УДК 517.95

Г. А. Снітко

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом при першій похідній в області з вільною межею.

Задачу визначення залежного від часу коефіцієнта при похідній невідомої функції у параболічному рівнянні розглянуто у праці [5]. У роботі [3] досліджено обернену задачу одночасного визначення коефіцієнта температуропровідності та коефіцієнта при першій похідній. Обернену задачу визначення старшого коефіцієнта в рівнянні теплопровідності в області з вільною межею розглянуто в [1]. Метою цієї праці є дослідити обернену задачу визначення молодшого коефіцієнта в області з вільною межею.

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t),\ 0 < t < T\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T , \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $b = b(t)$ за початкової умови

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le h(0) , \tag{2}$$

крайових умов

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T , \tag{3}$$

та умов перевизначення

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)\,dx = \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T , \tag{4}$$

$$\int_0^{h(t)} xu(x,t)\,dx = \mu_4(t), \qquad 0 \le t \le T . \tag{5}$$

Заміною змінних $y = \dfrac{x}{h(t)}$, $t = t$ зведемо задачу (1)–(5) до оберненої стосовно невідомих $h(t)$, $b(t)$, $v(y,t)$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1,\ 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(t) + yh'(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t),$$

$$(y,t) \in Q_T , \tag{6}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \qquad 0 \le y \le 1 , \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T , \tag{8}$$

$$h(t)\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T , \tag{9}$$

$$h^2(t)\int_0^1 yv(y,t)\,dy = \mu_4(t), \qquad 0 \le t \le T . \tag{10}$$

Під розв'язком задачі (6)–(10) будемо розуміти трійку функцій $(h(t)$, $b(t)$, $v(y,t))$ з класу $C^1[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$, що задовольняє рівняння (6) та умови (7)–(10).

Теорема 1. *При виконанні умов*

(A1) $\mu_i \in C^1[0,T],\quad i=1,\dots,4,\qquad \varphi\in C[0,\infty),\qquad \varphi\in C^2[0,h_0]$,

$a,\ c,\ f\in C([0,\infty)\times[0,T]),\qquad a,\ c,\ f\in C^{1,0}([0,H_1]\times[0,T])$;

(A2) $\mu_i(t)>0,\quad i=1,\dots,4,\quad t\in[0,T],\qquad \varphi(x)\ge\varphi_0>0,\qquad x\in[0,\infty)$,

$\varphi'(x)>0,\quad x\in[0,h_0],\qquad a(x,t)>0,\qquad (x,t)\in[0,H_1]\times[0,T]$,

$f(x,t)\ge 0,\qquad c(x,t)\le 0,\qquad (x,t)\in[0,\infty)\times[0,T]$,

де

$$H_1=\max_{[0,T]}\mu_3(t)\left(C_1\min\left\{\min_{[0,h_0]}\varphi(x),\ \min_{[0,T]}\mu_1(t),\ \min_{[0,T]}\mu_2(t)\right\}\right)^{-1},$$

$h_0=h(0)>0$ *є розв'язком рівняння* $\int\limits_0^{h(0)}\varphi(x)\,dx=\mu_3(0)$;

(A3) $\varphi(0)=\mu_1(0),\qquad \varphi(h_0)=\mu_2(0),\qquad \mu_4(0)=\int\limits_0^{h_0}x\varphi(x)\,dx$,

$$\mu_1'(0)=\frac{a(0,0)}{h_0^2}\varphi''(0)+\frac{b(0)}{h_0}\varphi'(0)+c(0,0)\varphi(0)+f(0,0),$$

$$\mu_2'(0)=\frac{a(h_0,0)}{h_0^2}\varphi''(h_0)+\frac{b(0)+h'(0)}{h_0}\varphi'(h_0)+c(h_0,0)\varphi(h_0)+f(h_0,0),$$

де

$$b(0)=\frac{1}{\mu_1(0)h_0-\mu_3(0)}\Bigg[\mu_4'(0)-\mu_3'(0)h_0-a(0,0)\varphi'(0)+$$

$$+\int\limits_0^1\Big(\big[h_0(y-1)a_x(yh_0,0)+a(yh_0,0)\big]\varphi'(yh_0)+$$

$$+h_0^2(1-y)\big[c(yh_0,0)\varphi(yh_0)+f(yh_0,0)\big]\Big)\,dy\Bigg],$$

$$h'(0)+\frac{\mu_2(0)-\mu_1(0)}{\mu_2(0)}b(0)=\frac{\mu_3'(0)}{\mu_2(0)}-\frac{1}{h_0\mu_2(0)}\big(a(h_0,0)\varphi'(h_0)-a(0,0)\varphi'(0)\big)+$$

$$+\frac{1}{\mu_2(0)}\int\limits_0^1\big(a_x(yh_0,0)\varphi'(yh_0)-h_0\big[c(yh_0,0)\varphi(yh_0)+f(yh_0,0)\big]\big)\,dy,$$

можна вказати таке число $T_0: 0<T_0\le T$, *яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі* (6)–(10) *існує при* $0\le y\le 1,\ 0\le t\le T_0$.

