УДК 513.88

Г. М. Піпа[1], О. Г. Сторож[2]

ПРО ОДИН КЛАС ЗБУРЕНЬ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ З ОБМЕЖЕНИМ ДОДАТНИМ ОПЕРАТОРНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Розглядається один клас диференціально-граничних операторів типу Штурма – Ліувілля з багатоточково-інтегральними крайовими умовами, що діють у гільбертовому просторі вектор-функцій, які приймають значення в абстрактному гільбертовому просторі. Доведено замкненість і щільну визначеність, а також встановлено умови взаємної спряженості досліджуваних операторів.

1. Вступ. Протягом останніх десятиліть у працях багатьох математиків (див. [2, 22] і цитовану там літературу) вивчались диференціальні та диференціально-граничні оператори з різного роду некласичними крайовими умовами. Деякі з цих умов наведено у відомому довіднику Е. Камке [4]. Зазначимо, що такі оператори з'являються в теорії акретивних розширень і звужень [18, 19, 21] та в теорії самоспряжених і дисипативних розширень нещільно визначених диференціальних операторів [6, 20].

Ця стаття тісно пов'язана з присвяченими розвиткові концепції споріднених операторів В. Е. Лянце [10, 11] працями авторів [14, 23], у яких мова йде про деякі абстрактні аналоги операторів, вказаних у заголовку. Наведені нижче твердження аналогічні до відповідних тверджень з [14, 23], але, взагалі кажучи, не випливають безпосередньо з них. Зазначимо, що для деяких часткових випадків результати цієї роботи отримано в [12, 17] і що частину цих результатів анонсовано в [15].

2. Позначення та постановка задачі. У цій праці використано такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень і многовид нулів (лінійного) оператора T; $\mathcal{B}(X,Y)$ – сукупність лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$; $\mathcal{C}(X)$ – клас замкнених щільно визначених лінійних операторів у просторі X; $A \mid E$ – звуження відображення A на множину E; $\overline{E}$ – замикання множини E; $\mathbf{1}_X$ – тотожне перетворення простору X; A^* – оператор, спряжений з оператором A; $\dot{+}$, $\oplus$ – відповідно символи прямої та ортогональної суми. Якщо X_i, Y_i – гільбертові простори та $A_i : X \to Y_i$ – лінійні оператори, $i = 1,\ldots,n$, то запис $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ (або $A = \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} A_k$) означає, що $\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} X_i$ $Ax = (A_1x_1,\ldots,A_nx_n)$. Якщо, крім цього, $X_1 = \ldots = X_n = X$, часто вживаємо цей символ в іншому сенсі:

$$\forall x \in X \qquad \left(\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} A\right)x \overset{\text{def}}{=} (A_1x,\ldots,A_nx).$$

Це не призводить до непорозумінь, оскільки з контексту завжди зрозуміло, про яку ортогональну суму йде мова.

Під H_0 розуміємо фіксований сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)_{H_0}$ і вважаємо, що $\forall x \in [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $p(x) = p(x)^* \in \mathcal{B}(H_0)$ – додатно визначений оператор, причому оператор-функція $x \mapsto p(x)$ сильно неперервна на $[a,b]$ (ці умови можна послабити), а

$$l[y] = -y''(x) + p(x)y. \tag{1}$$

Через $H(\alpha,\beta)$, $a \le \alpha < \beta \le b$, позначаємо гільбертів простір $L_2(H_0,(\alpha,\beta))$ зі скалярним добутком $(y \mid z)_{H(\alpha,\beta)} = \int\limits_\alpha^\beta (y(x) \mid z(x))_{H_0}\, dx$, а через $H^i(\alpha,\beta)$ – соболєвські простори $H^i(H_0;(\alpha,\beta))$, $i = 1,2$, які, як відомо, є повними відносно скалярних добутків

$$(y \mid z)_{H^1(\alpha,\beta)} = \int\limits_\alpha^\beta \left[(y'(x) \mid z'(x))_{H_0} + (p(x)y(x) \mid z(x))_{H_0}\right] dx \tag{2}$$

та

$$(y \mid z)_{H^2(\alpha,\beta)} = (y \mid z)_{H(\alpha,\beta)} + (l[y] \mid l[z])_{H(\alpha,\beta)}\,. \tag{3}$$

Звужуючи ці скалярні добутки на $H_0^i(H_0;(\alpha,\beta))$, також перетворюємо ці многовиди на гільбертові простори, які позначатимемо через $H_0^i(\alpha,\beta)$, $i = 1,2$ (детальніше див. [1, 9]).

Під $L(\alpha,\beta)$ та $L_0(\alpha,\beta)$ розуміємо відповідно максимальний та мінімальний диференціальні оператори, породжені в $H(\alpha,\beta)$ виразом (1). Відомо [3, 16], що $L_0(\alpha,\beta)$, $L(\alpha,\beta) \in \mathcal{C}(H(\alpha,\beta))$, $L_0^*(\alpha,\beta) = L(\alpha,\beta)$. Крім цього, $L_0(\alpha,\beta)$ – додатно визначений оператор, причому простір $H_0^1(\alpha,\beta)$ зі скалярним добутком (2) є енергетичним простором цього оператора, а оператор $L_F(\alpha,\beta)$, означений за допомогою співвідношень

$$D(L_F(\alpha,\beta)) = \{y \in H^2(\alpha,\beta) : y(\alpha) = y(\beta) = 0\}, \qquad L_F(\alpha,\beta) \subset L(\alpha,\beta)\,,$$

– його розширення за Фрідріхсом [1, 13].

Надалі замість $H(a,b)$, $H^i(a,b)$, $H_0^i(a,b)$, $i=1,2$, $L(a,b)$, $L_0(a,b)$, $L_F(a,b)$ писатимемо відповідно H, H^i, H_0^i, $i = 1,2$, L, L_0, L_F. Зазначимо, що $D(L) = H^2$, $D(L_0) = H_0^2$.

Перейдемо до постановки задачі.

