

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЗУЧОСТІ ТА ПОШКОДЖУВАНOSTІ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА НА ОСНОВІ ПРОСТОРОВОЇ ТА УТОЧНЕНОЇ ОБОЛОНКОВОЇ МОДЕЛЕЙ

Розглянуто осесиметричну задачу повзучості та пошкоджуваності внаслідок повзучості порожнистого циліндра. Розроблено чисельно-аналітичний метод розв'язання нелінійної початково-крайової задачі повзучості та пошкоджуваності. Наведено приклад розрахунку повзучості та часу до руйнування циліндра, навантаженого внутрішнім тиском. Проведено співставлення результатів, отриманих на основі просторової моделі, з результатами, отриманими на основі уточненої моделі теорії оболонок.

Стан проблеми. Задачі розрахунку напружено-деформованого стану та міцності циліндричних тіл та оболонок досить широко представлені у вітчизняних та іноземних публікаціях. Аналіз сучасної літератури показує, що кількість робіт, присвячених дослідженню меж застосування спрощених оболоноквих моделей у задачах повзучості та пошкоджуваності циліндричних тіл вельми обмежена. Раніше, у роботі [8], авторами були досліджені повзучість і пошкоджуваність порожнистого циліндра з алюмінієвого сплаву АК4-1Т, навантаженого зовнішнім тиском. Дослідження проводились в рамках осесиметричної просторової постановки та на основі класичної теорії оболонок Кірхгофа – Лява з урахуванням різної поведінки сплаву АК4-1Т при розтягу та стиску в умовах повзучості. Було виконано співставлення параметрів напружено-деформованого стану в центрі, на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра, а також часу до руйнування. На відміну від попереднього, метою цієї роботи є:

- розробка методів дослідження повзучості, пошкоджуваності та тривалої міцності порожнистого циліндра скінчених розмірів; дослідження ведуться на основі осесиметричної просторової моделі та уточненої оболоноквої моделі, що ґрунтується на гіпотезах прямолінійного елемента;
- співставлення отриманих на основі цих моделей результатів розрахунків параметрів напружено-деформованого стану та часу завершення прихованого руйнування;
- дослідження впливу співвідношення геометричних розмірів циліндра на похибку оболоноквого розв'язку відносно просторового розв'язку.

1. Постановка і метод розв'язання початково-крайової задачі повзучості в просторовій моделі. Розглянемо круговий осесиметрично навантажений ізотропний порожнистий циліндр у циліндричній системі координат $O\tau\varphi z$. Вісь Oz співпадає з віссю симетрії. Температура є сталою.

Компоненти тензора швидкостей повних деформацій $\dot{\epsilon}_{ij}$ складаються з компонентів пружних деформацій $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ та компонентів незворотних деформацій повзучості \dot{p}_{ij} :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{p}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Визначальні співвідношення повзучості для початково ізотропних матеріалів і кінетичне рівняння для параметра пошкоджуваності при ізотропному характері пошкоджуваності в загальному випадку можуть бути записані у вигляді

$$\dot{p}_{ij} = f_{ij}(\sigma_{ij}, \sigma_e, \Psi), \quad \dot{\Psi} = g(\sigma_{e1}, \Psi),$$

де f_{ij} – деяка тензор-функція зазначених аргументів; σ_{ij} – компоненти тензора напружень Коші; σ_e , σ_{e1} – еквівалентні напруження, що містять ті чи інші базові інваріанти тензора напружень; ψ – скалярний параметр пошкоджуваності.

У циліндричній системі координат маємо

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{rr}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rr}(r, z, t), \\ \dot{\varepsilon}_{zz}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{zz}^e(r, z, t) + p_{zz}(r, z, t), \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^e(r, z, t) + \dot{p}_{\varphi\varphi}(r, z, t), \\ \dot{\varepsilon}_{rz}(r, z, t) &= \dot{\varepsilon}_{rz}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rz}(r, z, t).\end{aligned}$$

Тут крапка над символом означає повну похідну за часом t .