Д о в е д е н н я. Щодо наявних в теоремі 1 констант, то з умов (2), (4) і припущень теореми 1 випливає існування єдиного значення $h(0)=h_0$, яке задовольняє рівняння $\int\limits_0^{h(0)}\varphi(x)\,dx=\mu_3(0)$.

Визначення числа H_1 базується на таких міркуваннях. Згідно з принципом максимуму [2] для розв'язку задачі (6)–(8) матимемо

$$v(y,t)\ge C_1\min\left\{\min_{[0,h_0]}\varphi(x),\ \min_{[0,T]}\mu_1(t),\ \min_{[0,T]}\mu_2(t)\right\}\equiv M_1>0,\qquad (y,t)\in\bar{Q}_T.$$

З умови (9) отримаємо

$$h(t)=\frac{\mu_3(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)\,dy}. \tag{11}$$

Звідси з урахуванням встановленої оцінки для $v(y,t)$ одержимо

$$h(t) \le \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_3(t)}{M_1} \equiv H_1 < \infty, t \in [0,T].$$

Зведемо задачу (6)−(10) до системи рівнянь. Пряма задача (6)−(8) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $h(t)$, $h'(t)$, $b(t)$ еквівалентна рівнянню

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \frac{b(\tau) + \eta h'(\tau)}{h(\tau)} v_\eta(\eta,\tau)\, d\eta\, d\tau, \tag{12}$$

де $G_1(y,t,\eta,\tau)$ − функція Ґріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy} + c(yh(t),t)v.$$

Введемо позначення $p(t) = h'(t)$, $w(y,t) = v_y(y,t)$. Тоді (12) перепишемо таким чином:

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \frac{b(\tau) + \eta p(\tau)}{h(\tau)} w(\eta,\tau)\, d\eta\, d\tau, \tag{13}$$

де $v_0(y,t)$ визначається формулою

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\varphi(\eta h_0)\, d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau) \frac{a(0,\tau)}{h^2(\tau)} \mu_1(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau) \frac{a(h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)} \mu_2(\tau)\, d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) f(\eta h(\tau),\tau)\, d\eta\, d\tau.$$

Продиференціювавши (9), (10) за t і використавши рівняння (6), одержимо

$$p(t) + \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{\mu_2(t)} b(t) = \frac{\mu_3'(t)}{\mu_2(t)} - \frac{1}{h(t)\mu_2(t)} \big[a(h(t),t)w(1,t) -$$

$$- a(0,t)w(0,t)\big] + \frac{1}{\mu_2(t)} \int_0^1 \big[a_x(yh(t),t)w(y,t) -$$

$$- h(t)\big(c(yh(t),t)v(y,t) + f(yh(t),t)\big)\big]\, dy, \tag{14}$$

$$b(t) = \frac{1}{\mu_1(t)h(t) - \mu_3(t)} \Big[\mu_4'(t) - \mu_3'(t)h(t) - a(0,t)w(0,t) +$$

$$+ \int_0^1 \Big(\big[h(t)(y-1)a_x(yh(t),t) + a(yh(t),t)\big] w(y,t) +$$

$$+ h^2(t)(1-y)\big[c(yh(t),t)v(y,t) + f(yh(t),t)\big]\Big)\, dy\Big]. \tag{15}$$

Зауважимо, що в (15) $\mu_1(t)h(t) - \mu_3(t) \ne 0$, коли $w(y,t) > 0$, оскільки

$$\mu_1(t) - \frac{\mu_3(t)}{h(t)} = \int_0^1 (y-1)w(y,t)\, dy.$$

Випишемо задачу для знаходження $w(y,t)$. Для цього продиференціюємо (6), (7) за y та використаємо умови (8):

$$w_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} w_{yy} + \frac{a_x(yh(t),t) + b(t) + yh'(t)}{h(t)} w_y + \bigg(\frac{h'(t)}{h(t)} +$$

$$+ c(yh(t),t)\bigg) w + h(t)c_x(yh(t),t)v + h(t)f_x(yh(t),t), \quad (y,t) \in Q_T,$$

$$w(y,0)=h_0\varphi'(yh_0),\qquad y\in[0,1],$$

$$w_y(0,t)=\frac{h^2(t)}{a(0,t)}\left[\mu_1'(t)-c(0,t)\mu_1(t)-f(0,t)-\frac{b(t)}{h(t)}w(0,t)\right],\qquad t\in[0,T],$$

$$w_y(1,t)=\frac{h^2(t)}{a(h(t),t)}\left[\mu_2'(t)-c(h(t),t)\mu_2(t)-f(h(t),t)-\frac{b(t)+h'(t)}{h(t)}w(1,t)\right],$$

$$t\in[0,T]. \tag{16}$$

Задача (16) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $h(t)$, $h'(t)$, $b(t)$ еквівалентна рівнянню

