

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НЕПРЕРЫВНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается задача устойчивости стержня с произвольной непрерывной переменной поперечной жесткостью, сжатого произвольной непрерывно приложенной переменной осевой продольной силой. Впервые построено точное решение соответствующего дифференциального уравнения продольного изгиба. Как следствие, в аналитическом виде получены формулы для перемещений и внутренних усилий в произвольном сечении стержня.

Введение. В теории устойчивости особое место занимают стержни с переменными параметрами. Такие стержни часто встречаются на практике в самолетостроении, мостостроении, судостроении, в высотном строительстве (дымовые трубы, линии электропередач, телевизионные башни, водонапорные башни и т.п.). Поэтому расчет на устойчивость указанных объектов имеет важное практическое значение.

Согласно концепции Эйлера, критическую силу определяют из дифференциального уравнения продольного изгиба, которое выражает равновесие стержня в деформированном состоянии. При наличии точного решения уравнения соответствующая задача устойчивости решается сравнительно просто. Однако реальные объекты имеют, как правило, переменную поперечную жесткость, что приводит к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. Задача становится еще сложнее, когда не только поперечная жесткость, но и действующая на стержень продольная сила является переменной.

Таким образом, проблема устойчивости стержней с переменными параметрами тесно связана с математической проблемой, заключающейся в отсутствии универсального метода прямого интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Именно поэтому метод прямого интегрирования отошел на задний план в теории устойчивости, уступив место различного рода приближенным методам.

Статья посвящена нерешенной до сегодняшнего дня проблеме – построению точного решения дифференциального уравнения продольного изгиба для случая произвольной непрерывной переменной поперечной жесткости стержня, находящегося под воздействием произвольной непрерывно приложенной переменной продольной силы.

1. Анализ исследований и публикаций. Проблема устойчивости стержней с переменными параметрами рассматривалась во множестве работ [1, 2, 4, 5, 10–12, 14, 22–25, 27–32]. Среди современных публикаций следует выделить работы [9, 15–17, 19–21, 26, 29, 33]. Большое количество исследований свидетельствует об актуальности и большой практической значимости данной проблемы. При этом точные решения для уравнений продольного изгиба с переменными параметрами встречаются крайне редко. Примерами могут служить точные решения некоторых частных законов изменения поперечной жесткости, представленные в публикациях [4, 5, 23–25, 27, 28, 30, 32, 33]. Относительно произвольного закона изменения поперечной жесткости во многих монографиях [1, с. 85; 10, с. 23; 18, р. 115], по сути, констатируется, что соответствующее уравнение продольного изгиба не удается проинтегрировать. Еще реже встречаются точные решения, когда продольная сила переменна. Поэтому в подавляющем большинстве случаев для исследования устойчивости равновесия стержней применяются различного рода приближенные методы.

Таким образом, анализ современных публикаций свидетельствует об актуальности построения точного решения для уравнения продольного из-

гиба с произвольными непрерывными переменными параметрами. Наличие такого решения позволит получить в аналитическом виде формулы для перемещений и внутренних усилий в произвольном сечении стержня, что в перспективе даст возможность сформулировать новый метод исследования стержней на устойчивость равновесия.

2. Постановка задачи. Объектом исследования является прямой, вообще говоря, неоднородный стержень переменного поперечного сечения, сжатый переменной осевой продольной силой и не подверженный внешним изгибающим воздействиям. Будем рассматривать задачу устойчивости равновесия такого стержня. Соответствующая расчетная схема представлена на рис. 1. На рис. 2 изображена схема действующих усилий на элемент стержня.

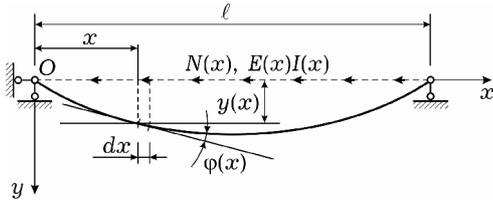


Рис. 1. Расчетная схема стержня при расчете на устойчивость.

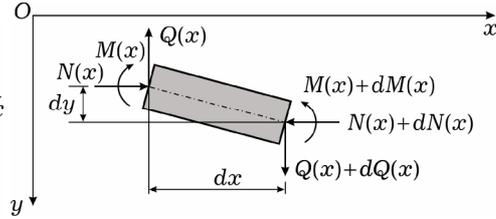


Рис. 2. Схема действующих усилий.