Основні невідомі задачі повзучості та пошкоджуваності внаслідок повзучості у довільній точці циліндра можна знайти із розв'язку задачі Коші за часом для системи звичайних диференціальних рівнянь [8]

$$\begin{aligned}\frac{du_r}{dt} &= \dot{u}_r, & \frac{du_z}{dt} &= \dot{u}_z, \\ \frac{d\varepsilon_{rr}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{r,r}, & \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{z,z}, & \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dt} &= \frac{\dot{u}_r}{r}, \\ \frac{d\gamma_{rz}}{dt} &= 2 \frac{d\varepsilon_{rz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{r,z} + \dot{\varepsilon}_{z,r}, \\ \frac{d\sigma_{rr}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{zz} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{p}_{rr}), \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{zz}), \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{zz}) + \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{\varphi\varphi}), \\ \frac{d\sigma_{rz}}{dt} &= G(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz}), \\ \frac{dp_{rr}}{dt} &= \dot{p}_{rr}, & \frac{dp_{zz}}{dt} &= \dot{p}_{zz}, & \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} &= \dot{p}_{\varphi\varphi}, & \frac{dp_{rz}}{dt} &= \dot{p}_{rz}, & \frac{d\psi}{dt} &= \dot{\psi}.\end{aligned}\quad (1)$$

Тут $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$ – переміщення уздовж осей Or та Oz відповідно; ε_{rr} , ε_{zz} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, ε_{rz} – компоненти тензора повних деформацій; σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{rz} – компоненти тензора напружень; p_{rr} , p_{zz} , $p_{\varphi\varphi}$, p_{rz} – компоненти тензора деформацій повзучості.

У початковий момент часу $t = 0$ деформації повзучості та параметр пошкоджуваності дорівнюють нулеві: $p_{rr} = p_{zz} = p_{\varphi\varphi} = p_{rz} = \psi = 0$. Початкові умови для решти шуканих функцій знаходимо із розв'язку задачі пружного деформування.

Розв'язання початкової задачі для системи рівнянь (1) проводимо методом Рунге – Кутта – Мерсона (РКМ) з автоматичним вибором часового кроку. Праві частини рівнянь (1) у фіксовані моменти часу $t \neq 0$, які відповідають схемі РКМ, знаходимо за допомогою розв'язку варіаційної задачі для функціонала у формі Лагранжа для осесиметрично навантаженого тіла

обертання скінченної довжини [4 (с. 570), 8]

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\dot{\mathbf{U}}) = & 0.5 \iint_{\Omega} \left[\lambda_1 \left(\dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + \frac{\dot{u}_r^2}{r^2} \right) + G(\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + \right. \\
 & \left. + 2\lambda \left(\dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + \frac{\dot{u}_r(\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})}{r} \right) \right] r dr dz - \\
 & - \iint_{\Omega} \left[\dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^c + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^c + \frac{\dot{u}_r \dot{N}_\theta^c}{r} + \dot{N}_{rz}^c (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \\
 & - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n^0 \dot{u}_n + \dot{P}_\tau^0 \dot{u}_\tau) d\partial\Omega. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Тут $\dot{\mathbf{U}} = (\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t))$ – вектор кінематично можливих швидкостей переміщень; Ω – меридіанний переріз циліндра; $\partial\Omega_p$ – частина контуру $\partial\Omega$, де прикладені зовнішні сили; $\dot{P}_n^0, \dot{P}_\tau^0$ – швидкості нормальної і дотичної складових зовнішніх сил; $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ – зовнішня нормаль та дотична до контуру $\partial\Omega$; $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_r + \dot{u}_z n_z$, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_r - \dot{u}_r n_z$; n_r, n_z – напрямні косинуси нормалі \mathbf{n} ; $\lambda = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)}$, $\lambda_1 = \lambda + 2G$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, E, ν – пружні характеристики матеріалу. Швидкості «фіктивних» сил, зумовлених деформаціями повзучості, обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
 \dot{N}_r^c &= [\lambda_1 \dot{p}_{rr} + \lambda(\dot{p}_{zz} + \dot{p}_{\phi\phi})], & \dot{N}_z^c &= [\lambda_1 \dot{p}_{zz} + \lambda(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\phi\phi})], \\
 \dot{N}_\theta^c &= [\lambda_1 \dot{p}_{\phi\phi} + \lambda(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{zz})], & N_{rz}^c &= 2G \dot{p}_{rz}.
 \end{aligned}$$

Швидкості деформацій повзучості у функціоналі (2) вважаються відомими і не варіюються.