$$w(y,t)=h_0\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)\,d\eta-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\Big[\mu_1'(\tau)-c(0,\tau)\mu_1(\tau)-$$
$$-f(0,\tau)-\frac{b(\tau)}{h(\tau)}w(0,\tau)\Big]d\tau+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\Big[\mu_2'(\tau)-c(h(\tau),\tau)\mu_2(\tau)-$$
$$-f(h(\tau),\tau)-\frac{b(\tau)+h'(\tau)}{h(\tau)}w(1,\tau)\Big]d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)\Big[\frac{b(\tau)+\eta h'(\tau)}{h(\tau)}w_\eta(\eta,\tau)+\Big(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}+c(\eta h(\tau),\tau)\Big)w(\eta,\tau)+$$
$$+h(\tau)c_x(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+h(\tau)f_x(\eta h(\tau),\tau)\Big]d\eta\,d\tau, \tag{17}$$

де $G_2(y,t,\eta,\tau)$ − функція Ґріна другої крайової задачі для рівняння

$$w_t=\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}w_{yy}+\frac{a_x(yh(t),t)}{h(t)}w_y. \tag{18}$$

Провівши інтегрування частинами в останньому інтегралі (17), подамо (17) у вигляді

$$w(y,t)=h_0\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)\,d\eta-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)[\mu_1'(\tau)-c(0,\tau)\mu_1(\tau)-$$
$$-f(0,\tau)]d\tau+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)[\mu_2'(\tau)-c(h(\tau),\tau)\mu_2(\tau)-f(h(\tau),\tau)]d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 G_2(y,t,\eta,\tau)[c(\eta h(\tau),\tau)w(\eta,\tau)+h(\tau)(c_x(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+$$
$$+f_x(\eta h(\tau),\tau))]d\eta\,d\tau-\int_0^t\int_0^1 G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau)\frac{b(\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau. \tag{19}$$

Розглянемо рівняння (18) з початковою та крайовими умовами:

$$w(y,0)=1,\qquad w_y(0,t)=w_y(1,t)=0.$$

За допомогою функції Ґріна другої крайової задачі для рівняння (18) розв'язок задачі можемо подати у вигляді

$$w(y,t)=\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,d\eta.$$

З іншого боку, розв'язком такої задачі є $w(y,t)=1$. Отже,

$$\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,d\eta=1.$$

Тоді

$$\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\varphi'(\eta h_0)\,d\eta\ge\min_{[0,1]}\varphi'(yh_0)\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,d\eta\ge M_0>0.$$

Оскільки в (19) решта доданків при $t = 0$ дорівнюють нулеві, то існує деяке число t_0, $0 < t_0 \le T$, таке, що

$$w(y,t) \ge \frac{M_0}{2} > 0, \qquad 0 \le y \le 1, \qquad 0 \le t \le t_0.$$

Отже, $\mu_1(t)h(t) - \mu_3(t) \ne 0$, коли $0 \le t \le t_0$.

Таким чином, задачу (6)−(10) зведено до системи інтегральних рівнянь (11), (13)−(15), (19) з невідомими $h(t)$, $p(t)$, $b(t)$, $v(y,t)$, $w(y,t)$.

Для доведення існування розв'язку задачі (6)−(10) досить довести, що існує неперервний розв'язок системи рівнянь (11), (13)−(15), (19), оскільки, якщо $(h(t), b(t), v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)−(10) у сенсі наведеного вище означення, то функції $(h(t), p(t), b(t), v(y,t), w(y,t))$ є неперервним розв'язком системи (11), (13)−(15), (19). Правильним є й обернене твердження: якщо $(h, p, b, v, w) \in (C[0,T])^3 \times (C(\bar{Q}_T))^2$ є розв'язком системи рівнянь (11), (13)−(15), (19), то функції $(h(t), b(t), v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)−(10). Дійсно, нехай $(h, p, b, v, w) \in (C[0,T])^3 \times (C(\bar{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (11), (13)−(15), (19). Припущення теореми дозволяють нам продиференціювати рівність (13) за y. Врахувавши єдиність розв'язку інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, отримуємо $w(y,t) = v_y(y,t)$. Тоді робимо висновок, що $v(y,t)$ має потрібну гладкість і задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(t) + yp(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t) \tag{20}$$

та умови (7), (8) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $b(t)$, $h(t)$, $p(t)$. Оскільки $v(y,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ і $\mu_3(t) \in C^1[0,T]$, то $h(t) \in C^1[0,T]$. Продиференціюємо рівність (11) за t, використавши те, що функція $v(y,t)$ є розв'язком рівняння (20):

$$p(t) = \frac{\mu'_3(t)}{\mu_2(t)} - \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{\mu_2(t)} b(t) - \frac{1}{h(t)\mu_2(t)}\big[a(h(t),t)v_y(1,t) -$$

$$- a(0,t)v_y(0,t)\big] + \frac{1}{\mu_2(t)}\int_0^1 \big[a_x(yh(t),t)v_y(y,t) - h(t)\big(c(yh(t),t)v(y,t) +$$

$$+ f(yh(t),t)\big)\big]dy + \frac{\mu_3(t)}{\mu_2(t)h(t)}\big(p(t) - h'(t)\big).$$