Здесь $E(x)I(x)$ – поперечная жесткость; $E(x)$ – модуль упругости материала стержня; $I(x)$ – момент инерции поперечного сечения стержня; $N(x)$ – сжимающая осевая продольная сила; $y(x)$ – поперечное перемещение; $\varphi(x)$ – угол поворота; $M(x)$ – изгибающий момент; $Q(x)$ – поперечная сила. Последние четыре параметра полностью характеризуют напряженно-деформируемое состояние стержня. Коротко будем называть их *параметрами состояния*.

Традиционно, действующая на стержень продольная сила считается положительной, если она является сжимающей [8]. Когда эта сила переменна по длине стержня, принято полагать [1, 8]

$$N(x) = \lambda \bar{N}(x), \quad (1)$$

где λ – размерный постоянный положительный параметр внешней нагрузки; $\bar{N}(x)$ – безразмерная функция, выражающая закон изменения начальных внутренних усилий, отвечающий единичному значению параметра λ .

С учетом (1) уравнение продольного изгиба запишется так [2]:

$$(E(x)I(x)y''(x))'' + \lambda(\bar{N}(x)y'(x))' = 0. \quad (2)$$

Формулировка задачи. Для произвольной непрерывной переменной поперечной жесткости и произвольной непрерывно-приложенной переменной продольной силы требуется:

- построить точное решение уравнения продольного изгиба (2);
- получить в аналитическом виде формулы для перемещений и внутренних усилий в произвольном сечении стержня, выраженные через начальные параметры.

3. Результаты.

3.1. Точное решение уравнения продольного изгиба. Помимо уравнения (2), будем рассматривать также уравнение, записанное относительно угла поворота

$$(E(x)I(x)\varphi'(x))'' + \lambda(\bar{N}(x)\varphi(x))' = 0. \quad (3)$$

В отличие от уравнения (2), уравнению (3) можно поставить в соответствие равносильную ему систему дифференциальных уравнений с невырожденной матрицей коэффициентов. Вектор неизвестных для такой системы примем в виде

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ M(x) \\ M'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ -E(x)I(x)\varphi'(x) \\ -(E(x)I(x)\varphi'(x))' \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{d\Phi}{dx} = R(x)\Phi, \quad (5)$$

где $R(x)$ – матрица коэффициентов системы:

$$R(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{E(x)I(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda \bar{N}'(x) & -\frac{\lambda \bar{N}(x)}{E(x)I(x)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Применим к уравнению (2) метод прямого интегрирования, суть которого была впервые изложена в публикации [7]. Пусть $b_{n,0}(x)$, $b_{n,k}(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, 3, \dots$, – четыре бесконечных системы пока неизвестных четырежды непрерывно дифференцируемых функций. Образум с помощью этих функций и их производных следующие ряды по степеням неизвестного параметра λ :

$$V_n(x) = b_{n,0}(x) - \lambda b_{n,1}(x) + \lambda^2 b_{n,2}(x) - \lambda^3 b_{n,3}(x) + \dots, \quad (6)$$

$$V_n^{(v)}(x) = b_{n,0}^{(v)}(x) - \lambda b_{n,1}^{(v)}(x) + \lambda^2 b_{n,2}^{(v)}(x) - \lambda^3 b_{n,3}^{(v)}(x) + \dots, \quad v = 1, 2, 3, 4, \quad (7)$$

где индекс (v) обозначает порядок производной. Пока предполагаем, что ряды (6), (7) равномерно сходятся на отрезке $x \in [0, \ell]$. Тогда будет возможна операция почленного дифференцирования, а значит, обозначения $V_n^{(v)}(x)$ для рядов (7) будут законными.

