УДК 517.95

О. В. Доманська

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ БЕЗ УМОВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Досліджено клас нелінійних еліптичних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності в необмежених областях, для яких крайові задачі з граничними умовами типу Діріхле є коректними (розв'язок існує, єдиний і неперервно залежить від вихідних даних) без будь-яких умов на поведінку розв'язку та жодних обмежень на зростання вихідних даних на нескінченності. Розглядаються узагальнені розв'язки досліджуваних задач із відповідних узагальнених просторів Лебеґа.

Вступ. Крайові задачі для еліптичних рівнянь в обмежених областях на даний час є добре вивченими [5–7]. Достатньо повно досліджено такі задачі в необмежених областях у лінійному випадку, а також для багатьох класів нелінійних рівнянь. При цьому встановлено, що для рівнянь, область задання яких необмежена, можуть бути два випадки: ***1***) для забезпечення єдиності розв'язку відповідної крайової задачі необхідно накласти певні умови на його поведінку на нескінченності, а для існування розв'язку – умови на зростання вихідних даних на нескінченності [6]; ***2***) таких умов не потрібно [3, 8–10].

У цій статті розглядатимемо другий випадок. У 1984 році H. Brezis [10] довів, що нелінійне еліптичне рівняння

$$-\Delta u + |u|^{p-2}\, u = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n ,$$

коли $p > 2$, має єдиний узагальнений розв'язок з простору локально інтегровних функцій при $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Пізніше F. Bernis [8] довів аналогічне твердження стосовно рівняння

$$(-\Delta)^m u + |u|^{p-2}\, u = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n , \tag{1}$$

де $m \in \mathbb{N}$, а $p \in (2, +\infty)$, якщо $1 \le n \le 2m$, і $p \in \left(2; \dfrac{2n}{n-2m}\right]$, якщо $n > 2m$. У 1996 році М. М. Бокало [1] описав нові еліптичні рівняння, для яких справедливі результати такого роду стосовно першої крайової задачі, і довів неперервну залежність узагальненого розв'язку розглянутої задачі від правої частини рівняння. Тут, спираючись на роботу [8], подібні результати отримано у випадку крайових задач для більш загальних рівнянь і неоднорідних граничних умов.

Формулювання задачі та основних результатів. Нехай n, m – довільні натуральні числа. Через $\mathbb{Z}_+^n$ позначатимемо множину мультиіндексів розмірності n, тобто множину, елементами якої є $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, де α_i, $i = 1, \ldots, n$, – цілі невід'ємні числа ($\overline{0}$ – мультиіндекс, складений з нулів). Покладемо $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ($|\alpha|$ називають довжиною мультиіндекса α).

Через $\mathbb{R}^n$ позначатимемо арифметичний простір впорядкованих наборів з n дійсних чисел, тобто лінійний простір, складений з елементів вигляду $x = (x_1, \ldots, x_n)$, де $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Нехай Ω – необмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\Gamma := \partial\Omega$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $0 \in \Omega$. Для довільного $R > 0$ позначимо через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \cap \{x : |x| < R\}$ таку, що $0 \in \Omega_R$. Нехай $\Gamma_R := \partial\Omega_R \cap \Gamma$, $R > 0$.

Простори $L_{q,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$, $H^m(\Omega_R)$, $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_R)$, $H^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$, $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$, $H^m_{\Gamma_R}(\Omega_R)$ означуються так, як у [2]. Покладемо $\overset{\circ}{H}{}^m_c(\bar{\Omega}) := \{v \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) : \operatorname{supp} v$ − обмежена множина $\}$.

Нехай $p \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$, причому $p(x) \ge 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. На просторі $C(\bar{\Omega}_R)$, де R − довільне число, $R > 0$, введемо норму

$$\|v\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega_R)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{p,R}\left(\frac{v}{\lambda}\right) \le 1\right\},$$

де $\rho_{p,R}(v) := \int\limits_{\Omega_R} |v(x)|^{p(x)}\,dx$. Поповнення лінійного простору $C(\bar{\Omega}_R)$ за цією нормою позначимо через $L_{p(\cdot)}(\Omega_R)$ (див. [11]). Множина $L_{p(\cdot)}(\Omega_R)$ є лінійним підпростором простору $L_1(\Omega_R)$ і називається узагальненим простором Лебеґа. Позначимо через $L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ замикання простору $C(\bar{\Omega})$ за топологією, породженою системою півнорм: $\|\cdot\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega_R)}$, $R > 0$. Покладемо

$$L_{p(\cdot)}(\Omega) := \left\{v \in L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) : \sup_{R>0}\left\| v\big|_{\Omega_R}\right\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega_R)} < \infty\right\}.$$

Нехай M − підмножина множини $\{0, 1, \ldots, m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$, а $M_0 := M \backslash \{0\}$. Позначимо через N_M кількість мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, довжини $|\alpha|$ яких є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^{N_M}$ − множину векторів $\xi = (\xi_{\bar{0}}, \ldots, \xi_\alpha, \ldots)$, компоненти яких є дійними числами, пронумеровані мультиіндексами розмірності n, які мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (див. [2]). Покладемо $|\xi| = \left(\sum\limits_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^2\right)^{1/2}$, $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$.

Позначимо через $\delta_M u$ вектор, компонентами якого є похідні $D^\alpha u$, $|\alpha| \in M$, від функції u, які впорядковуються так само, як компоненти векторів $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$.

Позначимо $\mathbb{P} = \{p \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) : \operatorname{ess\,inf}\limits_{x \in \Omega} p(x) > 1\}$. Якщо $p \in \mathbb{P}$, то через p^* позначатимемо функцію з $\mathbb{P}$ таку, що $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p^*(x)} = 1$ для м. в. $x \in \Omega$.