Нехай $a < c_1 < c_2 < b$, $G^{(1)}, G^{(2)}$ – (замкнені лінійні) підпростори простору H_0, $P^{(i)}$ – ортопроектор $H_0 \to G^{(i)}$, а $Q^{(i)} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{1}_{H_0} - P^{(i)}$, $i = 1,2$. Означимо оператори $L_{\min}$, $L_{\max}$ за допомогою співвідношень

$$D(L_{\min}) = \{y \in D(L_0) : P^{(i)}y(c_i) = 0,\ i = 1,2\}, \qquad L_{\min} \subset L_0\,, \tag{4}$$

$$D(L_{\max}) = \{y \in H : y \text{ абсолютно неперервна на } [a,b];\ y' \text{ абсолютно неперервна на } [a,c_1 - 0) \cup (c_1 + 0, c_2 - 0) \cup (c_2 + 0, b];\ l_{\text{cl}}[y] \in H\}, \tag{5}$$

$$\forall y \in D(L_{\max}) \qquad L_{\max} y = l_{\text{cl}}[y]\,. \tag{6}$$

(Тут і надалі під $l_{\text{cl}}[y]$ маємо на увазі вираз (1), у якому всі похідні треба розуміти у класичному сенсі.)

Далі, нехай $\Phi^{(1)},\Phi^{(2)} \in \mathcal{B}(H,H_0)$ (наприклад, $\Phi^{(i)}y = \int\limits_a^b \varphi_i(x)y(x)\,dx$, де $\forall x \in [a,b]$ $\varphi_i(x) \in \mathcal{B}(H_0)$, $\int\limits_a^b \|\varphi_i(x)\|^2\, dx < \infty$, $i = 1,2$), а $\alpha_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$, $i,j = 1,\ldots,4$, такі, що операторна матриця $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^4$ оборотна в $\mathcal{B}(H_0^4)$.

Приймемо, що

$$u_i(y) = \alpha_{i1}y'(a) - \alpha_{i2}y'(b) + \alpha_{i3}y(a) + \alpha_{i4}y(b), \qquad i = 1,\dots,4,$$

та означимо основний об'єкт нашого дослідження – оператор T – за допомогою співвідношень

$$D(T) = \{y \in D(L_{\max}) : u_i(y) = P^{(i)}y(c_i) + \Phi^{(i)}y,$$

$$P^{(i)}u_{i+2}(y) = y'(c_i + 0) - y'(c_i - 0),\ i = 1,2\}, \tag{7}$$

$$\forall y \in D(T) \qquad Ty = l_{\text{cl}}[y] + (\Phi^{(1)})^* u_3(y) + (\Phi^{(2)})^* u_4(y). \tag{8}$$

Мета цієї роботи – довести замкненість та щільну визначеність оператора (7), (8) і побудувати спряжений оператор T^*.

3. Оператори Ψ та $\Psi^\bullet$. Як було зазначено вище, H_0^1 є енергетичним простором оператора L_0, а (2) – відповідним скалярним добутком, тому надалі писатимемо H_e замість H_0^1, а звуження скалярного добутку (2) на H_e (в ситуації, коли $\alpha = a$, $\beta = b$) позначатимемо через $(.|.)_e$.

Якщо $\Lambda : H^1 \to \mathbf{H}$ (де $\mathbf{H}$ – деякий гільбертів простір) – лінійний оператор такий, що $\Lambda \mid H_e \in \mathcal{B}(H_e, \mathbf{H})$, то оператор $\Lambda' \in \mathcal{B}(\mathbf{H}, H_e)$ означимо таким чином:

$$\forall u \in H_e, \qquad \forall h \in \mathbf{H} \qquad (\Lambda u \mid h)_{\mathbf{H}} = (u \mid \Lambda' h)_e.$$

Нехай $a < c < b$ і для будь-якого $u \in H^1$ $\Psi_c u \overset{\text{def}}{=} u(c)$. Зрозуміло, що $\Psi_c \mid H_e \in \mathcal{B}(H_e, H_0)$, тому оператор $\Psi_c^\bullet$ означено коректно. Далі, нехай $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ – операторні розв'язки рівняння $-Y'' + p(x)Y = 0$, які задовольняють умови

$$\omega_1(a) = \mathbf{1}_{H_0}, \qquad \omega_1(b) = 0,$$

$$\omega_2(a) = 0, \qquad \omega_2(b) = \mathbf{1}_{H_0}.$$

Введемо позначення

$$\Omega(x) = \begin{Vmatrix} \omega_1(x) & \omega_2(x) \\ \omega_1'(x) & \omega_2'(x) \end{Vmatrix}, \qquad \Omega^{-1}(x) = \begin{Vmatrix} \tilde\omega_{11}(x) & \tilde\omega_{12}(x) \\ \tilde\omega_{21}(x) & \tilde\omega_{22}(x) \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

$$(\Psi_c^\bullet(x))h \overset{\text{def}}{=} (\Psi_c^\bullet h)(x), \qquad x \in [a,b], \qquad h \in H_0.$$

Лема 1. *Для будь-якого* $x \in [a,b]$

$$\Psi_c^\bullet(x) = \begin{cases} \omega_2(x)\tilde\omega_{22}(c), & a \le x \le c, \\ -\omega_1(x)\tilde\omega_{12}(c), & c \le x \le b, \end{cases} \tag{10}$$

де $\tilde\omega_{12}(c)$, $\tilde\omega_{22}(c)$ *визначені згідно з* (9).

Зокрема,

$$\Psi_c^\bullet(x)\Big|_{c-0}^{c+0} = 0, \qquad (\Psi_c^\bullet(x))'\Big|_{c-0}^{c+0} = -\mathbf{1}_{H_0}. \tag{11}$$