Неизвестные функции $b_{n,0}(x)$, $b_{n,k}(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, 3, \dots$, будем находить из условия, что $V_n(x)$ удовлетворяет уравнению (2):

$$(E(x)I(x)V_n''(x))'' + \lambda(\bar{N}(x)V_n'(x))' = 0. \quad (8)$$

Подставим здесь вместо выражений $V_n'(x)$, $V_n''(x)$ соответствующие им ряды (7), выполним почленное дифференцирование и результат запишем по степеням λ . В итоге придем к следующему равенству:

$$(E(x)I(x)b_{n,0}''(x))'' + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \lambda^k ((E(x)I(x)b_{n,k}''(x))'' - (\bar{N}(x)b'_{n,k-1}(x))') = 0,$$

которое по условию должно удовлетворяться при любом значении λ . Отсюда, приравнявая к нулю выражения при всех степенях λ , включая нулевую степень, получим

$$(E(x)I(x)b_{n,0}''(x))'' = 0, \quad (9)$$

$$(E(x)I(x)b''_{n,k}(x))'' = (\bar{N}(x)b'_{n,k-1}(x))', \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Выписать фундаментальную систему решений для уравнения (9) не составляет труда. Из уравнения (10) после четырехкратного интегрирования определим $b_{n,k}(x)$. Стремясь получить при этом формулу с нулевыми константами интегрирования, присоединим к уравнению (10) надлежащие граничные условия:

$$b_{n,k}(0) = b'_{n,k}(0) = b''_{n,k}(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

$$(E(0)I(0)b''_{n,k}(0))' = \bar{N}(0)b'_{n,k-1}(0), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

В результате будем иметь

$$b_{1,0}(x) = x,$$

$$b_{2,0}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} dx dx,$$

$$b_{3,0}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{x}{E(x)I(x)} dx dx,$$

$$b_{4,0}(x) = 1, \quad (13)$$

$$b_{n,k}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \int_0^x \bar{N}(x)b'_{n,k-1}(x) dx dx dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Таким образом, для каждой начальной функции $b_{n,0}(x)$ из совокупности (13) по рекуррентной формуле (14) находим соответствующую ей бесконечную систему образующих функций $b_{n,k}(x)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Очевидно, для таких функций равенство (8) удовлетворяется тождественно.

В развернутом виде формула (14) запишется так:

$$b_{n,k}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \times \\ \times \int_0^x \bar{N}(x) \dots \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \int_0^x \bar{N}(x)b'_{n,0}(x) dx dx \dots dx dx dx. \quad (15)$$

Здесь количество интегралов равно $2k + 1$.

Осталось теперь доказать, что ряды (6), (7) действительно равномерно сходятся. Чтобы избежать однотипных выкладок, приведем здесь доказательство только для ряда (6). Для этого определим положительные постоянные

$$h_n = \max_{x \in [0, \ell]} |b'_{n,0}(x)|,$$

$$g_1 = \max_{x \in [0, \ell]} \frac{1}{E(x)I(x)}, \quad g_2 = \max_{x \in [0, \ell]} \bar{N}(x).$$

Тогда на основании представления (15) для образующих функций будем иметь оценки

$$|b_{n,k}(x)| \leq h_n (g_1 g_2)^k \left| \int_0^x \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x dx dx dx \dots dx dx \right| = h_n (g_1 g_2)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Следовательно, для ряда из модулей получим

$$\begin{aligned}
& |b_{n,0}(x)| + |\lambda b_{n,1}(x)| + |\lambda^2 b_{n,2}(x)| + |\lambda^3 b_{n,3}(x)| + \dots \leq \\
& \leq |b_{n,0}(x)| + h_n \left(\lambda g_1 g_2 \frac{x^3}{3!} + \lambda^2 (g_1 g_2)^2 \frac{x^5}{5!} + \lambda^3 (g_1 g_2)^3 \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = \\
& = |b_{n,0}(x)| + h_n \left(\frac{1}{\sqrt{g_1 g_2 \lambda}} \operatorname{sh} \sqrt{g_1 g_2 \lambda} x - x \right).
\end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{sh} x$ определяется рядом, который равномерно сходится для любого конечного x , то тем самым доказано, что ряд (6) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $x \in [0, \ell]$. Аналогично доказывается абсолютная и равномерная сходимость рядов (7).

Таким образом, формулами (6), (13)–(15) определены четыре решения $V_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$, уравнения (2). При этом для начальной функции $b_{4,0}(x) = 1$ по формуле (15), очевидно, получаем $b_{4,k}(x) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Тогда согласно (6) будем иметь решение уравнения (2), тождественно равное единице $V_4(x) \equiv 1$.