Нехай $p \in \mathbb{P}$. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори $(a_{\bar{0}}, \ldots, a_\alpha, \ldots) \equiv (a_\alpha)$ з N_M визначених на $\Omega \times \mathbb{R}^{N_M}$ дійснозначних функцій, які пронумеровані мультиіндексами α з $\mathbb{Z}^n_+$, що мають довжини $|\alpha|$ з M та впорядковані лексикографічно, і функції з будь-якого такого набору (a_α) задовольняють умови:

(A1) для кожного α, $|\alpha| \in M$, функція $a_\alpha(x, \xi)$, $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{N_M}$, є каратеодорівською;

(A2) для майже всіх $x \in \Omega$ та будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$ виконуються нерівності

$$\left|a_{\bar{0}}(x,\xi)\right| \le h_{\bar{0}}(x)\left(\left|\xi_{\bar{0}}\right|^{p(x)-1} + |\xi|^{2/p^*(x)}\right) + g_{\bar{0}}(x),$$
$$|a_\alpha(x,\xi)| \le h_\alpha(x)|\xi| + g_\alpha(x), \qquad |\alpha| \in M_0,$$
де $h_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$, $|\alpha| \in M$, $g_{\bar{0}} \in L_{p^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$, $g_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$, $|\alpha| \in M_0$.

Нехай $\mathbb{F}_p$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_{\bar{0}},\ldots,f_\alpha,\ldots) \equiv (f_\alpha)$ з N_M визначених на Ω дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи множини $\mathbb{A}_p$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють умову

(A3) $\quad f_{\bar{0}} \in L_{p^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}), \qquad f_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}), \qquad |\alpha| \in M_0$.

На $\mathbb{F}_p$ вводимо природним чином топологію локально опуклого простору за допомогою відповідної системи півнорм.

На просторі $H^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ введемо таке відношення еквівалентності: два елементи v_1 і v_2 є еквівалентними, якщо $v_1 - v_2 \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$. Фактор-простір, отриманий з $H^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ за цим відношенням еквівалентності позначимо через $\mathbb{V}_p$. Введемо на $\mathbb{V}_p$ систему півнорм за правилом: $pn_R(\Phi) = \inf_{\varphi\in\Phi} \|\varphi\|_{H^m(\Omega_R)\cap L_{p(\cdot)}(\Omega_R)}$, $R > 0$, $\Phi \in \mathbb{V}_p$, з якою $\mathbb{V}_p$ стає лінійним локально опуклим простором. Нульовий елемент простору $\mathbb{V}_p$ (множину $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$) позначатимемо через $\overset{\circ}{\Phi}$.

Легко перевірити, що, коли послідовність $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty$ елементів простору $\mathbb{V}_p$ збігається до 0, то існує послідовність $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ елементів простору $H^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ така, що $\varphi_k \in \Phi_k$ і $\varphi_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ в $H^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$.

Позначимо $\mathbb{U}_p := H^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ і введемо на $\mathbb{U}_p$ систему півнорм $\|\cdot\|_{H^m(\Omega_R)\cap L_{p(\cdot)}(\Omega_R)}$, $R > 0$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ елементів з $\mathbb{U}_p$ збігається в $\mathbb{U}_p$, якщо для будь-якого $R > 0$ послідовність $\{v_k|_{\Omega_R}\}$ збігається в $H^m(\Omega_R) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega_R)$.

Сформулюємо ***задачу***, яку далі будемо досліджувати. Нехай $\tilde{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ і $\tilde{\mathbb{A}}_p \subset \mathbb{A}_p$, $\tilde{F}_p \subset F_p$, $\tilde{\mathbb{V}}_p \subset \mathbb{V}_p$, $\tilde{\mathbb{U}}_p \subset \mathbb{U}_p$, коли $p \in \tilde{\mathbb{P}}$. Задача, яку назвемо *задачею*

$$\mathbf{BP}(\tilde{\mathbb{A}}_p,\ \tilde{\mathbb{F}}_p,\ \tilde{\mathbb{V}}_p,\ \tilde{\mathbb{U}}_p : p \in \tilde{\mathbb{P}})$$

і будемо далі вивчати, така: *для кожних* $p \in \tilde{\mathbb{P}}$ *і* $(a_\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \tilde{\mathbb{F}}_p$, $\Phi \in \tilde{\mathbb{V}}_p$ *знайти множину*

$$\mathbf{SBP}\big((a_\alpha),(f_\alpha),\Phi\big)$$

функцій $u \in \tilde{\mathbb{U}}_p$ *таких, що* $u \in \Phi$ *і виконується рівність*

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta_M u) D^\alpha \psi(x) \Big\}\, dx = \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha \psi(x) \Big\}\, dx \tag{2}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$.

Скажемо, що задача $\mathbf{BP}(\tilde{\mathbb{A}}_p,\ \tilde{\mathbb{F}}_p,\ \tilde{\mathbb{V}}_p,\ \tilde{\mathbb{U}}_p : p \in \tilde{\mathbb{P}})$ є *розв'язною* (*однозначною*, *однозначно розв'язною*), якщо для кожного $p \in \tilde{\mathbb{P}}$ і будь-яких $(a_\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \tilde{\mathbb{F}}_p$, $\Phi \in \tilde{\mathbb{V}}_p$ множина $\mathbf{SBP}\big((a_\alpha),(f_\alpha),\Phi\big) \subset \tilde{\mathbb{U}}_p$ є непорожньою (містить не більше одного елемента, є одноелементною).

Нехай множини $\tilde{\mathbb{A}}_p$, $\tilde{\mathbb{F}}_p$, $\tilde{\mathbb{V}}_p$, $\tilde{\mathbb{U}}_p$ для кожного $p \in \tilde{\mathbb{P}}$ є топологічними просторами. Скажемо, що задача $\mathbf{BP}(\tilde{\mathbb{A}}_p,\ \tilde{\mathbb{F}}_p,\ \tilde{\mathbb{V}}_p,\ \tilde{\mathbb{U}}_p : p \in \tilde{\mathbb{P}})$ *є коректною*, якщо вона є однозначно розв'язною і для кожного $p \in \tilde{\mathbb{P}}$ і будь-яких елементів $(a_\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \tilde{\mathbb{F}}_p$, $\Phi \in \tilde{\mathbb{V}}_p$ та послідовностей $\{(a_{\alpha,k})\}_{k=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathbb{A}}_p$, $\{(f_{\alpha,k})\}_{k=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathbb{F}}_p$, $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathbb{V}}_p$ таких, що $(a_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\to} (a_\alpha)$ в $\tilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\to} (f_\alpha)$ в $\tilde{\mathbb{F}}_p$, $\Phi_k \underset{k\to\infty}{\to} \Phi$ в $\tilde{\mathbb{V}}_p$, маємо $u_k \underset{k\to\infty}{\to} u$ в $\tilde{\mathbb{U}}_p$, де $u_k \in \mathbf{SBP}\big((a_{\alpha,k}),(f_{\alpha,k}),\Phi_k\big)$, $k \in \mathbb{N}$, і $u \in \mathbf{SBP}\big((a_\alpha),(f_\alpha),\Phi\big)$.