Віднімаючи від цієї рівності (14), отримаємо

$$\big(p(t) - h'(t)\big)\frac{\mu_3(t)}{\mu_2(t)h(t)} = 0,$$

звідки матимемо, що

$$p(t) = h'(t).$$

Залишилось довести виконання умови (10). Для цього, використовуючи (15), подамо (14) у вигляді

$$2h(t)p(t)\int_0^1 yv(y,t)\,dy + h^2(t)\int_0^1 y\Big(\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy}(y,t) +$$

$$+ \frac{b(t) + yp(t)}{h(t)} v_y(y,t) + c(yh(t),t)v(y,t) + f(yh(t),t)\Big)dy = \mu'_4(t).$$

Використовуючи рівняння (20), матимемо

$$2h(t)p(t)\int_0^1 yv(y,t)\,dy + h^2(t)\int_0^1 yv_t(y,t) = \mu'_4(t).$$

Враховуючи, що $p(t) = h'(t)$, та інтегруючи за t, отримаємо умову (10).

Отже, еквівалентність задачі (6)–(10) і системи рівнянь (11), (13)–(15), (19) у вищезазначеному сенсі доведено.

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (11), (13)–(15), (19) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. За принципом максимуму для розв'язку задачі (6)–(8) отримаємо

$$v(y,t) \le C_2 \max\Big\{\max_{[0,h_0]}\varphi(x),\ \max_{[0,T]}\mu_1(t),\ \max_{[0,T]}\mu_2(t),$$
$$\max_{[0,H_1]\times[0,T]} f(x,t)\Big\} \equiv M_2 < \infty,$$

і згідно з (11) маємо

$$h(t) \ge \frac{1}{M_2}\min_{[0,T]}\mu_3(t) \equiv H_0 > 0, \qquad t \in [0,T].$$

Отже,

$$0 < M_1 \le v(y,t) \le M_2 < \infty, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_T,$$
$$0 < H_0 \le h(t) \le H_1 < \infty, \qquad t \in [0,T].$$

Позначимо $W(t) = \max_{y\in[0,1]}|w(y,t)|$. Тоді з (14), (15) матимемо

$$|b(t)| \le C_3 + C_4 W(t), \tag{21}$$

$$|p(t)| \le C_5 + C_6|b(t)| + C_7 W(t). \tag{22}$$

Згідно з (21), (22) та оцінками функції Ґріна [2] з (19) отримаємо нерівність

$$W(t) \le C_8 + C_9\int_0^t \frac{W(\tau) + W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau.$$

Позначивши $W_1(t) = W(t) + 1$, попередню нерівність перепишемо в такому вигляді:

$$W_1(t) \le C_{10} + C_{11}\int_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau.$$

Метод розв'язування останньої нерівності наведено в [6]. Таким чином, отримаємо оцінку

$$W(t) \le M_3 < \infty, \qquad t \in [0,t_1],$$

де t_1, $0 < t_1 < T$, визначається сталими C_{10}, C_{11}. Використовуючи це в (21), (22), одержимо

$$|b(t)| \le C_{12} < \infty, \qquad |p(t)| \le C_{13} < \infty, \qquad t \in [0,t_1].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи (11), (13)–(15), (19) встановлено.

Подамо систему (11), (13)–(15), (19) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (h(t), b(t), p(t), v(y,t), w(y,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (11), (13)–(15), (19). Позначимо $\mathcal{N} = \{(h, b, p, v, w) \in$ $\in (C[0,T_0])^3 \times (C(\bar{Q}_{T_0}))^2 : 0 < H_0 \le h(t) \le H_1 < \infty,\ |b(t)| \le C_{12} < \infty,\ |p(t)| \le C_{13} < \infty,$ $0 < M_1 \le v(y,t) \le M_2 < \infty,\ |w(y,t)| \le M_3 < \infty\}$, де $T_0 = \min\{t_0, t_1\}$. Очевидно, що множина $\mathcal{N}$ задовольняє умови теореми Шаудера.

Доведення компактності операторів, що утворюють P, покажемо на прикладі оператора P_5, де P_5 визначається правою частиною (19). Зауважимо, що в [6] встановлено компактність операторів з функцією Ґріна другої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Задамо $\varepsilon > 0$ і розглянемо різницю

$$\Delta_1 = \left| \int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta \right|$$

з довільними точками $(y_i, t_i) \in \overline{Q}_{T_0}$, $(y_1, t_1) \neq (y_2, t_2)$. Очевидно, що

$$\Delta_1 \le \left| \int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta \right| +$$
$$+ \left| \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta \right| =$$
$$= \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}.$$

З властивостей теплових потенціалів [4] випливає, що для заданого $\varepsilon > 0$ існує таке $\overline{t}$, $0 < \overline{t} \le T$, що

$$\left| \int_0^1 G_2(y, t, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta - \varphi'(y h_0) \right| < \frac{\varepsilon}{5}, \qquad 0 \le t \le \overline{t}, \qquad 0 \le y \le 1. \qquad (23)$$