Очевидно, если $V_n(x)$, $n = 1, 2, 3$, – решение уравнения (2), то $V'_n(x)$, $n = 1, 2, 3$, будет решением (3). Имея три решения уравнения (3) и формируя для каждого из них по формуле (4) вектор

$$\Phi_n(x) = \begin{pmatrix} V'_n(x) \\ -E(x)I(x)V''_n(x) \\ -(E(x)I(x)V''_n(x))' \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3,$$

получим три решения системы (5). В справедливости сказанного можно убедиться непосредственной подстановкой. Тогда матрица, составленная из этих векторов

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} V'_1(x) & V'_2(x) & V'_3(x) \\ -E(x)I(x)V''_1(x) & -E(x)I(x)V''_2(x) & -E(x)I(x)V''_3(x) \\ -(E(x)I(x)V''_1(x))' & -(E(x)I(x)V''_2(x))' & -(E(x)I(x)V''_3(x))' \end{pmatrix},$$

очевидно, также будет удовлетворять системе (5).

Вычислим значение $\Omega(0)$, для чего вначале выведем формулу для вычисления $\Phi_n(0)$, $n = 1, 2, 3$. В силу (11), правая часть формулы (12) будет обращаться в ноль для всех $k = 2, 3, 4, \dots$. Поэтому ее целесообразно записать дважды: отдельно для значений $k = 1$ и $k = 2, 3, 4, \dots$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
(E(0)I(0)b''_{n,1}(0))' &= \bar{N}(0)b'_{n,0}(0), \\
(E(0)I(0)b''_{n,k}(0))' &= 0, \quad k = 2, 3, 4, \dots
\end{aligned} \tag{16}$$

С помощью формул (7), (11), (16) для вектора $\Phi_n(0)$ находим

$$\Phi_n(0) = \begin{pmatrix} V'_n(0) \\ -E(0)I(0)V''_n(0) \\ -(E(0)I(0)V''_n(0))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_{n,0}(0) \\ -E(0)I(0)b''_{n,0}(0) \\ -(E(0)I(0)b''_{n,0}(0))' + \lambda \bar{N}(0)b'_{n,0}(0) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Отсюда

$$\Phi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \bar{N}(0) \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\Omega(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \lambda \bar{N}(0) & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу $\Omega(x)$ справа на постоянную матрицу $\Omega^{-1}(0)$ и обозначим $\Lambda(x) = \Omega(x) \Omega^{-1}(0)$. Тогда новая матрица $\Lambda(x)$, во-первых, также будет удовлетворять (5), а во-вторых,

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Следовательно, $\Lambda(x)$ является *матрицантом* [3, с. 405] для системы (5). Учитывая, что $\text{Sp } R(x) = 0$, по формуле Якоби [3, с. 395] легко находим определитель матрицанта:

$$|\Lambda(x)| = |\Lambda(0)| \exp \left(\int_0^x \text{Sp } R(x) dx \right) = 1.$$

Составим из решений $V_1'(x)$, $V_2'(x)$, $V_3'(x)$ уравнения (3) вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} V_1'(x) & V_2'(x) & V_3'(x) \\ V_1''(x) & V_2''(x) & V_3''(x) \\ V_1'''(x) & V_2'''(x) & V_3'''(x) \end{vmatrix}.$$

Легко установить формулу $|\Lambda(x)| = (E(x)I(x))^2 W(x)$. Отсюда $W(x) = (E(x)I(x))^{-2} \neq 0$. Тогда для вронскиана системы решений $\{V_1(x), V_2(x), V_3(x), 1\}$ уравнения (2) будем иметь

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & V_1(x) & V_2(x) & V_3(x) \\ 0 & V_1'(x) & V_2'(x) & V_3'(x) \\ 0 & V_1''(x) & V_2''(x) & V_3''(x) \\ 0 & V_1'''(x) & V_2'''(x) & V_3'''(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поскольку из неравенства нулю вронскиана вытекает линейная независимость системы функций [13, с. 186], то $\{V_1(x), V_2(x), V_3(x), 1\}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения продольного изгиба (2).

Окончательно общее решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$y(x) = D_1 V_1(x) + D_2 V_2(x) + D_3 V_3(x) + D_4, \quad (19)$$

где D_1, D_2, D_3, D_4 – постоянные интегрирования.