Очевидно, що задачу $\mathbf{BP}(\tilde{\mathbb{A}}_p,\ \tilde{\mathbb{F}}_p,\ \tilde{\mathbb{V}}_p,\ \tilde{\mathbb{U}}_p : p \in \tilde{\mathbb{P}})$ (формально) можна трактувати як крайову задачу для рівнянь вигляду

$$\sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,\delta_M u) = \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x), \qquad x \in \Omega,$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_{\Gamma} = \tilde{\varphi}_j, \qquad j = 0,\dots,m-1,$$

де ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ; $(a_\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_p$, $(f_\alpha) \in \tilde{\mathbb{F}}_p$, $\Phi \in \tilde{\mathbb{V}}_p$ для $p \in \tilde{\mathbb{P}}$; $\bar{\varphi}_j$ – слід $\dfrac{\partial^j \varphi}{\partial \nu^j}$ на Γ, $j = 0,\dots,m-1$, φ – довільний елемент з Φ.

Опишемо точніше розглядувану проблему стосовно коректності сформульованої задачі. З результатів роботи [8] випливає, що у випадку $M = \{0,m\}$, $\Omega = \mathbb{R}^n$ задача $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^0,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^0)$, де $\mathbb{P}^0 = \Big\{ p \in \mathbb{P} : p(x) = p_0$ для майже всіх $x \in \Omega$, де $p_0 \in (2,+\infty)$, якщо $1 \le n \le 2m$, і $p_0 \in \left(2, \dfrac{2n}{n-2m}\right]$, якщо $n > 2m \Big\}$, $\mathbb{A}_p^0 = \big\{ (a_\alpha) : a_{\bar{0}}(x,\xi) = |\xi_{\bar{0}}|^{p_0-2}\, \xi_{\bar{0}},\ a_\alpha(x,\xi) = 0$, $0 < |\alpha| < m$, $a_\alpha(x,\xi) = \xi_\alpha$, $|\alpha| = m \big\}$, $\mathbb{V}_p = \{\mathbb{U}_p\}$, є однозначно розв'язною. Нас буде цікавити питання, як узагальнити цей результат, тобто вказати множину $\mathbb{P}^*$, $\mathbb{P}^0 \subset \mathbb{P}^* \subset \mathbb{P}$, і простори $\{\mathbb{A}_p,\ \mathbb{V}_p : p \in \mathbb{P}^*\}$ такі, щоб задача $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ була однозначно розв'язною або коректною.

Пропонуємо такий вибір вказаних множин. Нехай $\mathbb{P}^*$ – множина, яка складається з елементів $p \in \mathbb{P}$ таких, що

$$2 < p_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x), \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) =: p_1 < \infty.$$

Для кожного $p \in \mathbb{P}^*$ введемо множину $\mathbb{A}_p^*$ наборів функцій $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють додатково ще дві умови:

(A4) існують сталі $B_1 \ge 0$ і $B_2 > 0$ такі, що для кожного α, $|\alpha| \in M_0$, майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^{N_M}$ виконується нерівність

$$\left|a_\alpha(x,\xi)-a_\alpha(x,\eta)\right| \le \Big(B_1\left|\xi_{\bar 0}-\eta_{\bar 0}\right|^2 + B_2\sum_{|\alpha|\in M_0}\left|\xi_\alpha-\eta_\alpha\right|^2\Big)^{1/2}$$

(B_1 і B_2 можуть залежати від (a_α));

(A5) існують (залежні від (a_α)) сталі $K_1 \ge 0$, $K_2 > 0$, $K_3 > 0$ такі, що для майже всіх $x\in\Omega$ та будь-яких ξ і η з $\mathbb{R}^{N_M}$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(x,\xi)-a_\alpha(x,\eta))(\xi_\alpha-\eta_\alpha) \ge$$

$$\ge K_1\left|\xi_{\bar 0}-\eta_{\bar 0}\right|^2 + K_2\sum_{|\alpha|\in M_0}\left|\xi_\alpha-\eta_\alpha\right|^2 + K_3\left|\xi_{\bar 0}-\eta_{\bar 0}\right|^{p(x)},$$

причому, якщо виконується одна з двох умов: $B_1 > 0$ або $p_1 \ge \dfrac{2n}{n-2\mu}$, де $\mu = \min M_0$, то $K_1 > 0$ (зазначимо, що $\min M_0 := \min\{i\in M_0\}$).

Скажемо, що послідовність $\{(a_{\alpha,k})\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{A}_p^*$ збіжна до (a_α) в $\mathbb{A}_p^*$, якщо елементи $(a_{\alpha,k})$, $k\in\mathbb{N}$, і елемент (a_α) задовольняють умови **(A4)** і **(A5)** з одними й тими самими сталими B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 і для кожного $R>0$

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_R}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N_M}}\left(\frac{\left|a_{\bar 0,k}(x,\xi)-a_{\bar 0}(x,\xi)\right|}{\left|\xi_{\bar 0}\right|^{p(x)-1}+|\xi|^{2/p^*(x)}+1}+\sum_{|\alpha|\in M_0}\frac{\left|a_{\alpha,k}(x,\xi)-a_\alpha(x,\xi)\right|}{|\xi|+1}\right)=0.$$

Позначимо через $\mathbb{A}_p^{**}$ підмножину множини $\mathbb{A}_p^*$, яка складається з елементів $(a_\alpha)\in\mathbb{A}_p^*$, які задовольняють ще одну умову

(A6) для довільних $\xi,\eta\in\mathbb{R}^{N_M}$ і майже всіх $x\in\Omega$

$$\left|a_{\bar 0}(x,\xi)-a_{\bar 0}(x,\eta)\right| \le \tilde h_{\bar 0}(x)\big[\,(|\xi_{\bar 0}|+|\eta_{\bar 0}|)^{p(x)-2}\left|\xi_{\bar 0}-\eta_{\bar 0}\right| +$$

$$+ (|\xi|+|\eta|)^{(p(x)-2)/p(x)}|\xi-\eta|\,\big], \qquad \tilde h_{\bar 0}\in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\bar\Omega).$$

Зауважимо, що умову **(A6)** задовольняє функція $a_{\bar 0}(x,\xi)=\left|\xi_{\bar 0}\right|^{p_0(x)-2}\xi_{\bar 0}$, $x\in\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}^{N_M}$.

