the Minkowsky plane // Тези доп. Міжнар. конф. «Геометрія в Одесі-2007» (21–26 тр. 2007, Одеса). – Одеса: Благод. Фонд «Наука», 2007. – С. 154–155.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ РОЗШАРУВАНЬ КРИВИХ НА ПЛОЩИНІ МІНКОВСЬКОГО

Наведено повний опис алгебри диференціальних інваріантів розшарувань кривих на площині Мінковського $\mathbb{R}^{1,1}$ *відносно групи рухів. Доведено, що диференціальні інваріанти довільного порядку отримуються з диференціальних інваріантів другого порядку за допомогою інваріантного диференціювання.*

DIFFERENTIAL INVARIANTS OF CURVE BUNDLES ON THE MINKOWSKY PLANE

Let $\varphi : \mathbb{R}^{1,1} \to \mathbb{R}$ *be a curves bundle on the Minkowsky plane* $\mathbb{R}^{1,1}$. *We construct the scalar differential invariants algebra of* φ *with respect to the group of motions of* $\mathbb{R}^{1,1}$. *We prove that any scalar differential invariant can be constructed by differentiation of second order differential invariants.*

[1] Одес. нац. акад. пищевых технологий, Одесса,
[2] Астрах. гос. ун-т, Астрахань, Россия

Получено 01.06.07