3.2. Параметры состояния, выраженные через начальные параметры. Как известно [8, 11], параметры состояния стержня связаны между собой равенствами: $\varphi(x) = y'(x)$, $M(x) = -E_0 I_0 A(x) \varphi'(x)$, $Q(x) = M'(x) - \lambda \bar{N}(x) \varphi(x)$. При выводе для них окончательных формул, важную роль будут играть свойства решений $V_1(x), V_2(x), V_3(x)$, на которые обратим внимание.

Подставляя $V_1(x), V_2(x), V_3(x)$ в дифференциальное уравнение (2), будем иметь три тождества $(E(x)I(x)V_n''(x))'' + \lambda(\bar{N}(x)V_n'(x))' = 0$, $n = 1, 2, 3$, или после интегрирования $(E(x)I(x)V_n''(x))' + \lambda \bar{N}(x)V_n'(x) = C_n$. Полагая

здесь $x = 0$ и учитывая (17), получим $C_n = (E(0)I(0)b''_{n,0}(0))'$. Отсюда находим $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 1$. Следовательно, справедливы тождества:

$$(E(x)I(x)V''_n(x))' + \lambda\bar{N}(x)V'_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, \quad (20)$$

$$(E(x)I(x)V'''_3(x))' + \lambda\bar{N}(x)V'_3(x) = 1. \quad (21)$$

Как известно [3, с. 405], общее решение системы дифференциальных уравнений выражается посредством матрицанта. В рассматриваемом случае для системы (5) будем иметь $\Phi(x) = \Lambda(x)\Phi(0)$. Наряду с вектором $\Phi(x)$ рассмотрим также вектор

$$\Theta(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix}.$$

Связь между $\Phi(x)$ и $\Theta(x)$ определяется формулой $\Theta(x) = T(x)\Phi(x)$, где

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda\bar{N}(0) & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Theta(x) = T(x)\Lambda(x)\Phi(0). \quad (22)$$

Полагая здесь $x = 0$ и учитывая (18), получаем

$$\Phi(0) = T^{-1}(0)\Theta(0).$$

Подставим значение вектора $\Phi(0)$ в формулу (22), выполним там матричные умножения и учтем при этом тождества (20), (21). Записывая результат отдельно для каждой компоненты вектора $\Theta(x)$, имеем

$$\varphi(x) = \varphi(0)V'_1(x) - M(0)V'_2(x) - Q(0)V'_3(x), \quad (23)$$

$$M(x) = -E(x)I(x)[\varphi(0)V''_1(x) - M(0)V''_2(x) - Q(0)V''_3(x)], \quad (24)$$

$$Q(x) = Q(0). \quad (25)$$

С другой стороны, формулу для угла поворота можно получить, дифференцируя равенство (19). Сравнивая результат дифференцирования (19) с формулой (23), находим $D_1 = \varphi(0), D_2 = -M(0), D_3 = -Q(0)$. Константу D_4 найдем, если учтем равенства $V_n(0) = 0, n = 1, 2, 3$, которые с очевидностью вытекают из формул (6), (11), (13). Тогда, полагая $x = 0$ в равенстве (19), получим $D_4 = y(0)$.

Окончательно формулу для перемещений (19) запишем в виде

$$y(x) = y(0) + \varphi(0)V_1(x) - M(0)V_2(x) - Q(0)V_3(x). \quad (26)$$

Таким образом, формулами (23)–(26) полностью определены параметры состояния (перемещения и внутренние усилия) в произвольном сечении стержня.

Попутно укажем на важное для будущих исследований тождество. Вычисляя непосредственно определитель матрицы $\Omega(x)$, и учитывая при этом тождества (20), (21), получим

$$|\Omega(x)| = E(x)I(x)(V'_1(x)V''_2(x) - V''_1(x)V'_2(x)).$$

Отсюда, поскольку $|\Omega(x)| = |\Lambda(x)| = 1$, приходим к тождеству

$$E(x)I(x)(V'_1(x)V''_2(x) - V''_1(x)V'_2(x)) = 1. \quad (27)$$

Пример. В качестве апробации полученных формул обратимся к хорошо изученному однородному стержню постоянного сечения, сжатого постоянной продольной силой. В таком случае, очевидно, следует положить

$$E(x)I(x) = EI = \text{const}, \quad \lambda = N, \quad \bar{N}(x) \equiv 1.$$

Формулу (15) запишем так:

$$b_{n,k}(x) = \frac{1}{(EI)^k} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x b_{n,0}(x) dx \dots dx dx dx, \quad n = 1, 2, 3,$$