Теорема. *Правильними є такі твердження*:

(***i***) *задача* $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^*,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p : p\in\mathbb{P}^*)$ *є однозначно розв'язною і для будь-яких* $p\in\mathbb{P}^*$, $(a_\alpha)\in\mathbb{A}_p^*$, $(f_\alpha)\in\mathbb{F}_p$, $\Phi\in\mathbb{V}_p$ *функція* $u\in\mathbf{SBP}((a_\alpha),(f_\alpha),\Phi)$ *для довільних* $0<R_0<R$, $R\ge 1$, *задовольняє оцінку*

$$\int_{\Omega_{R_0}}\Big[K_1|u(x)|^2+\sum_{|\alpha|\in M_0}\left|D^\alpha u(x)\right|^2+|u(x)|^{p(x)}\Big]dx \le$$

$$\le\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s\Big[C_1R^{\,n-\frac{2\mu q}{q-2}}+C_2\int_{\Omega_R}\Big\{\left|f_{\bar 0}(x)-a_{\bar 0}(x,\delta_M\varphi(x))\right|^{p^*(x)}+$$

$$+\sum_{|\alpha|\in M_0}\left|f_\alpha(x)-a_\alpha(x,\delta_M\varphi(x))\right|^2\Big\}dx\Big]+$$

$$+C_3\int_{\Omega_{R_0}}\Big\{K_1|\varphi(x)|^2+\sum_{|\alpha|\in M_0}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|^2+|\varphi(x)|^{p(x)}\Big\}dx, \qquad (3)$$

де φ *– який-небудь елемент множини* Φ; $\mu=\min M_0$; $q=p_1$, *якщо* $K_1 = 0$, *і* $q\in(2,p_0]\cup\{p_1\}$ *при* $K_1>0$; $s>\max\left\{\dfrac{2mp_0}{p_0-2},\dfrac{2mq}{q-2}\right\}$ *– довільне число*;

C_1, C_2, C_3 − *деякі додатні сталі, які залежать тільки від* B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 (*з умов* **(A4)** *і* **(A5)**), p_0, p_1, n, m, q, s;

(***ii***) *задача* $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^*,\ \mathbb{F}_p,\ \overset{\circ}{\Phi},\ \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ *коректна і для її розв'язку виконується оцінка* (3) *з* $\varphi = 0$;

(***iii***) *задача* $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^{**},\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^{**})$ *коректна і для її розв'язку виконується оцінка* (3).

3. Допоміжні твердження. Легко встановити правильність такого твердження (див. [4, с. 312]).

Твердження 1. *Нехай* $R > 0$ − *довільне число,* $r \in L_\infty(\Omega_R)$, $1 < r_0 \le \le r(x) \le r_1 < +\infty$ *для майже всіх* $x \in \Omega_R$. *Тоді для будь-якої функції* $v \in \in L_{r(\cdot)}(\Omega_R)$ *справджуються нерівності*

$$\| v \|_{L_{r(\cdot)}(\Omega_R)} \le \mathrm{S}_{1/r}(\rho_{r,R}(v)), \qquad \rho_{r,R}(v) \le \mathrm{S}_r\big(\| v \|_{L_{r(\cdot)}(\Omega_R)}\big),$$

де $\mathrm{S}_r(s) = \max\{s^{r_0},\ s^{r_1}\}$, $s \ge 0$.

Важливою підставою при доведенні теореми є таке твердження.

Лема 1. *Нехай* $p \in \mathbb{P}^*$, $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$ *і для кожного* $\ell \in \{1,2\}$ *функції* $(f_{\alpha,\ell}) \in \in \mathbb{F}_p$, $u_\ell \in U_p$ *такі, що* $u_1 - u_2 \in H^m_{\Gamma_{R_*}}(\Omega_{R_*})$ *і*

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \left\{ \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x, \delta_M u_\ell) D^\alpha \psi(x) \right\} dx = \int\limits_{\Omega_{R_*}} \left\{ \sum_{|\alpha| \in M} f_{\alpha,\ell}(x) D^\alpha \psi(x) \right\} dx \tag{4}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \bar{\Omega}_{R_*}$, *де* $R_* \ge 1$ − *деяке число.*

Тоді для будь-яких чисел $R_0 > 0$, $R \ge 1$, $R_0 < R \le R_*$, *виконується нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big[K_1 |u_1(x) - u_2(x)|^2 + \sum_{|\alpha| \in M_0} \big|D^\alpha u_1(x) - D^\alpha u_2(x)\big|^2 +$$

$$+ |u_1(x) - u_2(x)|^{p(x)} \Big] dx \le \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s \Big[C_4 R^{n - \frac{2\mu q}{q-2}} +$$

$$+ C_5 \int\limits_{\Omega_R} \Big\{ \big| f_{\bar{0},1}(x) - f_{\bar{0},2}(x) \big|^{p^*(x)} + \sum_{|\alpha| \in M_0} \big| f_{\alpha,1}(x) - f_{\alpha,2}(x) \big|^2 \Big\} dx \Big], \tag{5}$$

де q, μ *і* s *такі ж, як в теоремі, а* C_4 *і* C_5 − *деякі сталі, які залежать тільки від* B_1, B_2, K_1, K_2, K_3 (*з умов* **(A4)** *і* **(A5)**), q, p_0, p_1, m, n, s.

Д о в е д е н н я. Покладемо $v := u_1 - u_2$. З інтегральних тотожностей, отриманих з (4) відповідно для u_1 і u_2, матимемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha| \in M} \{ (a_\alpha(x, \delta_M u_1) - a_\alpha(x, \delta_M u_2)) D^\alpha \psi \}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{|\alpha| \in M} (f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2}) D^\alpha \psi\, dx \tag{6}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\bar{\Omega}) \cap L_{p(\cdot)}(\bar{\Omega})$, $\operatorname{supp}\psi \subset \bar{\Omega}_{R_*}$.