Доведення. Позначимо тимчасово праву частину рівності (10) через $\psi_c(x)$ і означимо оператор $\psi_c : H_0 \to H_e$ рівністю $(\psi_c h)(x) = \psi_c(x)h$. Маємо $\forall u \in H_e$, $\forall h \in H_0$

$$(\psi_c h \mid u)_e = \int_a^b [((\psi_c h)'(x) \mid u'(x))_{H_0} + (p(x)(\psi_c h)(x) \mid u(x))_{H_0}]dx =$$

$$= \int_a^c [(\omega_2'(x)\tilde\omega_{22}(c)h \mid u'(x))_{H_0} + (p(x)\omega_2(x)\tilde\omega_{22}(c)h \mid u(x))_{H_0}]dx -$$

$$- \int_c^b [(\omega_1'(x)\tilde\omega_{12}(c)h \mid u'(x))_{H_0} + (p(x)\omega_1(x)\tilde\omega_{12}(c)h \mid u(x))_{H_0}]dx =$$

$$= (\omega_2'(x)\tilde\omega_{22}(c)h \mid u(x))_{H_0}\Big|_{x=a}^{x=c} + \int_a^c ((-\omega_2''(x) +$$

$$+ p(x)\omega_2(x))\tilde\omega_{22}(c)h \mid u(x))_{H_0}\,dx - (\omega_1'(x)\tilde\omega_{12}(c)h \mid u(x))_{H_0}\Big|_{x=c}^{x=b} +$$

$$+ \int_c^b ((-\omega_1''(x) + p(x)\omega_1(x))\tilde\omega_{12}(c)h \mid u(x))_{H_0}\,dx =$$

$$= (\omega_2'(c)\tilde\omega_{22}(c)h \mid u(c))_{H_0} + (\omega_1'(c)\tilde\omega_{12}(c)h \mid u(c))_{H_0} =$$

$$= ([\omega_1'(c)\tilde\omega_{12}(c) + \omega_2'(c)\tilde\omega_{22}(c)]h \mid u(c))_{H_0} =$$

$$= (h \mid u(c))_{H_0} = (h \mid \Psi_c u)_{H_0} = (\Psi_c^\bullet h \mid u)_e ,$$

тобто $\Psi_c^\bullet = \psi_c$, а, отже, $\Psi_c^\bullet(x) = \psi_c(x)$, $x \in [a,b]$. Зокрема (див. (9)),

$$\Psi_c^\bullet(x)\Big|_{c-0}^{c+0} = \psi_c(x)\Big|_{c-0}^{c+0} = \omega_2(c)\tilde\omega_{22}(c) + \omega_1(c)\tilde\omega_{12}(c) = 0\,,$$

$$(\Psi_c^\bullet(x))'\Big|_{c-0}^{c+0} = \psi_c'(x)\Big|_{c-0}^{c+0} = -\omega_1'(c)\tilde\omega_{12}(c) - \omega_2'(c)\tilde\omega_{22}(c) = -\mathbf{1}_{H_0}\,.$$

Лему доведено. ◊

Нехай $G^{(i)}, P^{(i)}, Q^{(i)}, c_i$ такі, як вище, $G = G^{(1)} \oplus G^{(2)}$ і

$$\forall u \in H^1 \qquad \Psi^{(i)}u = P^{(i)}u(c_i), \qquad i = 1,2,$$

$$\Psi u = (P^{(1)}u(c_1), P^{(2)}u(c_2)), \quad \text{тобто} \quad \Psi = \Psi^{(1)} \oplus \Psi^{(2)}.$$

Зрозуміло, що

$$\forall g = (g_1, g_2) \in G \qquad (\Psi^\bullet g)(x) = \Psi_{c_1}^\bullet(x)g_1 + \Psi_{c_2}^\bullet(x)g_2\,,$$

зокрема (див. (11)),

$$(\Psi^\bullet g)(x)\Big|_{c_i-0}^{c_i+0} = 0, \qquad (\Psi^\bullet g)'(x)\Big|_{c_i-0}^{c_i+0} = -g_i, \qquad i = 1,2\,. \tag{12}$$

4. Деякі узагальнення формули Лагранжа. Нехай $L(\alpha,\beta)$, $L_0(\alpha,\beta)$ такі, як вище. Приймемо $\mathcal{H} = H_0 \oplus H_0$ і $\forall y \in D(L(\alpha,\beta)) = H^2(\alpha,\beta)$

$$\Gamma_1(\alpha,\beta)y = (y'(\alpha), -y'(\beta)), \qquad \Gamma_2(\alpha,\beta)y = (y(\alpha), y(\beta))$$

(у випадку, коли $\alpha = a$, $\beta = b$, писатимемо Γ_i замість $\Gamma_i(\alpha,\beta)$, $i = 1,2$). Відомо [16], що $(\mathcal{H}, \Gamma_1(\alpha,\beta), \Gamma_2(\alpha,\beta))$ є простором граничних значень в сенсі означення, запропонованого в [7], (див. також [1]), зокрема,

$$\forall y,z \in D(L(\alpha,\beta)) \qquad (L(\alpha,\beta)y \mid z)_{H(\alpha,\beta)} - (y \mid L(\alpha,\beta)z)_{H(\alpha,\beta)} =$$

$$= (\Gamma_1(\alpha,\beta)y \mid \Gamma_2(\alpha,\beta)z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2(\alpha,\beta)y \mid \Gamma_1(\alpha,\beta)z)_{\mathcal{H}} \tag{13}$$

(формула Лагранжа).

Далі, означимо оператори $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0$ таким чином:

$$\mathcal{L} = L(a,c_1) \oplus L(c_1,c_2) \oplus L(c_2,b), \qquad \mathcal{L}_0 = L_0(a,c_1) \oplus L_0(c_1,c_2) \oplus L_0(c_2,b).$$

Легко бачити, що $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0 \in \mathcal{C}(H)$ і $\mathcal{L}_0^* = \mathcal{L}$. Крім того, як неважко зміркувати, $(\mathcal{H}^3, \Gamma_1(a,c_1,c_2,b), \Gamma_2(a,c_1,c_2,b))$, де

$$\Gamma_i(a,c_1,c_2,b) = \Gamma_i(a,c_1) \oplus \Gamma_i(c_1,c_2) \oplus \Gamma_i(c_2,b), \qquad i = 1,2,$$

є простором граничних значень оператора $\mathcal{L}_0$, а, отже, $(\mathcal{H}^6, \Gamma(a,c_1,c_2,b))$, де

$$\Gamma(a,c_1,c_2,b) = \Gamma_1(a,c_1,c_2,b) \oplus \Gamma_2(a,c_1,c_2,b)$$

– крайова пара для $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$, тобто [11]

$$R(\Gamma(a,c_1,c_2,b)) = \mathcal{H}^6, \qquad \ker(\Gamma(a,c_1,c_2,b)) = D(\mathcal{L}_0). \tag{14}$$