Тому при $t_2 \le \overline{t}$ маємо

$$\Delta_{1,1} \le \left| \int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta - \varphi'(y_2 h_0) \right| +$$
$$+ \left| \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta - \varphi'(y_1 h_0) \right| + \left| \varphi'(y_2 h_0) - \varphi'(y_1 h_0) \right|.$$

З рівномірної неперервності функції φ на $[0, h_0]$ випливає існування такого $\delta_1 > 0$, що

$$\left| \varphi(y_2 h_0) - \varphi(y_1 h_0) \right| < \frac{\varepsilon}{5},$$

коли $|y_2 - y_1| < \delta_1$. Звідси і з (23) маємо, що $\Delta_{1,1} < \frac{3\varepsilon}{5}$, якщо $t_2 \le \overline{t}$. Якщо ж і $t_1 \le \overline{t}$, то $\Delta_{1,2} < \frac{2\varepsilon}{5}$, і отримуємо $\Delta_1 < \varepsilon$ при умові, що $|y_2 - y_1| < \delta$ і t_1 та t_2 досить малі: $t_1 \le \overline{t}$, $t_2 \le \overline{t}$.

Нехай тепер $t_2 > \overline{t}$, $t_1 > \overline{t}$ і для визначеності нехай $t_2 > t_1$. Тоді згідно з оцінками функції Ґріна [2]

$$\Delta_{1,1} = \left| \int_0^1 \varphi'(\eta h_0)\, d\eta \int_{y_1}^{y_2} G_{2y}(y, t_2, \eta, 0)\, dy \right| \le \frac{C_{14} |y_2 - y_1|}{\sqrt{\overline{t}}} \max_{[0,1]} |\varphi'(y h_0)|.$$

Це означає, що існує таке число $\delta_2 > 0$, що $\Delta_{1,1} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|y_2 - y_1| < \delta_2$. Аналогічно встановлюємо існування $\delta_3 > 0$ такого, що $\Delta_{1,2} < \frac{\varepsilon}{2}$, коли $|t_2 - t_1| < \delta_3$.

Отже, необхідні нерівності встановлено у випадку $t_i \le \overline{t}$, $i = 1, 2$, і випадку $t_i \ge \overline{t}$, $i = 1, 2$. Якщо ж, наприклад, $t_1 \le \overline{t}$, а $t_2 > \overline{t}$, то подамо $\Delta_{1,2}$ у вигляді

$$\Delta_{1,2} = \left| \int_0^1 G_2(y_1, t_2, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, \bar{t}, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta \right| +$$
$$+ \left| \int_0^1 G_2(y_1, \bar{t}, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta - \int_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, 0)\varphi'(\eta h_0)\, d\eta \right|.$$
Другий доданок оцінимо на підставі (23), а перший − як у випадку $t_1 > \bar{t}$, $t_2 > \bar{t}$. Отже, доведено, що $\Delta_1 < \varepsilon$.

Розглянемо різницю
$$\Delta_2 = \left| \int_0^{t_2} G_2(y_2, t_2, 0, \tau)\tilde{\mu}_1(\tau)\, d\tau - \int_0^{t_1} G_2(y_1, t_1, 0, \tau)\tilde{\mu}_1(\tau)\, d\tau \right|,$$
де $\tilde{\mu}_1(t) = \mu_1'(t) - c(0,t)\mu_1(t) - f(0,t)$. Очевидно, що
$$\Delta_2 \le \left| \int_0^{t_2} G_2(y_2, t_2, 0, \tau)\tilde{\mu}_1(\tau)\, d\tau - \int_0^{t_2} G_2(y_1, t_2, 0, \tau)\tilde{\mu}_1(\tau)\, d\tau \right| +$$
$$+ \left| \int_0^{t_2} G_2(y_1, t_2, 0, \tau)\tilde{\mu}_1(\tau)\, d\tau - \int_0^{t_1} G_2(y_1, t_1, 0, \tau)\tilde{\mu}_1(\tau)\, d\tau \right| = \Delta_{2,1} + \Delta_{2,2}.$$
Оцінимо перший доданок, зробивши заміну змінних $t_2 - \tau = \sigma$:
$$\Delta_{2,1} \le C_{15} \int_0^{t_2} \left| G_2(y_2, t_2, 0, t_2 - \sigma) - G_2(y_1, t_2, 0, t_2 - \sigma) \right| d\sigma.$$
Згідно з оцінками функції Ґріна [2] для заданого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\bar{t} > 0$, що
$$\int_0^{\bar{t}} \left| G_2(y, t_2, 0, \tau) \right| d\tau < \frac{\varepsilon}{6C_{15}}, \qquad y \in [0,1]. \tag{24}$$
Якщо $t_2 \le \bar{t}$, то з (24) маємо $\Delta_{2,1} < \frac{\varepsilon}{3}$. Якщо ж $t_2 > \bar{t}$, то, розбиваючи інтеграл на суму двох інтегралів і застосовуючи (24), отримуємо
$$\Delta_{2,1} \le \frac{\varepsilon}{3} + C_{15} \int_{\bar{t}}^{t_2} \left| G_2(y_2, t_2, 0, t_2 - \sigma) - G_2(y_1, t_2, 0, t_2 - \sigma) \right| d\sigma \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3} + C_{15} \int_{\bar{t}}^{t_2} \int_{y_1}^{y_2} \left| G_{2y}(y, t_2, 0, t_2 - \sigma) \right| dy\, d\sigma.$$
Звідси, використовуючи оцінки функції Ґріна [2], маємо
$$\Delta_{2,1} \le \frac{\varepsilon}{3} + C_{16} |y_2 - y_1|.$$
Вибираючи $\delta_4 < \frac{\varepsilon}{6C_{16}}$, встановлюємо оцінку $\Delta_{2,1} < \frac{\varepsilon}{2}$, коли $|y_2 - y_1| < \delta_4$.