Варіаційні задачі для функціонала (2) розв'язуються методом Рітца у комбінації з методом R -функцій [5, 6]. Метод R -функцій дозволяє точно враховувати геометричну форму та граничні умови найбільш загального вигляду. При цьому наближений розв'язок крайової задачі подається у вигляді формули – структури розв'язку, яка точно задовольняє усі граничні умови (загальна структура розв'язку) або їх частину (часткова структура розв'язку) і є інваріантною стосовно геометричної форми області Ω .

2. Постановка і метод розв'язання задачі на основі уточненої оболонкової моделі. Розглядаючи осесиметрично навантажений порожнистий циліндр у рамках теорії оболонок, припускаємо, що виконуються гіпотези прямолінійного елемента [3, с. 15]. Згідно з цими гіпотезами зв'язок осьових u_z і нормальних u_ζ переміщень довільної точки оболонки з відповідними переміщеннями точки серединної поверхні u, w має вигляд

$$u_z = u + \zeta \psi_z, \quad u_\zeta = w, \quad \psi_z = -w' + \gamma_z, \tag{3}$$

де ζ – координата, яка відраховується по нормалі до серединної поверхні з радіусом $r = R$; ψ_z, γ_z – відповідно повний кут прямолінійного елемента і кут, зумовлений поперечним зсувом; штрихом позначаємо похідну за координатою z . Використовуючи (3) і співвідношення Коші, зв'язок між компонентами тензора деформації $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\phi\phi}, \varepsilon_{z\zeta}$ у довільній точці оболонки, компонентами деформації серединної поверхні $\varepsilon_z, \varepsilon_\phi$, параметром зміни її кривини \varkappa_z і кутом зсуву γ_z подамо у вигляді [7]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \varepsilon_z + \zeta x_z, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \varepsilon_\varphi, & 2\varepsilon_{z\zeta} &= \gamma_z, \\ \varepsilon_z &= u', & \varepsilon_\varphi &= \frac{w}{R}, & x_z &= \psi'_z.\end{aligned}\quad (4)$$

Співвідношення (4) записані у припущенні, що величиною ζ/R можна знехтувати порівняно з одиницею. Компоненти напружень визначаються рівностями

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= B_{11}\varepsilon_{zz} + B_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}^a, & \sigma_{\varphi\varphi} &= B_{12}\varepsilon_{zz} + B_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi}^a, \\ \sigma_{z\zeta} &= B_{33}\varepsilon_{z\zeta} - \sigma_{z\zeta}^a,\end{aligned}$$

де B_{ij} – коефіцієнти жорсткості [1], індексом « a » відмічено величини додаткових напружень:

$$\sigma_{zz}^a = B_{11}(p_{zz} + \nu p_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{\varphi\varphi}^a = B_{22}(p_{\varphi\varphi} + \nu p_{zz}), \quad \sigma_{z\zeta}^a = B_{33}p_{z\zeta}.$$

Тут p_{zz} , $p_{\varphi\varphi}$, $p_{z\zeta}$ – компоненти деформацій повзучості, які залежать від напружень, параметрів повзучості та від параметра пошкоджуваності матеріалу і визначаються шляхом чисельного інтегрування фізичних рівнянь. Як і у випадку просторової задачі, це інтегрування здійснюється методом РКМ.

Вводячи до розгляду інтегральні характеристики напруженого стану: радіальне N_r , осьове N_z зусилля й осьовий згинаючий момент M_z , і використовуючи рівняння рівноваги, наведені, наприклад, у [7], кінематичні (4), фізичні і статичні рівняння зведемо до системи звичайних диференціальних рівнянь шостого порядку:

$$\mathbf{Y}' = P(z)\mathbf{Y} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}, \quad (5)$$

де $P(z)$ – матриця системи, що залежить від пружних констант матеріалу; \mathbf{f} – вектор вільних членів, який також залежить від деформацій повзучості. Розв'язок системи (5) повинен задовольняти граничні умови на торцях циліндра. Вирази для компонент матриці $P(z)$ і вектора \mathbf{f} при певних спрощеннях можемо отримати з відповідних виразів з праці [1], у якій розглянуто осесиметричний термов'язкопружнопластичний стан оболонок обертання. На кожному часовому кроці крайову задачу (5) розв'язуємо методом Рунге – Кутта з дискретною ортогоналізацією за С. К. Годуновим.

3. Числові результати. Розглянемо повзучість порожнистого циліндра з алюмінієвого сплаву АК4-1Т при температурі 473 К, навантаженого внутрішнім тиском інтенсивністю P_{inn} . При такому навантаженні в циліндрі будуть переважати напруження розтягу.