Теорема 1. *$L_{\min}, L_{\max} \in \mathcal{C}(H)$ і $L_{\min}^* = L_{\max}$.*

Д о в е д е н н я. Зрозуміло, що

$$\mathcal{L}_0 \subset L_{\min} \subset L_0 \subset L \subset L_{\max} \subset \mathcal{L}.$$

Звідси випливає, що $L_{\min}, L_{\max}$ щільно визначені і $L_{\min}^* \subset \mathcal{L}$. Далі, співвідношення (4)–(6) можна переписати у такому вигляді:

$$D(L_{\min}) = \{y \in D(\mathcal{L}) : P^{(i)}y(c_i - 0) = P^{(i)}y(c_i + 0),$$
$$Q^{(i)}y(c_i - 0) = Q^{(i)}y(c_i + 0), \quad y'(c_i - 0) = y'(c_i + 0), \quad i = 1,2,$$
$$y(a) = y(b) = 0, \ \ y'(a) = y'(b) = 0\}, \qquad L_{\min} \subset \mathcal{L}, \tag{15}$$

$$D(L_{\max}) = \{y \in D(\mathcal{L}) : y(c_i - 0) = y(c_i + 0),$$
$$Q^{(i)}y'(c_i - 0) = Q^{(i)}y'(c_i + 0)\}, \qquad L_{\max} \subset \mathcal{L}. \tag{16}$$

Звідси випливає замкненість операторів $L_{\min}, L_{\max}$, оскільки область визначення кожного з них являє собою многовид нулів деякого лінійного неперервного на $D[\mathcal{L}]$ оператора.[1]

Беручи до уваги (13), (15), (16), приходимо до висновку, що $L_{\max} \subset L_{\min}^*$. Далі, нехай $z \in D(L_{\min}^*)$. Оскільки $L_{\min}^* \subset \mathcal{L}$, то

$$\forall y \in D(L_{\min}) \qquad \sum_{i=1}^{2} (y'(c_i) \mid z(c_i + 0) - z(c_i - 0))_{H_0} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} (Q^{(i)}y(c_i) \mid Q^{(i)}z'(c_i - 0) - Q^{(i)}z'(c_i + 0))_{H_0} = 0.$$

Звідси і з (14) випливає, що $\{(y'(c_1), y'(c_2), Q^{(1)}y(c_1), Q^{(2)}y(c_2)) : y \in D(L_{\min})\} = \mathcal{H} \oplus G$, тому $z(c_i - 0) = z(c_i + 0)$, $Q^{(i)}z'(c_i - 0) = Q^{(i)}z'(c_i + 0)$, $i = 1,2$, тобто $z \in D(L_{\max})$. Теорему доведено. ◊

Означимо оператори $\Gamma_1^{[\Psi]}, \Gamma_2^{[\Psi]} : D[L_{\max}] \to \mathcal{H}$ і $\Gamma_3^{[\Psi]}, \Gamma_4^{[\Psi]} : D[L_{\max}] \to G$, таким чином:

$$\Gamma_1^{[\Psi]}y = (y'(a), -y'(b)), \qquad \Gamma_2^{[\Psi]}y = (y(a), y(b)),$$
$$\Gamma_3^{[\Psi]}y = (P^{(1)}(y'(c_1 + 0) - y'(c_1 - 0)), \ P^{(2)}(y'(c_2 + 0) - y'(c_2 - 0)))$$

(оператори $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ можна опустити),

$$\Gamma_4^{[\Psi]}y = (P^{(1)}y(c_1), P^{(2)}y(c_2)), \qquad \text{тобто} \qquad \Gamma_4^{[\Psi]} = \Psi \mid D(L_{\max}).$$

---

[1]Тут і надалі під $D[T]$, де $T \in \mathcal{C}(H)$, розуміємо многовид $D(T)$, трактований як гільбертів простір зі скалярним добутком $(y \mid z)_T = (y \mid z) + (Ty \mid Tz)$.

Теорема 2. $(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}, \Gamma_1^{[\Psi]}\oplus\Gamma_3^{[\Psi]}, \Gamma_2^{[\Psi]}\oplus\Gamma_4^{[\Psi]})$ – *простір граничних значень оператора* $L_{\min}$, *зокрема, для будь-яких* $y, z \in D(L_{\max})$

$$(L_{\max}y \mid z) - (y \mid L_{\max}z) = (\Gamma_1^{[\Psi]}y \mid \Gamma_2^{[\Psi]}z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2^{[\Psi]}y \mid \Gamma_1^{[\Psi]}z)_{\mathcal{H}} + $$
$$+ (\Gamma_3^{[\Psi]}y \mid \Gamma_4^{[\Psi]}z)_G - (\Gamma_4^{[\Psi]}y \mid \Gamma_3^{[\Psi]}z)_G . \qquad (17)$$

Д о в е д е н н я. З (14), (16) випливає, що $R\left(\overset{4}{\underset{i=1}{\oplus}}\Gamma_i^{[\Psi]}\right) = \mathcal{H}^2\oplus G^2$, а з (15) – що $\ker\left(\overset{4}{\underset{i=1}{\oplus}}\Gamma_i^{[\Psi]}\right) = D(L_{\min})$. Тому $\left(\mathcal{H}^2\oplus G^2, \overset{4}{\underset{i=1}{\oplus}}\Gamma_i^{[\Psi]}\right)$ – крайова пара для $(L_{\max}, L_{\min})$. Рівність (17) отримуємо з (13), (16) за допомогою безпосередніх обчислень. ◊

Лема 2.

$$\textbf{\textit{а}})\ R(\Psi^{\bullet})\cap D(L) = \{0\}; \qquad \textbf{\textit{б}})\ R(\Psi) = R(\Psi \mid D(L_0)) = G . \qquad (18)$$

Д о в е д е н н я. ***а***) Нехай $(g_1, g_2) \in G$ і $\Psi^{\bullet}(g_1, g_2) \in D(L)$. Тоді

$$(\Psi^{\bullet}(g_1,g_2)(x))'\Big|_{c_i-0}^{c_i+0} = 0, \qquad i = 1,2 .$$

Але з огляду на (12) це можливо тільки при $g_1 = g_2 = 0$.