Вважаючи для визначеності, що $t_2 > t_1$, оцінимо другий доданок
$$\Delta_{2,2} \le \left| \int_{t_1}^{t_2} G_2(y_1, t_2, 0, \tau)\tilde{\mu}_1(\tau)\, d\tau \right| +$$
$$+ \left| \int_0^{t_1} \left(G_2(y_1, t_2, 0, \tau) - G_2(y_1, t_1, 0, \tau)\right)\tilde{\mu}_1(\tau)\, d\tau \right| = \Delta_{2,2,1} + \Delta_{2,2,2}.$$
Оцінимо $\Delta_{2,2,1}$, виконавши заміну змінних $t_2 - \tau = \sigma$:
$$\Delta_{2,2,1} \le C_{15} \int_0^{t_2 - t_1} \left| G_2(y_1, t_2, 0, t_2 - \sigma) \right| d\sigma.$$

Враховуючи (24), робимо висновок про існування такого $\delta_5 > 0$, що $\Delta_{2,2,1} < \frac{\varepsilon}{6}$ при $|t_2 - t_1| < \delta_5$.

Для оцінки $\Delta_{2,2,2}$ зробимо заміну змінних $t_1 - \tau = \sigma$:

$$\Delta_{2,2,2} \le C_{15} \int_0^{t_1} |G_2(y_1, t_2, 0, t_1 - \sigma) - G_2(y_1, t_1, 0, t_1 - \sigma)|\, d\sigma .$$

Беручи до уваги (24), приходимо до висновку про існування такого $\bar{t} > 0$, що $\Delta_{2,2,2} < \frac{\varepsilon}{6}$ при $t_1 \le \bar{t}$. У випадку $t_1 > \bar{t}$ маємо

$$\Delta_{2,2,2} \le \frac{\varepsilon}{3} + C_{15} \int_{\bar{t}}^{t_1} \left| \int_{t_1}^{t_2} G_{2t}(y_1, t, 0, t_1 - \sigma)\, dt \right| d\sigma .$$

Звідси випливає існування такого $\delta_6 > 0$, що при $|t_2 - t_1| < \delta_6$ матимемо $\Delta_{2,2,2} < \frac{\varepsilon}{6}$. Отже, $\Delta_2 < \varepsilon$.

Проведені вище міркування використовуємо і для оцінок

$$\Delta_3 = \left| \int_0^{t_2} G_2(y_2, t_2, 1, \tau)\tilde{\mu}_2(\tau)\, d\tau - \int_0^{t_1} G_2(y_1, t_1, 1, \tau)\tilde{\mu}_2(\tau)\, d\tau \right|,$$

$$\Delta_4 = \left| \int_0^{t_2}\int_0^1 G_2(y_2, t_2, \eta, \tau) f(\eta, \tau)\, d\eta\, d\tau - \int_0^{t_1}\int_0^1 G_2(y_1, t_1, \eta, \tau) f(\eta, \tau)\, d\eta\, d\tau \right|.$$

Отже, компактність оператора P встановлено. За теоремою Шаудера існує розв'язок $\big(h(t), b(t), p(t), v(y,t), w(y,t)\big)$ системи рівнянь (11), (13)−(15), (19) з класу $(C[0,T_0])^3 \times \big(C(\bar{Q}_{T_0})\big)^2$, а, отже, і розв'язок задачі (6)−(10) $\big(h(t)$, $b(t), v(y,t)\big)$ з класу $C^1[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(\bar{Q}_{T_0})$. Теорему 1 доведено. ◊

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються умови:*
$\varphi \in C[0,\infty)$, $\varphi(x) \ge \varphi_0 > 0$, $x \in [0,\infty)$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0, h_0]$, $\mu_2(t) \ne 0$, $t \in [0,T]$, $f, c \in C^{1,0}([0,H_1] \times [0,T])$, $a \in C^{2,0}([0,H_1] \times [0,T])$, $a(x,t) > 0$, $(x,t) \in [0,H_1] \times [0,T]$.