Зауважимо, що для довільних $\tilde{v} \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $g_\alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$, де $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $0 < |\alpha| \le m$, на підставі леми 3.1 з роботи [8] виконується нерівність

$$\int\limits_{\Omega} g_\alpha\big(D^\alpha(\tilde{v}\zeta^s) - (D^\alpha\tilde{v})\zeta^s\big)\,dx \le \varepsilon\int\limits_{\Omega} |g_\alpha|^2\,\zeta^s\,dx +$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_{\Omega}\Bigg(\sum_{|\beta|=|\alpha|}\big|D^\beta\tilde{v}\big|^2\Bigg)\zeta^s\,dx + C_\alpha(\varepsilon)\int\limits_{\Omega}|\tilde{v}|^2\,\zeta^{s-2|\alpha|}\,dx\,, \tag{7}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число, $C_\alpha(\varepsilon) > 0$ – стала, яка від R не залежить.

Нехай $R \ge 1$ – довільне число. Покладемо в (6) (див. [8, с. 220]) $\psi = v\zeta^s$, де $\zeta(x) = \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2)$, якщо $|x| < R$, і $\zeta(x) = 0$, якщо $|x| \ge R$, $m < s$ – достатньо велике число (значення s уточнимо пізніше).

З отриманої рівності (6) на підставі (7) матимемо

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{|\alpha|\in M}\big(a_\alpha(x,\delta_M u_1) - a_\alpha(x,\delta_M u_2)\big)(D^\alpha v)\,\zeta^s\,dx \le \varepsilon\int\limits_{\Omega_R}\sum_{|\alpha|\in M_0}\big|a_\alpha(x,\delta_M u_1) -$$

$$- a_\alpha(x,\delta_M u_2)\big|^2\,\zeta^s\,dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega_R}\sum_{|\alpha|\in M_0}\big|f_{\alpha,1}(x) - f_{\alpha,2}(x)\big|^2\,\zeta^s\,dx +$$

$$+\,2\varepsilon\int\limits_{\Omega_R}\Bigg(\sum_{|\alpha|\in M_0}\sum_{|\beta|=|\alpha|}\big|D^\beta v\big|^2\Bigg)\zeta^s\,dx + C_6(\varepsilon)\int\limits_{\Omega_R}|v|^2\Bigg(\sum_{i\in M_0}\zeta^{s-2i}\Bigg)dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega_R}\sum_{|\alpha|\in M}(f_{\alpha,1} - f_{\alpha,2})(D^\alpha v)\,\zeta^s\,dx\,, \tag{8}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне число, $C_6(\varepsilon) > 0$ – стала, яка від R не залежить.

Оцінивши члени нерівності (8) з використанням умов **(A4)** і **(A5)**, нерівностей Коші та Юнга подібно до того, як це зроблено у [3], отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}}\Bigg[(2K_1 - \sigma)|v(x)|^2 + K_2\sum_{|\alpha|\in M_0}\big|D^\alpha v(x)\big|^2 + K_3\,|v(x)|^{p(x)}\Bigg]dx \le$$

$$\le\left(\frac{R}{R - R_0}\right)^s\Bigg[C_7 R^{\,n-\frac{2\mu p_1}{p_1-2}} + C_8\int\limits_{\Omega_R}\Big(\big|f_{\bar{0},1}(x) - f_{\bar{0},2}(x)\big|^{p^*(x)} +$$

$$+\sum_{|\alpha|\in M_0}\big|f_{\alpha,1}(x) - f_{\alpha,2}(x)\big|^2\Big)\,dx\Bigg], \tag{9}$$

де C_7, C_8 – додатні сталі, які залежать тільки від $p_0, p_1, m, n, K_1, K_2, K_3, B_1, B_2, s$; $\sigma = 0$, якщо $B_1 = 0$, і $\sigma = K_1$, якщо $B_1 > 0$ (а, отже, за нашим припущенням, $K_1 > 0$). З (9) легко отримаємо нерівність (5) з $q = p_1$. Звернемо увагу на те, що до цього часу не використано умови $K_1 > 0$. Нехай $K_1 > 0$. Візьмемо яке-небудь $q \in (2, p_0]$. Безпосередньо переконуємося, що для довільної точки $x \in \Omega$ такої, що $v(x)$ і $p(x)$ визначені і $p_0 \le p(x) \le p_1$, правильна нерівність

$$K_1\,|v(x)|^2 + K_3\,|v(x)|^{p(x)} \ge K_4\,|v(x)|^q\,, \tag{10}$$

де $K_4 = \min\{K_1, K_3\}$. Міркуючи аналогічно до того, як це робилося вище, одержимо нерівність (5) з $q \in (2, p_0]$. $\Diamond$

Наслідок. *Нехай* $p \in \mathbb{P}^*$ *і* $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_p$, $\varphi \in \mathbb{U}_p$, $w \in \mathbb{U}_p$ *такі, що* $w - \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\Gamma_{R_*}}(\Omega_{R_*})$ *та*

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}}\Bigg\{\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta_M w)D^\alpha\psi\Bigg\}dx = \int\limits_{\Omega_{R_*}}\sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha\psi\,dx \tag{11}$$

для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega)\cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \bar{\Omega}_{R_*}$, *де* $R_* \ge 1$ – *деяке число.*

Тоді для будь-яких чисел $R_0 > 0$, $R \ge 1$ *таких, що* $R_0 < R \le R_*$, *справджується нерівність, яка відрізняється від нерівності* (3) *тільки тим, що замість* u *стоїть* w.

Д о в е д е н н я. Твердження наслідку легко отримати з леми 1, взявши $u_1(x) = w(x)$, $u_2(x) = \varphi(x)$, $f_{\alpha,1}(x) = f_\alpha(x)$, $f_{\alpha,2}(x) = a_\alpha(x, \delta_M \varphi(x))$, $|\alpha| \in M$, $x \in \Omega$, і використавши нерівність $|a-b|^q \ge 2^{1-q}|a|^q - |b|^q$, $a, b \in R$ і $q \ge 1$. ◊

4. Доведення теореми.

Побудова наближень розв'язків задачі $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^*,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$.

Нехай $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_p$, $\varphi \in \Phi \in \mathbb{V}_p$ для деякого $p \in \mathbb{P}^*$ і k – довільне натуральне число. Виберемо функції φ_k і $(f_{\alpha,k})$ такими, щоб $\varphi_k \in \mathbb{U}_p$, $(f_{\alpha,k}) \in \mathbb{F}_p$ і $\varphi_k = \varphi$, $f_{\alpha,k} = f_\alpha$ на $\Omega_{k-3/4}$, $|\alpha| \in M$, та $\varphi_k = 0$, $f_{\alpha,k} = 0$ на $\Omega \setminus \Omega_{k-1/2}$, $|\alpha| \in M$.