б) Правильність цього твердження випливає безпосередньо з (14) та означення оператора Ψ. ◊

Теорема 3.

а) $D(L_{\max}) = D(L) \dot{+} R(\Psi^{\bullet})$; (19)

б) *оператор* $Q \overset{\text{def}}{=} -\Psi^{\bullet}\Gamma_3^{[\Psi]}$ – *проектор* $D(L_{\max}) \to R(\Psi^{\bullet})$, *що відповідає розкладові* (19);

в) $\ker L_{\max} = \ker L \dot{+} R(\Psi^{\bullet})$; (20)

г) $\forall y \in D(L_{\max}) \qquad L_{\max}y = L(y + \Psi^{\bullet}\Gamma_3^{[\Psi]}y)$. (21)

Д о в е д е н н я. З (10)–(12) та означення оператора Ψ зрозуміло, що

$$R(\Psi^{\bullet}) \subset \ker L_{\max} \subset D(L_{\max}), \qquad (22)$$

а, отже,

$$D(L) \dot{+} R(\Psi^{\bullet}) \subset D(L_{\max}). \qquad (23)$$

Навпаки, нехай $y \in D(L_{\max})$. Маємо (див. (12))

$$(y - Qy)'(x)\Big|_{c_i-0}^{c_i+0} = y'(x)\Big|_{c_i-0}^{c_i+0} +$$
$$+\left[\Psi^{\bullet}\left(y'(x)\Big|_{c_i-0}^{c_i+0}, y'(x)\Big|_{c_i-0}^{c_i+0}\right)\right]'(x)\Big|_{c_i-0}^{c_i+0} =$$
$$= y'(x)\Big|_{c_i-0}^{c_i+0} - y'(x)\Big|_{c_i-0}^{c_i+0} = 0, \qquad i = 1,2 .$$

Таким чином,

$$y - Qy \in D(L), \qquad Qy \in R(\Psi^{\bullet}). \qquad (24)$$

З (23), (24) випливає правильність тверджень ***а***) і ***б***).

Далі, з огляду на (22) $\ker L \dot{+} R(\Psi^{\bullet}) \subset \ker L_{\max}$. Навпаки, нехай $y \in \ker L_{\max}$. Оскільки [8] $D(L) = D(L_F) \dot{+} \ker L$, то (див. (19))

$$D(L_{\max}) = D(L_F) \dotplus \ker L \dotplus R(\Psi^\bullet),$$

тому існують $y_1 \in D(L_F)$, $y_2 \in \ker L$, $y_3 \in R(\Psi^\bullet)$ такі, що $y = y_1 + y_2 + y_3$. Маємо $0 = L_{\max} y = L_F y_1$, звідки $y_1 = 0$. Тому $y \in \ker L \dotplus R(\Psi^\bullet)$. Рівність (20) доведено.

Нарешті, для всякого $y \in D(L_{\max})$

$$L_{\max} y = L_{\max}\big(y + \Psi^\bullet \Gamma_3^{[\Psi]} y\big) - L_{\max} \Psi^\bullet \Gamma_3^{[\Psi]} y = L\big(y + \Psi^\bullet \Gamma_3^{[\Psi]} y\big). \qquad \Diamond$$

Перш ніж формулювати основний результат цього пункту, введемо в розгляд деякі допоміжні оператори. Отже, нехай $\alpha_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$ ті самі, що в **п. 2**, тобто такі, що операторна матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^4$ оборотна в $\mathcal{B}(H_0^4)$,

$$A_{11} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{Vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{Vmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{Vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} \end{Vmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{Vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{Vmatrix}, \tag{25}$$

$$\mathcal{U}_1 = A_{11}\Gamma_1 + A_{12}\Gamma_2, \qquad \mathcal{U}_2 = A_{21}\Gamma_1 + A_{22}\Gamma_2, \qquad \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2, \tag{26}$$

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & i\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \\ -i\mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{27}$$

Далі, нехай $\tilde{\alpha}_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$, $i, j = 1, \ldots, 4$, такі, що оператор $\tilde{A} = (\tilde{\alpha}_{ij})_{i,j=1}^4$ (однозначно) визначається з рівняння

$$AJ\tilde{A}^* = J, \tag{28}$$

$$\tilde{A}_{11} = \begin{Vmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & \tilde{\alpha}_{12} \\ \tilde{\alpha}_{21} & \tilde{\alpha}_{22} \end{Vmatrix}, \qquad \tilde{A}_{12} = \begin{Vmatrix} \tilde{\alpha}_{13} & \tilde{\alpha}_{14} \\ \tilde{\alpha}_{23} & \tilde{\alpha}_{24} \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{A}_{21} = \begin{Vmatrix} \tilde{\alpha}_{31} & \tilde{\alpha}_{32} \\ \tilde{\alpha}_{41} & \tilde{\alpha}_{42} \end{Vmatrix}, \qquad \tilde{A}_{22} = \begin{Vmatrix} \tilde{\alpha}_{33} & \tilde{\alpha}_{34} \\ \tilde{\alpha}_{43} & \tilde{\alpha}_{44} \end{Vmatrix}, \tag{29}$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_1 = \tilde{A}_{11}\Gamma_1 + \tilde{A}_{12}\Gamma_2, \qquad \tilde{\mathcal{U}}_2 = \tilde{A}_{21}\Gamma_1 + \tilde{A}_{22}\Gamma_2, \qquad \tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{U}}_2, \tag{30}$$

$$\mathcal{U}_i^{[\Psi]} = A_{i1}\Gamma_1^{[\Psi]} + A_{i2}\Gamma_2^{[\Psi]}, \quad i = 1, 2, \qquad \mathcal{U}^{[\Psi]} = \mathcal{U}_1^{[\Psi]} \oplus \mathcal{U}_2^{[\Psi]}, \tag{31}$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_i^{[\Psi]} = \tilde{A}_{i1}\Gamma_1^{[\Psi]} + \tilde{A}_{i2}\Gamma_2^{[\Psi]}, \quad i = 1, 2, \qquad \tilde{\mathcal{U}}^{[\Psi]} = \tilde{\mathcal{U}}_1^{[\Psi]} \oplus \tilde{\mathcal{U}}_2^{[\Psi]}, \tag{32}$$

$$(\Gamma_3 \oplus \Gamma_4)^{[\Psi]} = \Gamma_3^{[\Psi]} \oplus \Gamma_4^{[\Psi]}, \qquad \Gamma^{[\Psi]} = \Gamma_1^{[\Psi]} \oplus \Gamma_2^{[\Psi]}.$$