Геометричні розміри циліндра: довжина $L = 0.1$ м, радіус серединної поверхні $R = 0.1$ м, товщина $h = 0.01$ м. З позиції теорії оболонок розглядається оболонка середньої товщини ($h = 0.1R$). Пружні константи: $E = 60$ ГПа, $\nu = 0.35$.

Візьмемо спрощену модель повзучості, побудовану тільки на експериментальних даних, отриманих при розтягу. У цьому випадку визначальні співвідношення для швидкостей деформацій повзучості будуть мати вигляд [4, с. 497]

$$\dot{\rho}_{k\ell} = \sigma_e^m \psi^{-\beta} \left(\frac{\Psi_*}{\Psi_* - \psi} \right)^q \sqrt{\frac{3}{2}} C \frac{s_{k\ell}}{\sigma_i}, \quad k, \ell = 1, 2, 3, \quad (6)$$

де $\sigma_e = \sqrt{\frac{2}{3}} C \sigma_i$ – еквівалентне напруження; $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{k\ell} s_{k\ell}$ – інтенсивність

напружень, $s_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} (\sigma_{kk})$ – компоненти діватора напружень; δ_{kl} – символ Кронекера.

Якщо за скалярний параметр пошкоджуваності ψ взяти питому енергію, розсіяну в процесі повзучості $\psi = \int_0^t W dt = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{p}_{ij} dt$, то для ψ отримаємо таке кінетичне рівняння [4, с. 494]:

$$\dot{\psi} = \sigma_e^{m+1} \psi^{-\beta} \left(\frac{\Psi_*}{\Psi_* - \psi} \right)^q. \quad (7)$$

Початкове значення $\psi = 0$ відповідає непошкодженому стану при $t = 0$, а критичне значення $\psi_* = \int_0^{t_*} W dt$ відповідає часу завершення прихованого руйнування $t = t_*$.

Параметри матеріалу в рівняннях (6), (7) [2, 4 (ч. 3, гл. 2)] є такими:

$$C = 1.69631 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-2m/(m+1)} \cdot (\text{год})^{-2/(m+1)},$$

$$m = 8, \quad \beta = 0, \quad q = 3, \quad \Psi_* = 10 \text{ МДж/м}^3.$$

Торці циліндра вільні від навантаження і закріплені таким чином, що радіальні переміщення дорівнюють нулеві. Тоді граничні умови запишуться у вигляді

$$\dot{u}_r = 0, \quad \dot{\sigma}_z = \dot{\sigma}_{rz} = 0, \quad z = \pm \frac{L}{2},$$

$$\dot{\sigma}_r = -\dot{P}_{\text{inn}} = 0, \quad \dot{\sigma}_{zr} = 0, \quad r = r_{\text{inn}} = R - \frac{h}{2},$$

$$\dot{\sigma}_r = \dot{\sigma}_{zr} = 0, \quad r = r_{\text{out}} = R + \frac{h}{2}.$$

Інтенсивність внутрішнього тиску P_{inn} знаходили з формули $P_{\text{inn}} = \frac{P_0 R}{r_{\text{inn}}}$, де $P_0 = 13.0$ МПа – тиск, віднесений до серединної поверхні ($r = R$) циліндра.

Можна показати, що часткова структура розв'язку, яка задовольняє кінематичні граничні умови для швидкостей переміщень, має вигляд:

$$\dot{u}_r = \omega \Phi_1, \quad \dot{u}_z = z \Phi_2,$$

де Φ_1, Φ_2 – невизначені компоненти структури розв'язку; $\omega = \frac{1}{L} \left(\frac{L^2}{4} - z^2 \right) \geq 0$ – смуга Ω , укладена між лініями $z = -\frac{L}{2}$ та $z = \frac{L}{2}$ ($\omega = 0$, $\omega_{,n} = -1$ на межі $\partial\Omega$, $\omega > 0$ всередині смуги). При чисельній реалізації невизначені компоненти структури розв'язку Φ_1, Φ_2 подаємо у вигляді скінченних рядів

$$\Phi_1(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_1} C_n^{(1)}(t) f_n^{(1)}(r, z),$$

$$\Phi_2(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_2} C_n^{(2)}(t) f_n^{(2)}(r, z).$$

Тут $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ – невизначені коефіцієнти, які на кожному часовому кроці знаходимо методом Рітца; t – деякий фіксований момент часової дискретизації схеми РКМ або дискретизації за часом для видачі результатів обчислень; $\{f_n^{(1)}\}$, $\{f_n^{(2)}\}$ – системи лінійно незалежних функцій. У цій роботі $\{f_n^{(1)}\}$, $\{f_n^{(2)}\}$ вибирали у вигляді бікубічних сплайнів Шенберга. Системи сплайнів будували на регулярній сітці $N_r \times N_z$, де N_r , N_z – кількість відрізків дискретизації уздовж осей O_r та O_z відповідно.