причем количество интегралов здесь равно $2k$, а начальные функции согласно (13) имеют вид

$$b_{1,0}(x) = x, \quad b_{n,0}(x) = \frac{1}{EI} \frac{x^n}{n!}, \quad n = 2, 3.$$

Отсюда находим

$$b_{1,k}(x) = \frac{1}{(EI)^k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$b_{n,k}(x) = \frac{1}{(EI)^{k+1}} \frac{x^{2k+n}}{(2k+n)!}, \quad n = 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

В результате, предварительно обозначив $\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}$, для фундаментальных функций (6) имеем

$$V_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{N}{EI}\right)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x,$$

$$V_2(x) = \frac{1}{EI} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{N}{EI}\right)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{1}{\alpha^2 EI} (1 - \cos \alpha x),$$

$$V_3(x) = \frac{1}{EI} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{N}{EI}\right)^k \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} = \frac{1}{\alpha^3 EI} (\alpha x - \sin \alpha x).$$

После этого формула (26) преобразуется к известному решению [6, с. 461]

$$y(x) = y(0) + \frac{\varphi(0)}{\alpha} \sin \alpha x - \frac{M(0)}{\alpha^2 EI} (1 - \cos \alpha x) - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EI} (\alpha x - \sin \alpha x).$$

Интересно также заметить, что в этом примере формула (27) вырождается в основное тригонометрическое тождество.

Выводы. В работе впервые проинтегрировано дифференциальное уравнение продольного изгиба стержня с произвольной непрерывной переменной поперечной жесткостью, сжатого произвольной непрерывно приложенной переменной осевой продольной силой. В аналитическом виде выписаны формулы для перемещений и внутренних усилий в произвольном сечении стержня. Эти формулы выражены через начальные параметры и пригодны для исследования устойчивости стержня при любых возможных граничных условиях.

Решение этой проблемы открывает перспективу создания нового метода исследования стержней на устойчивость равновесия. Для этого достаточно указать эффективный метод численной реализации найденных здесь точных решений. Этому вопросу планируется посвятить следующую статью.