Шукатимемо функцію $u_k \in H^m(\Omega_k) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega_k)$ таку, що $(u_k - \varphi_k)|_{\Omega_k} \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_k)$ і для будь-яких $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_k) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega_k)$ справджується рівність

$$\int_{\Omega_k} \left\{ \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x, \delta_M u_k) D^\alpha \psi \right\} dx = \int_{\Omega_k} \left\{ \sum_{|\alpha| \in M} f_{\alpha,k} D^\alpha \psi \right\} dx. \tag{12}$$

Покажемо, що така функція існує, причому єдина. Для цього спочатку зробимо в рівності (12) заміну $u_k = v_k + \varphi_k$. Внаслідок цього після очевидних перетворень отримаємо

$$\int_{\Omega_k} \left\{ \sum_{|\alpha| \in M} \tilde{a}_{\alpha,k}(x, \delta_M v_k) D^\alpha \psi \right\} dx = \int_{\Omega_k} \left\{ \sum_{|\alpha| \in M} \tilde{f}_{\alpha,k} D^\alpha \psi \right\} dx, \tag{13}$$

де ψ така ж, як в (12), $(\tilde{a}_{\alpha,k}) \in \mathbb{A}_p^*$ і $(\tilde{f}_{\alpha,k}) \in \mathbb{F}_p$.

Доведення існування функції $v_k \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_k) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega_k)$, яка задовольняє тотожність (13), проводиться методом Гальоркіна (див., наприклад, [7, с. 22]). Єдиність функції u_k легко довести з використанням умови **(A5)**.

Розв'язність задачі $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \mathbb{V}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$. Продовжимо u_k нулем на Ω, зберігаючи за цим продовженням позначення u_k. Покажемо, що послідовність $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ містить підпослідовність, яка збігається до $u \in \mathbf{SBP}((a_\alpha),(f_\alpha),\Phi)$. Нехай k і ℓ – довільні натуральні числа, причому $1 < k < \ell$; R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \le k-1$, $R \ge 1$; q – дійсне число, яке задовольняє відповідні умови з формулювання теореми і таке, що $\dfrac{n - 2\mu q}{(q-2)} < 0$. Тоді з леми 1, поклавши $R_* = k-1$, отримаємо

$$\int_{\Omega_{R_0}} \left[\sum_{|\alpha| \in M_0} \left| D^\alpha u_k(x) - D^\alpha u_\ell(x) \right|^2 + |u_k(x) - u_\ell(x)|^{p(x)} \right] dx \le$$

$$\le C_4 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s R^{n - 2\mu q/(q-2)}, \tag{14}$$

де $C_4 > 0$, $s > 0$ – сталі, які від k, ℓ, R_0 та R не залежать.

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне число. Зафіксуємо будь-яке значення $R_0 > 0$ і виберемо $R \ge \max\{1, R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (14) була меншою від ε. Тоді для будь-яких $k \ge R+1$ і $\ell > k$ ліва частина нерівності (14) менша від ε. Це означає, що послідовність $\{u_k|_{\Omega_{R_0}}\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $H^m(\Omega_{R_0}) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega_{R_0})$. Оскільки $R_0 > 0$ – довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in H^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap L_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ такої, що

$$u_k \underset{k\to\infty}{\to} u \qquad \text{в} \qquad \mathbb{U}_p. \tag{15}$$

З (15) та умови **(A4)** на (a_α) випливає, що

$$a_\alpha(\cdot, \delta_M u_k(\cdot)) \underset{k\to\infty}{\to} a_\alpha(\cdot, \delta_M u(\cdot)) \quad \text{в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}), \quad |\alpha| \in M_0. \tag{16}$$

Тепер покажемо, що існує підпослідовність $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$a_0^-(\cdot, \delta_M u_{k_j}(\cdot)) \underset{j\to\infty}{\to} a_0^-(\cdot, \delta_M u(\cdot)) \quad \text{слабо в} \quad L_{p^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}). \tag{17}$$

Нехай $R_0 > 0$ – довільне число. З наслідку леми 1 маємо, що

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha| \in M_0} |D^\alpha u_k(x)|^2 + |u_k(x)|^{p(x)} \Big] dx \le C_9(R_0), \tag{18}$$

де $C_9(R_0) > 0$ – стала, яка від k не залежить. На підставі умови **(A2)** і нерівності Гельдера, врахувавши (18), маємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} |a_0^-(x, \delta_M u_k(x))|^{p^*(x)} dx \le C_{10}(R_0), \tag{19}$$

де $C_{10}(R_0) > 0$ – стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

На підставі (15), (19) та умови **(A1)**, враховуючи рефлексивність простору $L_{p(\cdot)}(\Omega_{R_0})$, можна зробити висновок про існування підпослідовності $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ та функції $\chi_0^- \in L_{p^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ таких, що

$$u_{k_j}(\cdot) \underset{j\to\infty}{\to} u(\cdot), \qquad a_0^-(\cdot, \delta_M u_{k_j}(\cdot)) \underset{j\to\infty}{\to} a_0^-(\cdot, \delta_M u(\cdot))$$

$$\text{майже всюди на } \Omega, \tag{20}$$

$$a_0^-(\cdot, \delta_M u_{k_j}(\cdot)) \underset{j\to\infty}{\to} \chi_0^-(\cdot) \qquad \text{слабо в } L_{p^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}). \tag{21}$$

З (20), (21) та леми 1.3 з роботи [7, с. 25] отримаємо, що $\chi_0^-(\cdot) = a_0^-(\cdot, \delta_M u(\cdot))$, тобто виконується (17).

Нехай $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^m_c(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$. Для кожного $j \ge j_0$, де $j_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp}\psi \subset \bar{\Omega}_{k_{j_0}}$, покладемо в (12) $k = k_j$ і перейдемо в отриманій послідовності рівностей до границі при $j \to +\infty$, врахувавши (16), (17), а також те, що $f_{\alpha,k_j} \underset{j\to\infty}{\to} f$ в $\mathbb{F}_p$. Тоді отримаємо рівність (2) для заданої функції ψ. Оскільки ψ – довільна функція і $u_{k_j} - \varphi_{k_j} \underset{j\to\infty}{\to} u - \varphi$ в $\overset{\circ}{H}{}^m_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$, то доведено, що $u \in \mathbf{SBP}\big((a_\alpha), (f_\alpha), \Phi\big)$.