Теорема 4. ***а***) $(\mathcal{H}^2 \oplus G^2,\ \mathcal{U}^{[\Psi]} \oplus (\Gamma_3 \oplus \Gamma_4))^{[\Psi]}$, $(\mathcal{H}^2 \oplus G^2,\ \tilde{\mathcal{U}}^{[\Psi]} \oplus (\Gamma_3 \oplus \Gamma_4)^{[\Psi]})$ *– крайові пари для* $(L_{\max}, L_{\min})$;

б) $\forall y, z \in D(L_{\max})$

$$(L_{\max} y \mid z) - (y \mid L_{\max} z) = (\mathcal{U}_1^{[\Psi]} y \mid \tilde{\mathcal{U}}_2^{[\Psi]} z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2^{[\Psi]} y \mid \tilde{\mathcal{U}}_1^{[\Psi]} z)_{\mathcal{H}} +$$
$$+ (\Gamma_3^{[\Psi]} y \mid \Gamma_4^{[\Psi]} z)_G - (\Gamma_4^{[\Psi]} y \mid \Gamma_3^{[\Psi]} z)_G. \tag{33}$$

Д о в е д е н н я. ***а***) Правильність цього твердження випливає з теореми 2 і з того, що як $(\mathcal{U}^{[\Psi]} \oplus (\Gamma_3 \oplus \Gamma_4)^{[\Psi]})$, так і $(\tilde{\mathcal{U}}^{[\Psi]} \oplus (\Gamma_3 \oplus \Gamma_4)^{[\Psi]})$ можна отримати з $\bigoplus_{i=1}^{4} \Gamma_i^{[\Psi]}$ множенням зліва на оборотний в $\mathcal{B}(\mathcal{H}^2 \oplus G^2)$ оператор.

б) Достатньо переконатися (пор. (17) і (33)), що $\forall y, z \in D(L_{\max})$

$$(\mathcal{U}_1^{[\Psi]} y \mid \tilde{\mathcal{U}}_2^{[\Psi]} z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2^{[\Psi]} y \mid \tilde{\mathcal{U}}_1^{[\Psi]} z)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1^{[\Psi]} y \mid \Gamma_2^{[\Psi]} z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2^{[\Psi]} y \mid \Gamma_1^{[\Psi]} z)_{\mathcal{H}},$$

або, що еквівалентно, (див. (25)–(27), (29)–(32))

$$(JA\Gamma^{[\Psi]} y \mid \tilde{A}\Gamma^{[\Psi]} z)_{\mathcal{H}^2} = (J\Gamma^{[\Psi]} y \mid \Gamma^{[\Psi]} z)_{\mathcal{H}^2}.$$

Тому досить довести, що $\tilde{A}^* JA = J$. Але це випливає безпосередньо з (28) і рівності $J^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{H}^2}$. ◊

Зауваження 1. Оператори $\Gamma_1^{[\psi]}, \ldots, \Gamma_4^{[\psi]}$, а, отже, й оператори $\mathcal{U}_i^{[\psi]}$, $\tilde{\mathcal{U}}_i^{[\psi]}$ мають нульові $L_{\max}$-межі в сенсі Т. Като [5]. Це випливає безпосередньо з того, що, як доведено в [17], оператори $\Gamma_1(\alpha,\beta)$, $\Gamma_2(\alpha,\beta)$ мають нульові $L(\alpha,\beta)$-межі.

5. Оператор T^*. Нехай T – оператор, означений за допомогою співвідношень (7), (8). Приймемо $\Phi = \Phi^{(1)} \oplus \Phi^{(2)}$, $\chi = \Phi + \Psi$, $P_G = P^{(1)} \oplus P^{(2)}$. Застосовуючи ці, а також введені вище позначення, маємо

$$D(T) = \{ y \in D(L_{\max}) : \mathcal{U}_1^{[\Psi]} y - \Gamma_4^{[\Psi]} y = \Phi y,\ P_G \mathcal{U}_2^{[\Psi]} y = \Gamma_3^{[\Psi]} y \}, \tag{34}$$

$$\forall y \in D(T) \qquad Ty = L_{\max} y + \Phi^* \mathcal{U}_2^{[\psi]} y. \tag{35}$$

Беручи до уваги теорему 3 і рівність $\Phi^{\bullet} = L_F^{-1}\Phi^*$, ці співвідношення можна переписати таким чином:

$$D(T) = \{ y \in D(L) \dot{+} R(\chi^{\bullet}) : y + \chi^{\bullet} \mathcal{U}_2^{[\Psi]} y \in D(L),\ \mathcal{U}_1^{[\Psi]} y = \chi y \}, \tag{36}$$

$$\forall y \in D(T) \qquad Ty = L(y + \chi^{\bullet} \mathcal{U}_2^{[\Psi]} y). \tag{37}$$

Далі, нехай $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, 4$, ті самі, що в (28), (29), і $\forall z \in D(L_{\max})$

$$\tilde{u}_i(z) = \tilde{\alpha}_{i1} z'(a) - \tilde{\alpha}_{i2} z'(b) + \tilde{\alpha}_{i3} z(a) + \tilde{\alpha}_{i4} z(b), \qquad i = 1, \ldots, 4.$$

Теорема 5. ***а***) $T \in \mathcal{C}(H)$;

б) $D(T^*) = \{ z \in D(L_{\max}) : \tilde{u}_i(z) = P^{(i)} z(c_i) + \Phi^{(i)} z,$

$$P^{(i)} \tilde{u}_{i+2}(z) = z'(c_i + 0) - z'(c_i - 0),\ i = 1, 2 \}, \tag{38}$$

$$\forall z \in D(T^*) \qquad T^* z = l_{\mathrm{cl}}[z] + (\Phi^{(1)})^* \tilde{u}_3(z) + (\Phi^{(2)})^* \tilde{u}_4(z). \tag{39}$$

Д о в е д е н н я. Будемо виходити з того, що оператор T визначено за допомогою співвідношень (34), (35). Замкненість і щільна визначеність цього оператора випливає із зауваження 1 та результатів праці [17].