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – Москва: Машиностроение, 1978. – 312 с.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
4. Динник А. Н. О продольном изгибе стержней переменного сечения // Изв. Донск. политехн. ин-та. – 1913. – № 1. – С. 390–404.
5. Динник А. Н. Продольный изгиб. Кручение. – Москва: Изд-во АН СССР, 1955. – 392 с.
6. Киселев В. А. Строительная механика. – Москва: Стройиздат, 1980. – 616 с.
7. Крутой Ю. С. Точное решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной переменной массой // Строит. механика и расчет сооружений. – 2011. – № 5. – С. 47–53.
8. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. – Т. 1. – Москва: Изд-во СКАД СОФТ, 2007. – 670 с.
9. Приходько В. Е. Исследование продольно-сжатых стержней переменной жесткости // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2011. – Вып. 2(66). – С. 35–41.
10. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 576 с.
11. Ржаницын А. Р. Строительная механика. – Москва: Высш. шк., 1991. – 439 с.
12. Смирнов А. Ф. Устойчивость и колебания сооружений. – Москва: Трансжелдориздат, 1958. – 571 с.
13. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1985. – 448 с.
14. Arbabi F., Li F. Buckling of variable cross-section columns: Integral equation approach // J. Struct. Eng. – 1991. – **117**, No. 8. – P. 2426–2441.
15. Atay M. T. Determination of buckling loads of tilted buckled column with varying flexural rigidity using variational iteration method // Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2010. – **11**, No. 2. – P. 97–103.
16. Atay M. T. Determination of critical buckling loads for variable stiffness Euler columns using homotopy perturbation method // Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2009. – **10**, No. 2. – P. 199–206.
17. Atay M. T., Coşkun S. B. Elastic stability of Euler columns with a continuous elastic restraint using variational iteration method // Comput. Math. Appl. – 2009. – **58**, No. 11–12. – P. 2528–2534.
18. Coşkun S. B. (Ed.) Advances in computational stability analysis. – Rijeka: InTech, 2012. – 132 p. <https://www.intechopen.com/books/advances-in-computational-stability-analysis>.
19. Coşkun S. B. Analysis of tilt-buckling of Euler columns with varying flexural stiffness using homotopy perturbation method // Math. Model. Anal. – 2010. – **15**, No. 3. – P. 275–286.
20. Coşkun S. B. Determination of critical buckling loads for Euler columns of variable flexural stiffness with a continuous elastic restraint using homotopy perturbation method // Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2009. – **10**, No. 2. – P. 191–197.
21. Coşkun S. B., Atay M. T. Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method // Comput. Math. Appl. – 2009. – **58**, No. 11–12. – P. 2260–2266.
22. Eisenberger M. Buckling loads for variable cross-section members with variable axial forces // Int. J. Solids Struct. – 1991. – **27**, No. 2. – P. 135–143.
23. Elishakoff I., Pellegrini F. Application of Bessel and Lommel functions and the undetermined multiplier Galerkin method version for instability of non-uniform column // J. Sound Vib. – 1987. – **115**, No. 1. – P. 182–186.
24. Elishakoff I., Pellegrini F. Exact solutions for buckling of some divergence-type nonconservative systems in terms of Bessel and Lommel functions // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1988. – **66**, No. 1. – P. 107–119.
25. Gere J. M., Carter W. O. Critical buckling loads for tapered columns // J. Struct. Division. ASCE. – 1962. – **88**, No. 1. – P. 1–11.
26. Huang Y., Luo Q.-Z. A simple method to determine the critical buckling loads for axially inhomogeneous beams with elastic restraint // Comput. & Math. Appl. – 2011. – **61**, No. 9. – P. 2510–2517.

27. Li Q., Cao H., Li G. Stability analysis of a bar with multi-segments of varying cross-section // Comput. & Struct. – 1994. – **53**, No. 5. – P. 1085–1089.
28. Li Q., Cao H., Li G. Stability analysis of bars with varying cross-section // Int. J. Solids Struct. – 1995. – **32**, No. 21. – P. 3217–3228.
29. Okay F., Atay M.T., Coçkun S. B. Determination of buckling loads and mode shapes of a heavy vertical column under its own weight using the variational iteration method // Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2010. – **11**, No. 10. – P. 851–857.
30. Sampaio J. H. B. (Jr), Hundhausen J. R. A mathematical model and analytical solution for buckling of inclined beam-columns // Appl. Math. Modelling. – 1998. – **22**, No. 6. – P. 405–421.
31. Siginer A. Buckling of columns of variable flexural rigidity // J. Eng. Mech. ASCE. – 1992. – **118**, No. 3. – P. 640–643.
32. Timoshenko S. P., Gere J. M. Theory of elastic stability. – New York: McGraw Hill, 1961. – xvi+541 p.
33. Wang C. M., Wang C. Y., Reddy J. N. Exact solutions for buckling of structural members. – Boca Raton: CRC Press LLC, 2005. – xiii+207 p.

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ СТЕРЖНЯ З ДОВІЛЬНИМИ НЕПЕРЕРВНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглядається задача стійкості стержня з довільною неперервною змінною поперечною жорсткістю, стиснутого довільною неперервно прикладеною змінною осьювою поздовжньою силою. Вперше знайдено точний розв'язок відповідного диференціального рівняння поздовжнього згину. Як наслідок, в аналітичному вигляді отримано формули для переміщень і внутрішніх зусиль у довільному перерізі стержня.

CONSTRUCTION OF A SOLUTION OF PROBLEM ON STABILITY OF A BAR WITH ARBITRARY CONTINUOUS PARAMETERS

The problem of stability of a bar with the arbitrary continuous variable transverse stiffness is considered. The bar is compressed by the continuously applied variable axial longitudinal force. The exact solution of the corresponding differential equation of longitudinal bending is constructed. Analytical formulas for displacements and internal forces in an arbitrary cross-section of the bar are obtained.

Одесск. гос. акад. стр-ва и архитектуры, Одесса

Получено
05.01.15