Наближений розв'язок задачі повзучості циліндра, сформульованої у рамках просторової постановки, отримано при таких параметрах просторової і часової дискретизації: $N_r = 5$, $N_z = 10$, початковий крок за часом $\Delta t_0 = 10^{-3}$ год, задана похибка обчислень у методі РКМ $\delta = 10^{-4}$. При чисельних розрахунках критерієм зупинки процесу розв'язування і знаходження часу до руйнування t_* було виконання у будь-якій точці просторової дискретизації умови $\psi \geq 0.9\psi_*$.

При розв'язуванні задачі в рамках уточненої оболонкової моделі на меридіанний перетин наносили рівномірну сітку зі 101 точки вздовж осі z і 11 точок по товщині r . Інші параметри дискретизації приймали значення: $\Delta t_0 = 10^{-5}$ год, $\delta = 10^{-6}$. Граничні умови формулювали у такому вигляді:

$$N_r = u_z = \psi_z = 0, \quad z = 0,$$

$$N_z = M_z = u_r = 0, \quad z = \frac{L}{2}.$$

У результаті обчислень встановлено, що руйнування починається в центрі циліндра на внутрішній його поверхні. Час до руйнування, отриманий за просторовою моделлю, склав $t_{*1} = 4291$ год, а за оболонковою – $t_{*2} = 5461$ год, відносна похибка $\Delta = 27\%$. Деякі результати розрахунків наведено на рис. 1 – 6 і у табл. 1. Криві, позначені цифрою 1, отримано у початковий момент часу $t = 0$, цифрою 2 – при $t = 2000$ год, а цифрою 3 – при $t = t_*$. Лінії з маркерами відповідають результатам просторового розв'язку. На рис. 1 подано графіки зміни радіальних переміщень серединної поверхні w вздовж осі циліндра. На рис. 2, рис. 3 показано графіки розподілу колових напружень $\sigma_{\phi\phi}$ та колових деформацій повзучості $p_{\phi\phi}$ на внутрішній поверхні циліндра. На рис. 4, рис. 5 зображено такі ж графіки для зовнішньої поверхні. Рис. 6 ілюструє зміну в часі параметра пошкоджуваності ψ колових напружень $\sigma_{\phi\phi}$ у центрі циліндра на внутрішній поверхні, де починається руйнування.