Застосовуючи теорему 4, а також теорему 4.4.9 і наслідок 4.4.10 з [11] і міркуючи так, як при доведенні теореми 2 з праці [23], переконуємось, що

$$D(T^*) = \{ z \in D(L_{\max}) : \tilde{\mathcal{U}}_1^{[\Psi]} z - \Gamma_4^{[\Psi]} z = \Phi z,\ P_G \tilde{\mathcal{U}}_2^{[\Psi]} z = \Gamma_3^{[\Psi]} z \}, \tag{40}$$

$$\forall z \in D(T^*)\ Tz = L_{\max} z + \Phi^* \tilde{\mathcal{U}}_2^{[\Psi]} z. \tag{41}$$

Зрозуміло, що співвідношення (38), (39) та (40), (41) – еквівалентні. ◊

Зауваження 2. Співвідношення (40), (41) можна переписати в такому вигляді:

$$D(T^*) = \{ z \in D(L) \dot{+} R(\chi^{\bullet}) : z + \chi^{\bullet} \tilde{\mathcal{U}}_2^{[\Psi]} z \in D(L),\ \tilde{\mathcal{U}}_1^{[\Psi]} z = \chi z \}, \tag{42}$$

$$\forall z \in D(T^*) \quad T^* z = L(z + \chi^{\bullet} \tilde{\mathcal{U}}_2^{[\Psi]} z). \tag{43}$$

6. Умови взаємної спряженості збурених операторів. Нехай $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \widehat{\mathcal{U}}_1 \oplus \widehat{\mathcal{U}}_2)$, $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \widehat{\mathcal{V}}_1 \oplus \widehat{\mathcal{V}}_2)$ – дві крайові пари для (L, L_0), а для будь-якого оператора вигляду $W = B_1\Gamma_1 + B_2\Gamma_2$, де $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $W^{[\Psi]} \overset{\text{def}}{=} B_1\Gamma_1^{[\Psi]} + B_2\Gamma_2^{[\Psi]}$. Означимо оператори $\widehat{T}, \tilde{T}$ за допомогою співвідношень

$$D(\widehat{T}) = \{y \in D(L)\dot{+}R(\chi^\bullet) : y + \chi^\bullet \widehat{\mathcal{U}}_2^{[\Psi]} y \in D(L),\ \widehat{\mathcal{U}}_1^{[\Psi]} y = \chi y\},$$
$$\forall y \in D(\widehat{T}) \qquad \widehat{T}y = L(y + \chi^\bullet \widehat{\mathcal{U}}_2^{[\Psi]} y),$$
$$D(\tilde{T}) = \{z \in D(L)\dot{+}R(\chi^\bullet) : z + \chi^\bullet \tilde{\mathcal{V}}_2^{[\Psi]} z \in D(L),\ \tilde{\mathcal{V}}_1^{[\Psi]} z = \chi z\},$$
$$\forall z \in D(\tilde{T}) \qquad \tilde{T}z = L(z + \chi^\bullet \tilde{\mathcal{V}}_2^{[\Psi]} z).$$

Далі, нехай P_χ – ортопроектор $\mathcal{H} \to \bar{R}(\chi)$. Покладемо $U_2 = P_\chi \mathcal{U}_2$, $\widehat{U}_2 = P_\chi \widehat{\mathcal{U}}_2$, $\tilde{V}_2 = P_\chi \tilde{\mathcal{V}}_2$; $U_1 = \mathcal{U}_1$, $\widehat{U}_1 = P_\chi \widehat{\mathcal{U}}_1$, $\tilde{V}_1 = \tilde{\mathcal{V}}_1$ (для уніфікації); $U = U_1 \oplus U_2$, $\widehat{U} = \widehat{U}_1 \oplus \widehat{U}_2$, $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$.

Зрозуміло, що

$$D(T) = \{y \in D(L)\dot{+}R(\chi^\bullet) : y + \chi^\bullet U_2^{[\Psi]} y \in D(L),\ U_1^{[\Psi]} y = \chi y\}, \tag{44}$$
$$\forall y \in D(T) \qquad Ty = L(y + \chi^\bullet U_2^{[\Psi]} y), \tag{45}$$
$$D(\widehat{T}) = \{y \in D(L)\dot{+}R(\chi^\bullet) : y + \chi^\bullet \widehat{U}_2^{[\Psi]} y \in D(L),\ \widehat{U}_1^{[\Psi]} y = \chi y\}, \tag{46}$$
$$\forall y \in D(\widehat{T}) \qquad \widehat{T}y = L(y + \chi^\bullet \widehat{U}_2^{[\Psi]} y), \tag{47}$$
$$D(\tilde{T}) = \{z \in D(L)\dot{+}R(\chi^\bullet) : z + \chi^\bullet \tilde{V}_2^{[\Psi]} z \in D(L),\ \tilde{V}_1^{[\Psi]} z = \chi z\}, \tag{48}$$
$$\forall z \in D(\tilde{T}) \qquad \tilde{T}z = L(z + \chi^\bullet \tilde{V}_2^{[\Psi]} z). \tag{49}$$

Лема 3. $\widehat{T} = T$ *тоді й тільки тоді, коли існує бієкція* $\Omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \bar{R}(\chi))$ *така, що* $\Omega \mid R(\chi) \oplus \{0\} = \mathbf{1}_{R(\chi)\oplus\{0\}}$, $\Omega \mid \{0\} \oplus R(\chi) = \mathbf{1}_{\{0\}\oplus R(\chi)}$, $\widehat{U} = \Omega U$.