Однозначність задачі $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^*,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$. Нехай $(a_\alpha) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f_\alpha) \in \mathbb{F}_p$, $\Phi \in \mathbb{V}_p$ для деякого $p \in \mathbb{P}^*$. Покажемо, що множина $\mathbf{SBP}\big((a_\alpha),$

$(f_\alpha), \Phi)$ містить не більше одного елемента. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – (різні) елементи множини $\mathbf{SBP}((a_\alpha),(f_\alpha),\Phi)$. З леми 1 для різниці $u_1 - u_2$ отримуємо нерівність (5) без другого і третього членів в квадратних дужках у правій частині. Зафіксувавши значення R_0, перейдемо в цій нерівності до границі при $R \to +\infty$, попередньо вибравши значення $q > 0$ таким, щоб виконувалась нерівність $\dfrac{n-2\mu q}{q-2} < 0$. У результаті отримаємо, що $u_1 = u_2$ на Ω_{R_0}. Оскільки $R_0 > 0$ – довільне число, то звідси маємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Ω.

Коректність задач $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \overset{\circ}{\Phi}, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ ***і*** $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^{**}, \mathbb{F}_p, \mathbb{V}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$**.** Задачі $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \overset{\circ}{\Phi}, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ і $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^{**}, \mathbb{F}_p, \mathbb{V}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ є частковими випадками задачі $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \mathbb{V}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$, а тому їх однозначна розв'язність випливає з однозначної розв'язності цієї задачі.

Спочатку завершимо доведення коректності задачі $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^{**}, \mathbb{F}_p, \mathbb{V}_p, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$. Нехай $(a_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\to} (a_\alpha)$ в $\mathbb{A}_p^{**}$, $(f_{\alpha,k}) \underset{k\to\infty}{\to} (f_\alpha)$ в $\mathbb{F}_p$, $\Phi_k \underset{k\to\infty}{\to} \Phi$ в $\mathbb{V}_p$ і $u \in \mathbf{SBP}((a_\alpha),(f_\alpha),\Phi)$, $u_k \in \mathbf{SBP}((a_{\alpha,k}),(f_{\alpha,k}),\Phi_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Виберемо φ і $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ з $\mathbb{U}_p$ такі, що $\varphi \in \Phi$, $\varphi_k \in \Phi_k$, $k \in \mathbb{N}$, і $\varphi_k \to \varphi$ в $\mathbb{U}_p$. З означення функцій $u_k, k \in \mathbb{N}$, та u маємо

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x, \delta_M\varphi + \delta_M v) D^\alpha \psi \right\} dx = \int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha D^\alpha \psi \right\} dx, \tag{22}$$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x, \delta_M\varphi + \delta_M v_k) D^\alpha \psi \right\} dx = \int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|\in M} (f_{\alpha,k} + a_\alpha(x, \delta_M\varphi + \delta_M v_k) - \right.$$
$$\left. - a_{\alpha,k}(x, \delta_M\varphi_k + \delta_M v_k)) D^\alpha \psi \right\} dx, \tag{23}$$

де $v := u - \varphi$, $v_k := u_k - \varphi_k$, $k \in \mathbb{N}$, ψ – довільна функція з $\overset{\circ}{H}{}_c^m(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$. Нехай R_0 і R – довільні сталі такі, що $0 < R_0 < R$, $R \ge 1$. З (22) і (23) на підставі леми 1 маємо

$$\int_{\Omega_{R_0}} \left[\sum_{|\alpha|\in M_0} \left| D^\alpha v_k(x) - D^\alpha v(x) \right|^2 + |v_k(x) - v(x)|^{p(x)} \right] dx \le$$
$$\le \left(\frac{R}{R-R_0} \right)^s \left[C_4 R^{n - \frac{2\mu q}{q-2}} + C_5 \int_{\Omega_R} \left\{ \left| f_{\bar{0},k} - f_{\bar{0}} + a_{\bar{0}}(x, \delta_M\varphi + \delta_M v_k) - \right. \right. \right.$$
$$\left. - a_{\bar{0},k}(x, \delta_M\varphi_k + \delta_M v_k) \right|^{p^*(x)} + \sum_{|\alpha|\in M_0} \left| f_{\alpha,k} - f_\alpha + a_\alpha(x, \delta_M\varphi + \delta_M v_k) - \right.$$
$$\left. \left. \left. - a_{\alpha,k}(x, \delta_M\varphi_k + \delta_M v_k) \right|^2 \right\} \right] dx, \tag{24}$$

де C_4, C_5, s, q – сталі, які від R_0 та R не залежать, причому $\dfrac{n-2\mu q}{(q-2)} < 0$.

На підставі збіжності послідовності $\{(a_{\alpha,k})\}_{k=1}^\infty$ до (a_α) в $\mathbb{A}_p^{**}$ та умови **(A4)** отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|\in M_0} \left| f_{\alpha,k} - f_\alpha + a_\alpha(x, \delta_M \varphi + \delta_M v_k) - a_{\alpha,k}(x, \delta_M \varphi_k + \delta_M v_k) \right|^2 dx \le$$

$$\le 2 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{|\alpha|\in M_0} \left| f_{\alpha,k} - f_\alpha \right|^2 dx +$$

$$+ C_{11} \left[\left(\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega_R} \sup_{\xi\in R^{N_M}} \frac{|a_{\alpha,k}(x,\xi) - a_\alpha(x,\xi)|}{1+|\xi|} \right)^2 \int\limits_{\Omega_R} (1 + |\delta_M u_k|^2)\, dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega_R} |\delta_M \varphi_k - \delta_M \varphi|^2 \, d\, x \right], \tag{25}$$

де $C_{11} > 0$ − стала, яка від k не залежить.

З наслідку леми 1 випливає обмеженість послідовності $\{u_k|_{\Omega_R}\}_{k=1}^{\infty}$ в просторі $H^m(\Omega_R) \bigcap L_{p(\cdot)}(\Omega_R)$. Звідси на підставі припущень стосовно $\{(a_{\alpha,k})\}_{k=1}^{\infty}$, $\{(f_{\alpha,k})\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ випливає, що для будь-якого фіксованого $R > 0$ ліва частина нерівності (25) прямує до нуля при $k \to \infty$.