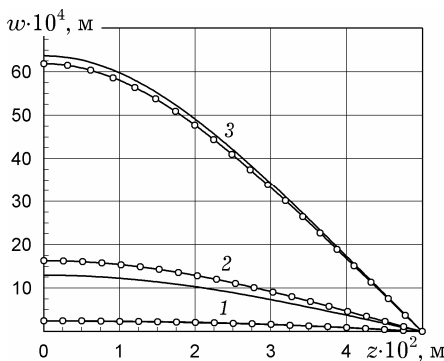


Рис. 1

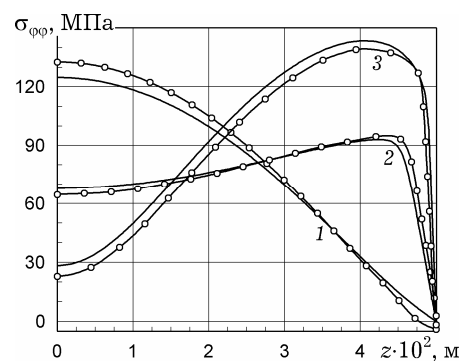


Рис. 2

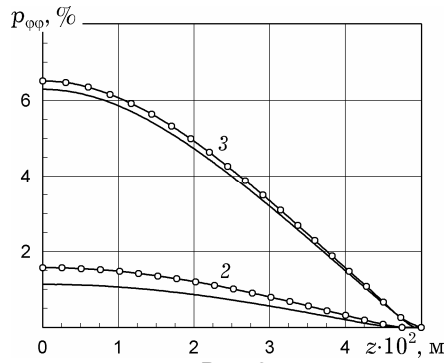


Рис. 3

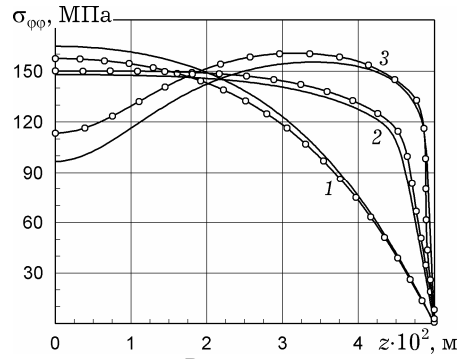


Рис. 4

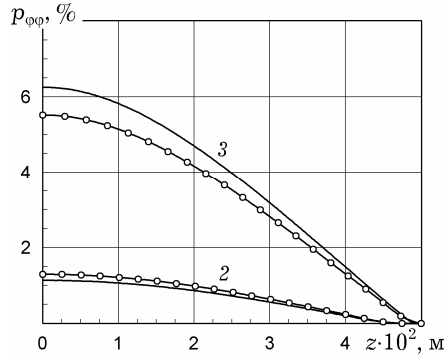


Рис. 5

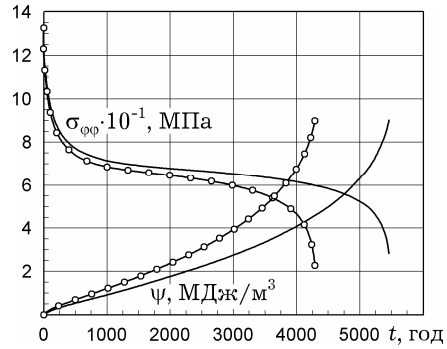


Рис. 6

У табл. 1 наведено порівняння результатів в різні моменти часу для радіальних переміщень середньої поверхні w , колових напружень $\sigma_{\phi\phi}$, параметра пошкоджуваності ψ і колових деформацій повзучості $p_{\phi\phi}$, отриманих у рамках просторової постановки (над рискою) і на основі теорії оболонки (під рискою) в центрі циліндра. Індексми «-» і «+» позначено величини на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра.

Таблиця 1

t , год	$w \cdot 10^4$, м	$\sigma_{\phi\phi}^-$, МПа	$\sigma_{\phi\phi}^+$, МПа	ψ^- , МДж/м ³	ψ^+ , МДж/м ³	$p_{\phi\phi}^-$, %	$p_{\phi\phi}^+$, %
0	2.46	132	158	0.0	0.0	0.0	0.0
	2.41	125	165	0.0	0.0	0.0	0.0
2000	16.3	64.7	150	2.37	2.05	1.58	1.30
	13.0	68.0	148	1.74	1.68	1.14	1.10
$t_{*1} = 4291$	61.9	22.9	114	9.00	8.46	6.51	5.52
$t_{*2} = 5461$	63.8	28.4	96.8	9.01	8.99	6.29	6.26

Аналізуючи наведені дані, приходимо до висновку, що в момент початку руйнування результати добре узгоджуються між собою. Наприклад, в області максимальних значень напруження відрізняються лише на 15%, а деформації повзучості – на 13%.

Для порівняння з наведеними вище результатами були проведені обчислення для інших значень товщини циліндра: $h = 0.09R$ та $h = 0.11R$ при тому ж значенні діючого навантаження. Встановлено, що для $h = 0.09R$ час до руйнування, отриманий за просторовою моделлю, склав $t_{*1} = 1561$ год, а за оболонковою – $t_{*2} = 1941$ год, відповідна відносна похибка $\Delta = 24\%$. Для $h = 0.11R$ отримано: $t_{*1} = 10795$ год, $t_{*2} = 14004$ год, $\Delta = 30\%$. У табл. 2 і в табл. 3 наведено результати розрахунків, аналогічні до табл. 1, відповідно для $h = 0.09R$ та $h = 0.11R$.