Тоді можна вказати таке число $t_0 : 0 < t_0 \le T$, *що розв'язок задачі* (6)−(10) *єдиний при* $0 \le y \le 1$, $0 \le t \le t_0$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\big(h_i(t), b_i(t), v_i(y,t)\big)$, $i = 1,2$, − два розв'язки задачі (6)−(10). Позначимо

$$\frac{b_i(t)}{h_i(t)} = q_i(t), \qquad \frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = s_i(t), \qquad i = 1,2,$$

$$q(t) = q_1(t) - q_2(t), \quad s(t) = s_1(t) - s_2(t), \quad v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Функції $q(t)$, $s(t)$, $v(y,t)$ задовольняють умови

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + \big(q_1(t) + ys_1(t)\big)v_y + c(yh_1(t),t)v + \\ &+ \left(\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} - \frac{a(yh_2(t),t)}{h_2^2(t)}\right) v_{2yy} + \big(q(t) + ys(t)\big)v_{2y} + \big[c(yh_1(t),t) - \\ &- c(yh_2(t),t)\big]v_2 + f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{25}$$

$$v(y,0) = 0, \qquad 0 \le y \le 1, \tag{26}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{27}$$

$$\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \qquad 0 \le t \le T, \tag{28}$$

$$\int_0^1 yv(y,t)\,dy = \mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right), \qquad 0 \le t \le T. \tag{29}$$

За допомогою функції Ґріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + (q_1(t) + ys_1(t))v_y + c(yh_1(t),t)v$$

функцію $v(y,t)$ подамо у вигляді

$$v(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\left[\left(\frac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)} - \frac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau) + \right.$$
$$+ (q(\tau) + \eta s(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau) + (c(\eta h_1(\tau),\tau) - c(\eta h_2(\tau),\tau))v_2(\eta,\tau) +$$
$$\left. + f(\eta h_1(\tau),\tau) - f(\eta h_2(\tau),\tau)\right] d\eta\, d\tau. \tag{30}$$

Оскільки $(h_i(t), b_i(t), v_i(y,t))$, $i = 1,2$, − розв'язки задачі (6)−(10), то для $h_i(t), b_i(t)$, $i = 1,2$, справджуються рівності, аналогічні до (14), (15):

$$\frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = \frac{\mu_1(t) - \mu_2(t)}{\mu_2(t)}\frac{b_i(t)}{h_i(t)} + \frac{\mu_3'(t)}{h_i(t)\mu_2(t)} - \frac{1}{h_i^2(t)\mu_2(t)}\big(a(h_i(t),t)v_{iy}(1,t) -$$
$$- a(0,t)v_{iy}(0,t)\big) + \frac{1}{h_i(t)\mu_2(t)}\int_0^1 \big[a_x(yh_i(t),t)v_{iy}(y,t) -$$
$$- h_i(t)\big(c(yh_i(t),t)\,v_i(y,t) + f(yh_i(t),t)\big)\big]dy, \tag{31}$$

$$\frac{b_i(t)}{h_i(t)} = \frac{1}{h_i(t)(h_i(t)\mu_1(t) - \mu_3(t))}\left[\mu_4'(t) - \mu_3'(t)h_i(t) - a(0,t)v_{iy}(0,t) + \right.$$
$$+ \int_0^1 \big[\big(a(yh_i(t),t) + h_i(t)(y-1)a_x(yh_i(t),t)\big)v_{iy}(y,t) +$$
$$\left. + h_i^2(t)(1-y)\big(c(yh_i(t),t)v_i(y,t) + f(yh_i(t),t)\big)\big]dy\right], \quad i = 1,2. \tag{32}$$

З умов теореми можемо зробити висновок про існування деякого числа t_0, $0 < t_0 \le T$, такого, що

$$v_{iy} \ge \frac{M_0}{2} > 0, \qquad y \in [0,1], \qquad t \in [0,t_0], \qquad i = 1,2.$$

Тоді

$$\mu_1(t)h_i(t) - \mu_3(t) \ne 0, \qquad t \in [0,t_0], \qquad i = 1,2.$$

З (31), (32) матимемо

$$s(t) = \frac{\mu_1(t) - \mu_2(t)}{\mu_2(t)}q(t) + \frac{\mu_3'(t)}{\mu_2(t)}\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right) -$$
$$- \frac{1}{\mu_2(t)}\left[\frac{1}{h_1^2(t)}\big[a(h_1(t),t)v_y(1,t) - a(0,t)v_y(0,t)\big] + \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{h_2^2(t)}\right)\big[a(h_1(t),t)v_{2y}(1,t) - a(0,t)v_{2y}(0,t)\big] + \frac{1}{h_2^2(t)}\big[a(h_1(t),t) -$$