Тепер, використовуючи нерівність Гельдера, збіжність послідовності $\{(a_{\bar 0,k})\}_{k=1}^{\infty}$ до $(a_{\bar 0})$ в $\mathbb{A}_p^*$, умову **(A6)**, а також твердження 1, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \Big| f_{\bar 0,k}(x) - f_{\bar 0}(x) + a_{\bar 0}(x, \delta_M \varphi(x) + \delta_M v_k(x)) - a_{\bar 0,k}(x, \delta_M \varphi_k(x) +$$

$$+ \delta_M v_k(x)) \Big|^{p^*(x)} dx \le C_{13} \int\limits_{\Omega_R} \left| f_{\bar 0,k}(x) - f_{\bar 0}(x) \right|^{p^*(x)} dx +$$

$$+ C_{14} \left[\max_{\ell\in\{0,1\}} \left(\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega_R} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^{N_M}} \frac{\left| a_{\bar 0,k}(x,\xi) - a_{\bar 0}(x,\xi) \right|}{1 + |\xi|^{2/p^*(x)} + |\xi_{\bar 0}|^{p(x)-1}} \right)^{\frac{p_\ell}{p_\ell - 1}} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{\Omega_R} (1 + |\delta_M u_k(x)|^2 + |u_k(x)|^{p(x)})\, dx \right] +$$

$$+ C_{15}(R)\, \mathbf{S}_{\frac{p-2}{p-1}} \left(\mathbf{S}_p () \| \, |\varphi_k| + |\varphi| + |v_k| \, \|_{L_{p(\cdot)}(\Omega_R)}) \right) \times$$

$$\times \mathbf{S}_{\frac{1}{p-1}} \left(\mathbf{S}_p \left(\|\varphi_k - \varphi\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega_R)} \right) \right) + C_{16}(R) \mathbf{S}_{\frac{p-2}{2(p-1)}} \left(\| \, |\delta_M \varphi_k| + \right.$$

$$\left. + |\delta_M \varphi| + |\delta_M v_k| \, \|^2_{L_2(\Omega_R)} \right) \cdot \mathbf{S}_{\frac{p}{2(p-1)}} \left(\| \, \delta_M \varphi_k - \delta_M \varphi \, \|^2_{L_2(\Omega_R)} \right), \tag{26}$$

де $\mathbf{S}_q$ визначено в твердженні 1; C_{13}, C_{14} − деякі додатні сталі, $C_{15}(R)$, $C_{16}(R)$ − додатні сталі, які від $k \in \mathbb{N}$ не залежать. На підставі наших припущень ліва частина нерівності (26) прямує до нуля при $k \to \infty$.

Нехай $\varepsilon > 0$ − довільне, як завгодно мале, число. Зафіксуємо довільним чином вибране $R_0 > 0$ і виберемо $R \ge \max\{1, 2R_0\}$ настільки великим, щоб

$$C_4 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s R^{n-2\mu q/(q-2)} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{27}$$

і зафіксуємо це значення.

Оскільки $\dfrac{R}{R - R_0} \le 1 + \dfrac{R_0}{R - R_0} \le 2$, то зі сказаного вище, зокрема (27), випливає існування $k_0 \in \mathbb{N}$ такого, що

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \left[\sum_{|\alpha|\in M_0} \left| D^\alpha v_k(x) - D^\alpha v(x) \right|^2 + \left| v_k(x) - v(x) \right|^{p(x)} \right] dx \le \varepsilon ,$$

для будь-яких $k \ge k_0$. Звідси випливає, що $u_k \underset{k\to\infty}{\to} u$ в $\mathbb{U}_p$. Отже, доведено коректність задачі $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^{**},\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{V}_p,\ \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$.

Тепер розглянемо задачу $\mathbf{BP}(\mathbb{A}_p^{*},\ \mathbb{F}_p,\ \overset{\circ}{\Phi},\ \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$. Використовуючи міркування, аналогічні до наведених вище, враховуючи при цьому, що $\varphi = 0$, $\varphi_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, (а, отже, зробивши відповідні зміни в ході доведення, зокрема, пропускаючи нерівності типу (26)), отримаємо те, що потрібно. ◊

1. *Бокало М. М.* Коректність першої крайової задачі для деяких квазілінійних еліптичних рівнянь в необмежених областях без умов на нескінченості // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 47. – С. 40–47.
2. *Бокало М. М., Паучок І. Б.* Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності // Мат. студії. – 2006. – **25**, № 1. – С. 25–48.
3. *Бокало М. М., Кушнір О. В.* Про коректність крайових задач для квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях // Мат. студії. – 2005. – **24**, № 1. – С. 69–82.
4. *Бугрій О. М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега // Наук. зап. Вінницьк. держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського. Сер. фіз.-мат. – 2002. – Вип. 1. – С. 310–321.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука. 1964. – 539 с.
7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.
8. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1989. – **106**, No. 3. – P. 217–241.
9. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez I. L.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ without growth restrictions on the data // J. Different. Equat. – 1993. – **105**. – P. 334–363.
10. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without conditions at infinity // Appl. Math. Optim. – 1984. – No. 12. – P. 271–282.
11. *Kovácik O., Rákosnic J.* On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – **41**, No. 4. – P. 592–618.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ БЕЗ УСЛОВИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Исследован класс нелинейных эллиптических уравнений высших порядков с переменными показателями нелинейности в неограниченных областях, для которых краевые задачи с граничными условиями типа Дирихле являются корректными (решение существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных) без каких-либо условий на поведение решения и без каких-либо ограничений на возрастание исходных данных на бесконечности. Рассматриваются обобщенные решения исследуемых задач из соответствующих обобщенных пространств Лебега.

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR NON-LINEAR ELLIPTIC HIGHER ORDER EQUATIONS WITHOUT CONDITIONS AT INFINITY

We examine the class of non-linear elliptic higher order equations with changeable indices of non-linearity in unbounded domains, such that the boundary-value problems with Dirichlet boundary conditions for them are well-posed (a solution exists, it is unique and continuously dependent on the initial data) with no conditions for the behaviour of solution and restrictions on increasing of the initial data at infinity. We consider the weak solutions of the investigated problems from the corresponding general Lebesgue spaces.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
01.12.06