Таблиця 2

t , год	$w \cdot 10^4$, м	$\sigma_{\text{фф}}^-$, МПа	$\sigma_{\text{фф}}^+$, МПа	ψ^- , МДж/м ³	ψ^+ , МДж/м ³	$P_{\text{фф}}^-$, %	$P_{\text{фф}}^+$, %
0	2.76	152	174	0.0	0.0	0.0	0.0
	2.70	143	181	0.0	0.0	0.0	0.0
1000	21.7	76.2	166	3.46	3.05	2.12	1.79
	17.1	81.6	164	2.53	2.47	1.53	1.48
$t_{*1} = 1561$	56.9	31.3	129	9.01	8.44	5.93	5.10
$t_{*2} = 1941$	58.8	35.9	111	9.01	8.99	5.78	5.74

Таблиця 3

t , год	$w \cdot 10^4$, м	$\sigma_{\text{фф}}^-$, МПа	$\sigma_{\text{фф}}^+$, МПа	ψ^- , МДж/м ³	ψ^+ , МДж/м ³	$P_{\text{фф}}^-$, %	$P_{\text{фф}}^+$, %
0	2.22	117	144	0.0	0.0	0.0	0.0
	2.17	109	151	0.0	0.0	0.0	0.0
5000	17.1	52.4	135	2.36	2.05	1.70	1.38
	13.4	55.8	133	1.71	1.66	1.20	1.16
$t_{*1} = 10795$	66.5	16.5	101	9.03	8.45	7.05	5.99
$t_{*2} = 14004$	68.5	22.3	85.4	9.01	9.00	6.78	6.74

Дані у таблицях свідчать, що час до руйнування, отриманий за оболонковою моделлю, перевищує час до руйнування, отриманий за просторовою моделлю. Зі зростанням відносної товщини циліндра збільшується похибка обчислення компонент напружено-деформованого стану і часу до руйнування.

Висновок. У розглянутих прикладах розв'язок, отриманий у рамках уточненої оболонкової моделі, забезпечує задовільне співпадіння з розв'язком, отриманим за допомогою просторової моделі.

1. Галишин А. З. Расчет осесимметричного термовязкоупругопластического состояния слоистых ортотропных оболочек вращения с разветвленным меридианом // Прикл. механика. – 1993. – **29**, № 1. – С. 61–69.
The same: Galishin A. Z. Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of laminar orthotropic shells of revolution with a branched meridian // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, No. 1. – P. 53–60.
2. Горев В. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Проблемы прочности. – 1979. – № 7. – С. 62–67.
The same: Gorev V. V., Rubanov V. V., Sosnin O. V. Creep of materials with different properties in tension and compression // Strength Mater. – 1979. – **11**, No. 7. – P. 735–740.
3. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
4. Золочевский А. А., Склепус А. Н., Склепус С. Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. – Харьков: Бизнес Инвестор Групп, 2011. – 720 с.
5. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R-functions in boundary-value problems in mechanics // Appl. Mech. Rev. – 1995. – **48**, No. 4. – P. 151–188.
7. Zolochevsky A., Galishin A., Sklepus S., Voyiadjis G. Z. Analysis of creep deformation and creep damage in thin-walled branched shells from materials with different behavior in tension and compression // Int. J. Solids Struct. – 2007. – **44**, No. 16. – P. 5075–5100.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768306005440>
8. Zolochevsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A., Kober M. A comparison between the 3D and the Kirchhoff-Love solutions for cylinders under creep-damage conditions // Technische Mechanik. – 2014. – **34**, No. 2. – P. 104–113.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И УТОЧНЕННОЙ ОБОЛОЧЕЧНОЙ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрена осесимметричная задача ползучести и повреждаемости вследствие ползучести полого цилиндра. Разработан численно-аналитический метод решения нелинейной начально-краевой задачи ползучести и повреждаемости. Приведен пример расчета ползучести и времени до разрушения цилиндра, нагруженного внутренним давлением. Проведено сопоставление результатов, полученных на основе пространственной модели с результатами, полученными на основе уточненной модели теории оболочек.

INVESTIGATION OF CREEP AND CREEP-DAMAGE OF THE HOLLOW CYLINDER BASED ON THE SPATIAL AND REFINED SHELL MODELS

The axisymmetric problem of creep and creep-damage for hollow cylinder is considered. A numerical-analytic method for solving of nonlinear initial boundary value problem of creep and creep-damage is developed. An example of calculating the creep and the failure initiation time of cylinder under internal pressure is presented. A comparison of the results obtained on the basis of the spatial model with the results obtained on the basis of the refined model of the theory of shells is made.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ,

² Нац. техн. ун-т «ХПІ», Харків,

³ Ін-т проблем машинобудування
ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків

Одержано
13.11.15