Д о в е д е н н я аналогічне до доведення леми 3 праці [23]. ◊

Зауваження 3. Підставляючи $\chi = 0$ в (44)–(49), отримуємо

$$T = L \mid \ker U_1 \overset{\text{def}}{=} L_1, \quad \widehat{T} = L \mid \ker \widehat{U}_1 \overset{\text{def}}{=} \widehat{L}_1, \quad \tilde{T} = L \mid \ker U_1 \overset{\text{def}}{=} \tilde{L}_1, \tag{50}$$

при цьому $T, \widehat{T}, \tilde{T}$ трактуємо як збурення операторів $L_1, \widehat{L}_1, \tilde{L}_1$ відповідно. Зазначимо, що таке збурення змінює не тільки закон дії оператора, але й його область визначення.

Теорема 6. *Оператори* T *та* $\widehat{T}$ *є взаємно спряженими тоді й тільки тоді, коли*

а) $$UL\tilde{V}' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -\mathbf{1}_{\bar{R}(\chi_1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1}_{\bar{R}(\chi_2)} & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

де оператор $\tilde{V}' : \mathcal{H}^2 \to D[L]$ *визначаємо з огляду на умову*

$$\forall y \in D(L), \qquad \forall h \in \mathcal{H}^2 \qquad (\tilde{V}y \mid h)_{\mathcal{H}^2} = (y \mid \tilde{V}'h)_L,$$

а $UL\tilde{V}'$ *трактуємо як відображення з* $\bar{R}(\chi) \oplus R(\chi)^\perp \oplus \bar{R}(\chi)$ *в себе;*

б) *оператори* L_1 *та* $\tilde{L}_1$, *означені згідно з* (50), *взаємно спряжені.*

Наслідок. *Нехай* $\beta_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$, $i, j = 1,\ldots,4$, *такі, що оператор* $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^4$ *оборотний в* $\mathcal{B}(H_0^4)$, *і* $\forall z \in D(L_{\max})$

$$v_i(z) = \beta_{i1}z'(a) - \beta_{i2}z'(b) + \beta_{i3}z(a) + \beta_{i4}z(b), \qquad i = 1,\ldots,4,$$

а оператор $\tilde{T}$ *має такий вигляд:*

$$D(\tilde{T}) = \{z \in D(L_{\max}) : v_i(z) = P^{(i)}z(c_i) + \Phi^{(i)}z,$$

$$P^{(i)}v_{i+2}(z) = z'(c_i + 0) - z'(c_i - 0),\ i = 1,2\},$$

$$\forall z \in D(\tilde{T}) \qquad \tilde{T}z = l_{\mathrm{cl}}[z] + (\Phi^{(1)})^* v_3(z) + (\Phi^{(2)})^* v_4(z).$$

У цьому випадку $T^* = \tilde{T}$ *тоді й тільки тоді, коли*

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \oplus P_\chi)[AJB^* - J](\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \oplus P_\chi) = 0,$$

де J *означено згідно з* (27), *і* $L_1^* = \tilde{L}_1$.

Д о в е д е н н я цих тверджень аналогічні до доведень теореми 3 та наслідку з неї в [23]. ◊

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л., Кочубей А. Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1299–1313.
3. *Зиатдинов Ф. З.* О линейных дифференциальных операторах второго порядка в гильбертовом пространстве вектор-функций со значениями из абстрактного гильбертова пространства // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 4. – С. 89–100.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976. – 576 с.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – Москва: Мир, 1972. – 740 с.
6. *Кочубей А. Н.* О расширениях неплотно заданного симметрического оператора // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 2. – С. 314–320.
7. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41–48.
8. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и её приложения. I // Мат. сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431–495.
9. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.
10. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве // Теория функций, функ. анализ и их прилож. – 1972. – Вып. 16. – С. 165–186.
11. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 212 с.
12. *Мильо О. Я., Сторож О. Г.* Умови секторіальності та розв'язності диференціально-граничних операторів типу Штурма – Ліувілля з багатоточково-інтегральними крайовими умовами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 4. – С. 26–31.
13. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. – Москва: Наука, 1968. – 576 с.
14. *Піпа Г. М., Сторож О. Г.* Напівгладкі звуження додатно визначеного оператора та їхні власні розширення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 2. – С. 84–89.
15. *Піпа Г. М., Сторож О. Г.* Про диференціально-граничний оператор типу Штурма – Ліувілля з багатоточково-інтегральними крайовими умовами у просторі нескінченновимірних вектор-функцій // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 34–39.
16. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН. СССР. – 1969. – **184**, № 5. – С. 1034–1037.
17. *Сторож О. Г., Шувар О. Б.* Про один клас майже обмежених збурень гладких звужень замкненого оператора // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 1396–1402.

18. *Филлипс Р. С.* Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных // Математика: Сб. переводов. – 1962. – **6**, № 4. – С. 11–70.
19. *Arlinski Yu. M.* On m-accretive extensions and restrictions // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 1998. – **4**, No. 3. – P. 1–26.
20. *Coddington E. A.* Eigenfunction expansions for nondensely defined operators generated by symmetric ordinary differential expressions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – **79**, No. 5. – P. 964–968.
21. *Evans W. D., Knowles J.* On the extension problem for accretive differential operators // J. Funct. Anal. – 1985. – **63**, No. 3. – P. 276–298.
22. *Krall A. M.* The development of general differential and differential-boundary systems // Rocky J. Math. – 1975. – **5**. – P. 493–542.
23. *Pipa H. M., Storozh O. G.* On some perturbations changing the domain of proper extension of positively definite operator // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2005. – **11**, No. 3. – P. 257–269.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ОПЕРАТОРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассматривается один класс дифференциально-граничных операторов типа Штурма – Лиувилля с многоточечно-интегральными краевыми условиями, действующих в гильбертовом пространстве вектор-функций, принимающих значения в абстрактном гильбертовом пространстве. Доказаны замкнутость и плотная определенность, а также установлены условия взаимной сопряженности рассматриваемых операторов.

ON A CLASS OF PERTURBATIONS OF THE STURM – LIOUVILLE OPERATOR WITH BOUNDED POSITIVE OPERATOR POTENTIAL

A class of differential-boundary operators of the Sturm – Liouville type with multi-point-integral boundary conditions, acting in Hilbert space of vector-functions taking values in abstract Hilbert space, is considered. It is proved that investigated operators are closed and densely defined ones. In addition, the criterion of mutual adjointness of these operators is established.

[1] Береж. агротех. ін-т, Бережани,

[2] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
21.04.07