$$
\begin{aligned}
&- a(h_2(t),t)\Big]\Big] + \frac{1}{\mu_2(t)}\int_0^1 \Big[\frac{1}{h_1(t)} a_x(yh_1(t),t)v_y(y,t) + \\
&+\Big(a_x(yh_2(t),t)\Big(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\Big) + \frac{1}{h_1(t)}\big(a_x(yh_1(t),t) - \\
&- a_x(yh_2(t),t)\big)\Big)v_{2y}(y,t) + c(yh_1(t),t)v(y,t) + \big[c(yh_1(t),t) - \\
&- c(yh_2(t),t)\big]v_2(y,t) + f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t)\Big]dy\,, \qquad (33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q(t) = \Big[&-\frac{\mu_1(t)\big(h_1(t)-h_2(t)\big)}{h_1(t)\big(\mu_1(t)h_1(t)-\mu_3(t)\big)\big(\mu_1(t)h_2(t)-\mu_3(t)\big)} + \Big(\frac{1}{h_1(t)} - \\
&- \frac{1}{h_2(t)}\Big)\frac{1}{\mu_1(t)h_2(t)-\mu_3(t)}\Big]\Big[\mu_4'(t) - \mu_3'(t)h_2(t) - a(0,t)v_{2y}(0,t) + \\
&+ \int_0^1 \big[\big(h_2(t)(1-y)a(yh_2(t),t) + a(yh_2(t),t)\big)v_{2y}(y,t) + \\
&+ h_2^2(t)(1-y)\big(c(yh_2(t),t)v_2(y,t) + f(yh_2(t),t)\big)\big]dy\Big] + \\
&+ \frac{1}{h_1(t)\big(\mu_1(t)h_1(t)-\mu_3(t)\big)}\Big[-\mu_3'(t)\big(h_1(t)-h_2(t)\big) - \\
&- a(0,t)v_y(0,t) + \int_0^1 \big\{\big[a(yh_1(t),t) - a(yh_2(t),t) + \\
&+(y-1)\big(h_1(t)\left[a_x(yh_1(t),t) - a_x(yh_2(t),t)\right] + \big(h_1(t) - \\
&- h_2(t)\big)a_x(yh_2(t),t)\big)\big]v_{2y}(y,t) + (y-1)\,h_1(t)\,a_x(yh_1(t),t)\,v_y(y,t) + \\
&+ (1-y)\big[h_1^2(t)\big(\left[c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t)\right]v_2(y,t) + \\
&+c(yh_1(t),t)\,v(y,t) + f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t)\big) + \\
&+ \big(h_1^2(t) - h_2^2(t)\big)\big(c(yh_2(t),t)v_2(y,t) + f(yh_2(t),t)\big)\big]\big\}\,dy\Big]. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

Використаємо таке перетворення:

$$
\begin{aligned}
&f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) = \\
&= y\big(h_1(t)-h_2(t)\big)\int_0^1 f_x\big(yh_2(t) + \sigma(h_1(t)-h_2(t)),t\big)\,d\sigma\,. \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Застосуємо (35) до різниць $a(yh_1(t),t) - a(yh_2(t),t)$, $a_x(yh_1(t),t) - a_x(yh_2(t),t)$, $c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t)$. Виразимо $h_i(t)$ через $s_i(t)$:

$$
h_i(t) = h_i(0)\exp\Big(\int_0^t s_i(\tau)\,d\tau\Big), \qquad i = 1,2\,,
$$

де $h_1(0) = h_2(0) = h_0$. Тоді

$$
\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = \frac{1}{h_0}\Big[\exp\Big(-\int_0^t s_1(\tau)\,d\tau\Big) - \exp\Big(-\int_0^t s_2(\tau)\,d\tau\Big)\Big].
$$

Звідси з використанням рівності

$$
e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}\,d\tau
$$

отримаємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0}\int_0^t s(\tau)\,d\tau \int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (\sigma s(\tau) + s_2(\tau))\,d\tau\right) d\sigma . \qquad (36)$$

Аналогічно одержимо

$$\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} = -\frac{2}{h_0^2}\int_0^t s(\tau)\,d\tau \int_0^1 \exp\left(-2\int_0^t (\sigma s(\tau) + s_2(\tau))\,d\tau\right) d\sigma . \qquad (37)$$

Використовуючи (35)–(37) і підставляючи (30) в (33), (34), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $s(t)$, $q(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що $s(t) = 0$, $q(t) = 0$, $t \in [0,t_0]$. Звідси отримаємо $s_1(t) = s_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, $t \in [0,t_0]$, а, отже, $h_1(t) = h_2(t)$, $b_1(t) = b_2(t)$, $t \in [0,t_0]$. Використовуючи це в задачі (25)–(27), знаходимо, що $v_1(y,t) = v_2(y,t)$, $(y,t) \in \overline{Q}_{t_0}$, що завершує доведення теореми. ◊

1. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
3. *Пабирівська Н. В.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142–149.
4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
5. *Cannon J. R., Perez-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – **10**. – P. 521–531.
6. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – Vol. 10. – 238 p.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при первой производной в области со свободной границей.

INVERSE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION IN FREE BOUNDARY DOMAIN

We established conditions of existence and uniqueness of solution of the inverse problem for a parabolic equation with unknown coefficient at the first derivative in the case when a part of boundary is unknown.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.11.06